Автоматика и телемеханика, № 5, 2019

Обзоры

© 2019 г. **В.С. КОЗЯКИН, д-р физ.-мат. наук (kozyakin@iitp.ru)**
(Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН, Москва, Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, Москва),
Н.А. КУЗНЕЦОВ, академик РАН (kuznetsov@cplire.ru)
(Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, Москва, Московский физико-технический институт (ГУ)),
П.Ю. ЧЕБОТАРЕВ, д-р физ.-мат. наук (pavel4e@gmail.com)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, Москва, Московский физико-технический институт (ГУ))

КОНСЕНСУС В АСИНХРОННЫХ МУЛЬТИАГЕНТНЫХ СИСТЕМАХ II. МЕТОД СОВМЕСТНОГО СПЕКТРАЛЬНОГО РАДИУСА[1]

Описываются математические методы анализа устойчивости, стабилизируемости и консенсуса линейных мультиагентных систем с дискретным временем. В основе этих методов лежит идея привлечения понятия совместного/обобщенного спектрального радиуса наборов матриц для анализа скорости сходимости матричных произведений с сомножителями из множеств матриц со специальными свойствами. Работа продолжает обзор авторов "Консенсус в асинхронных мультиагентных системах", первая часть которого опубликована в [1].

Ключевые слова: асинхронные мультиагентные системы, консенсус, устойчивость, стабилизируемость, марковские системы, матричные произведения, совместный спектральный радиус.

DOI: 10.1134/S0005231019050015

1. Введение

Математические методы анализа мультиагентных систем в настоящее время вряд ли можно считать сложившимися ввиду большого разнообразия систем, объединенных термином "мультиагентные", а также из-за сложности анализа их функционирования. Уже первые попытки анализа такого рода систем показали (см., например, [2], а также библиографию в [3–5]), что даже в линейном случае классические методы анализа оказываются недостаточно эффективными. В данной части обзора ограничиваемся описанием подходов, развитых в последние годы для анализа устойчивости и стабилизируемости

[1] Работа поддержана грантом Российского научного фонда 16-11-00063, предоставленным ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН. Работа третьего автора также частично поддержана программой президиума РАН №30 "Теория и технологии многоуровневого децентрализованного группового управления в условиях конфликта и кооперации".

лишь одного класса мультиагентных систем — так называемых линейных переключающихся систем, которые могут изменять свои состояния в определенные дискретные моменты времени.

С тех пор как проблематика асинхронности мультиагентных систем привлекла внимание исследователей, возникло множество разнообразных подходов к их исследованию, даже кратко описать которые в настоящей работе не представляется возможным. В частности, начиная с 60-х гг. прошлого века среди специалистов по теории автоматического управления достаточно популярной стала трактовка асинхронных систем с дискретным временем как систем в непрерывном времени с пилообразными запаздываниями (см., например, [6, 7] и библиографию в этих работах). В первой части настоящего обзора отмечены работы, в которых данный подход использовался при решении задач консенсуса. Отметим, что при анализе дискретных систем, возникающих в компьютерных сетях, сетях передачи данных и т.п., в последнее время в публикациях промежуточный этап (к которому можно отнести выписывание тех или иных уравнений динамики, в частности уравнений с запаздыванием) между прикладной постановкой и конечной математической моделью все чаще опускается.

Частично по этой причине оставляем без внимания множество других способов перехода к асинхронным системам и ограничиваемся анализом той задачи, к которой в конечном счете сводятся многие вопросы теории устойчивости, стабилизируемости и консенсуса линейных мультиагентных систем, — задачи о сходимости произведений матриц, описывающих поведение агентов в последовательные промежутки времени. В последние годы данная проблематика, как правило, исследуется с использованием различных вариантов понятия совместного спектрального радиуса набора матриц (см., например, библиографию в [8]).

В качестве достаточно показательного примера эффектов, возникающих при асинхронном взаимодействии различных объектов, в разделе 2 рассматривается модель треугольного (валютного) арбитража в экономике, при анализе которой применение идеологии мультиагентности приводит к достаточно неожиданным с экономической точки зрения выводам. Изложение этого раздела следует работе [9].

В разделе 3 описывается наиболее простой тип мультиагентных систем, выделенный в 70–80-х гг. прошлого века как способ описания функционирования многопроцессорных систем и систем управления с асинхронно взаимодействующими компонентами, см., например, [4, 5]. Рассматриваются многокомпонентные (мультиагентные) системы, компоненты которых (агенты) подвергаются коррекции в дискретные моменты времени. Предполагается, что в общем случае моменты коррекции различных компонент не совпадают друг с другом. Такие системы называются рассинхронизованными. Типичным примером являются многопроцессорные системы и вычислительные системы с асинхронной организацией вычислений. Возникающие при описании динамики таких систем разностные уравнения описывают также поведение различного рода цифровых сетей. Аналогичными уравнениями описывается функционирование многоконтурных систем управления динамическими объектами, т.е. систем управления технологическими процессами и движущимися объектами. Подобные математические модели находят применение также при исследовании информационного взаимодействия в живых организмах и для описания нейроподобных сетей [10].

При исследовании проблемы консенсуса в мультиагентных системах важным является вопрос о том, каким образом моменты коррекции компонент могут влиять на устойчивость системы. Анализируются три принципиально различающиеся как по методам исследования, так и по получающимся результатам ситуации. Первая из них относится к случаю, когда компоненты системы подвергаются коррекции периодически с несовпадающими, вообще говоря, периодами. Вторая ситуация относится к случаю, когда моменты коррекции каждой компоненты представляют взаимно независимые потоки случайных событий. Третья ситуация относится к случаю, когда никакой информацией о закономерностях, описывающих моменты коррекции компонент, не располагаем. Полученные результаты показывают, что способ рассинхронизации может качественно влиять на динамику системы. В ряде случаев рассинхронизованные системы обладают свойствами, которыми не обладают синхронизованные системы.

Одной из отличительных черт рассинхронизованных систем является то, что каждая компонента (агент) такой системы в каждый момент времени либо не меняет свое состояние, либо же меняет его по заранее заданному линейному закону. В разделе 4 рассматривается более общая ситуация, когда компоненты системы (агенты) в каждый момент времени могут недетерминированно изменять свое состояние в соответствии с некоторым конечным или бесконечным набором линейных правил. В несколько другом контексте данные системы были рассмотрены в [11]. Основной результат данного раздела, теорема 6, утверждает, что вопрос об устойчивости подобного рода мультиагентных систем с недетерминированно функционирующими агентами, описываемыми линейными "положительными" законами, может быть конструктивно разрешен. Аналогичный результат устанавливается в теореме 8 для более широкого класса мультиагентных систем, получающихся с помощью параллельных и последовательных соединений "элементарных" агентов.

2. Валютный арбитраж

В экономике под арбитражем понимается "инвестиционная стратегия, не требующая дополнительных вложений и гарантирующая выигрыш при непредвиденных обстоятельствах" [12]. При этом вся система арбитража является типичным примером мультиагентной системы. Арбитраж прибылен, если товары или активы могут быть куплены по цене, более низкой, чем та, по которой они продаются. Отличие арбитражных операций от спекулятивных в том, что в них отсутствуют или низки капитал и риски. Прибыль при арбитраже достигается за счет разницы фактических курсов, а не за счет игры на спекулятивных предположениях о возможных будущих значениях курсов. Детальное описание теории арбитража можно найти, например, в [13, 14]. Один из сценариев валютного арбитража с реальными ценами спроса и предложения описан в примере 5.3 из [15].

В экономической и финансовой литературе постулируется, что *использование прибыльных арбитражных возможностей приводит к уничтожению ценовых несоответствий между "идентичными" товарами и активами.* Этот постулат фактически утверждает, что арбитражные операции являются самостабилизирующимися, из него вытекает также "закон одной цены", объясняющий механизм образования валютных обменных курсов за счет равенства покупательных способностей [16]. Основой современной теории финансов является условие безарбитражности (отсутствия возможности прибыльного арбитража), содержащееся в теоремах Модильяни—Миллера о структуре корпоративного капитала, в моделях ценообразования опционов Блэка—Шоулза и арбитражного ценообразования активов [17].

В случае трех валют одной арбитражной операции достаточно, чтобы исключить возможность дальнейшего прибыльного арбитража. Однако в случае четырех валют арбитражные последовательности уже могут оказаться периодическими или экспоненциально растущими [18], не приводящими в результате к получению безарбитражных ансамблей или наборов обменных курсов, в которых отсутствует возможность дальнейшего прибыльного арбитража. *Этот факт опровергает гипотезу о самостабилизируемости арбитражных операций.*

В настоящем разделе показывается, что в случае $d \geqslant 5$, где d — это число не только валют, но и участников арбитражных операций, ситуация в определенном смысле еще хуже — здесь возможен сверхэкспоненциальный рост обменных курсов!

2.1. Постановка задачи

Рассмотрим валютный рынок, в который вовлечены d различных валют, характеризующихся курсами обмена r_{ij} валюты i на валюту $j \neq i$. Естественно, величина r_{ji} обмена валюты j на валюту i обратна величине r_{ij}, т.е. $r_{ji} = 1/r_{ij}$ (для упрощения теоретического анализа маржа при обмене не учитывается).

Обменные курсы изменяются с течением времени в зависимости от состояния рынка и соотношения обменных курсов. Например, если в какой-то момент времени "продавец" валюты i замечает, что обмен валюты i на валюту j через промежуточную валюту k приносит больший выигрыш, т.е.

$$r_{ik}\, r_{kj} > r_{ij}, \quad i \neq j,\ k \neq i, j,$$

то он может установить новый обменный курс валюты i на валюту j:

$$r_{ij,\text{нов}} = r_{ik}\, r_{kj}.$$

В общем случае будем считать, что изменение обменных курсов совершается в соответствии с законом

$$r_{ij,\text{нов}} = \max\left\{r_{ik}\, r_{kj},\ r_{ij}\right\}, \qquad r_{ji,\text{нов}} = 1/r_{ij,\text{нов}},$$

причем одновременно коррекции может подвергаться только одна упорядоченная пара валют (i, j).

Введя вспомогательные величины

$$a_{ij} = \log r_{ij},$$

можно перейти от описанной выше "мультипликативной" постановки задачи об арбитраже к "аддитивной", которая в этом случае формулируется следующим образом: имеется кососимметрическая $d \times d$ матрица $A = (a_{ij})$ и для тройки попарно различных индексов (i, j, k), $i \neq j$, $k \neq i, j$, производится пересчет элементов a_{ij} и a_{ji} (*арбитраж* матрицы A) по следующему правилу:

$$a_{ij,\text{нов}} = \max\{a_{ik} + a_{kj},\ a_{ij}\}, \qquad a_{ji,\text{нов}} = -a_{ij,\text{нов}}. \tag{1}$$

Тройку индексов $\omega = (i, j, k)$, $i \neq j$, $k \neq i, j$, будем называть *правилом арбитража.*

Формулы (1) показывают, что при пересчете пары (a_{ij}, a_{ji}) независимо от сценария арбитража элемент a_{ij} либо не меняет значения (тогда с матрицей A ничего не происходит), либо же элемент a_{ij} может изменить значение только следующим образом:

$$a_{ij,\text{нов}} = a_{ik} + a_{kj}$$

и при этом симметричный элемент a_{ji} меняет значение в соответствии со вторым уравнением в (1), что равносильно

$$a_{ji,\text{нов}} = a_{jk} + a_{ki},$$

причем ровно один из этих двух элементов увеличивается. Отсюда следует, что как при max-постановке задачи, так и при ее линейной переформулировке достаточно ограничиться анализом динамики пар (a_{ij}, a_{ji}) взаимно симметричных друг другу элементов, так как такой анализ способен восстановить и сценарии внутрипарных пересчетов при max-постановке задачи.

2.2. Асинхронные матричные произведения

Введем в пространстве кососимметрических $d \times d$ матриц базис $\{\mathbf{e}_{ij}\}$, $1 \leqslant i < j \leqslant d$, перенумеровав построчно наддиагональные элементы таких матриц и взяв в качестве $\mathbf{e}_{ij}$ кососимметрическую матрицу, элементы с индексами (i, j) и (j, i) которой равны 1 и -1 соответственно, а остальные — нулю. Тогда каждая матрица $A = (a_{ij})$ в этом базисе будет представляться некоторым вектором-столбцом

$$\mathbf{x} = \{a_{12}, \ldots, a_{1d}, a_{23} \ldots, a_{2d}, \ldots, a_{d-1,d}\}^{\mathsf{T}}$$

в пространстве $\mathbb{R}^{d(d-1)/2}$, где верхний индекс T означает транспонирование вектора. При этом вычисление очередного вектора $\mathbf{x}_\text{нов}$ по старому $\mathbf{x}$ будет определяться выражением

$$\mathbf{x}_\text{нов} = B_\omega \mathbf{x}, \tag{2}$$

где матрица B_ω задается правилом арбитража $\omega = (i, j, k)$:

$$B_\omega = \begin{cases} I - \mathbf{e}_{ij}\left(\mathbf{e}_{ij}^\mathsf{T} + \mathbf{e}_{ki}^\mathsf{T} - \mathbf{e}_{kj}^\mathsf{T}\right) & \text{при} \quad k < i < j, \\ I - \mathbf{e}_{ij}\left(\mathbf{e}_{ij}^\mathsf{T} - \mathbf{e}_{ik}^\mathsf{T} - \mathbf{e}_{kj}^\mathsf{T}\right) & \text{при} \quad i < k < j, \\ I - \mathbf{e}_{ij}\left(\mathbf{e}_{ij}^\mathsf{T} - \mathbf{e}_{ik}^\mathsf{T} + \mathbf{e}_{jk}^\mathsf{T}\right) & \text{при} \quad i < j < k. \end{cases}$$

Способ построения матриц B_ω близок к способу построения так называемых помесей матриц при исследовании рассинхронизованных систем [5]. Отличие заключается в том, что при вычислении помесей матриц в [5] пересчет каждого вектора в (2) осуществляется единственным способом. В данном же случае пересчет каждого вектора $\mathbf{x}$ может производиться различными способами, поскольку множество правил пересчета $(i, j, \cdot)$, у которых одинаковы первые два индекса i и j, может содержать более одного элемента.

Для анализа сходимости полученных матричных произведений приведем следующие примеры.

Пример 1. Рассмотрим набор правил арбитража $\omega_1 = (1,4,2)$, $\omega_2 = (1,2,3), \omega_3 = (3,4,1), \omega_4 = (1,4,2), \omega_5 = (1,3,4), \omega_6 = (2,4,3), \omega_7 = (2,3,1)$, $\omega_8 = (3,4,2)$, $\omega_9 = (2,4,1)$, $\omega_{10} = (1,3,4)$, $\omega_{11} = (3,4,2)$, $\omega_{12} = (1,4,3)$, $\omega_{13} = (2,3,4)$, $\omega_{14} = (1,3,2)$, $\omega_{15} = (1,2,4)$, $\omega_{16} = (1,4,3)$ и продолжим его по периодичности. Последовательность произведений соответствующих матриц B_ω

$$H_n = B_{\omega_n} H_{n-1}, \qquad H_0 = I, \ n = 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

оказывается периодической с периодом 32, не сходящейся к какому-либо пределу.

Пример 2. Рассмотрим набор правил арбитража $\omega_1 = (1,4,3)$, $\omega_2 = (3,4,1), \omega_3 = (3,4,2), \omega_4 = (1,4,2), \omega_5 = (1,2,4), \omega_6 = (2,3,1), \omega_7 = (1,3,2)$, $\omega_8 = (2,4,3)$, $\omega_9 = (1,3,4)$, $\omega_{10} = (2,4,1)$, $\omega_{11} = (1,2,3)$, $\omega_{12} = (2,3,4)$ и продолжим его по периодичности. В этом случае последовательность произведений (3) соответствующих матриц B_ω оказывается расходящейся, причем нормы матриц H_n растут с подлинейной скоростью, т.е. не быстрее, чем cn, где c — некоторая константа, а n — количество сомножителей B_ω в произведении.

Пример 3. В случае $d = 5$ рассмотрим последовательность правил арбитража $\omega_1 = (4,5,3)$, $\omega_2 = (1,2,4)$, $\omega_3 = (4,5,1)$, $\omega_4 = (3,4,2)$, $\omega_5 = (2,4,5)$, $\omega_6 = (2,3,1)$, $\omega_7 = (1,4,3)$ и продолжим ее по периодичности. Непосредственная проверка показывает, что спектральный радиус $\rho(H_7)$ матрицы

$$H_7 = B_{(143)} B_{(231)} B_{(245)} B_{(342)} B_{(451)} B_{(124)} B_{(453)}$$

строго больше 1:

$$\rho(H_7) = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \simeq 1{,}618.$$

Тогда последовательность норм $\|H_n\|$ последовательных арбитражных операций будет расходиться с экспоненциальной скоростью:

$$c\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n/7} \leqslant \|H_n\| \leqslant C\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n/7}, \tag{4}$$

где c, C — некоторые положительные константы.

Любая последовательность правил арбитража, включающая четырех участников, является частным случаем правил арбитража для пяти участников. Поэтому в случае $d = 5$ могут наблюдаться как последовательности матриц (векторов), нормы произведений которых растут линейно, так и последовательности матриц (векторов), изменяющиеся периодически. При $d > 5$ происходит "наследование неустойчивости", имеющейся в случаях $d = 4, 5$: в этом случае наблюдаются все описанные типы поведения матричных произведений, а также поведения соответствующих последовательностей векторов состояния — периодичность, рост с линейной скоростью, рост с экспоненциальной скоростью.

При возвращении от "искусственных" величин a_{ij} к истинным обменным курсам $r_{ij} = e^{a_{ij}}$ получаем достаточно необычный вывод: в случае $d = 4$ обменные курсы могут меняться периодически или расти экспоненциально, в случае же $d \geqslant 5$ обменные курсы могут меняться периодически, расти экспоненциально, а также расти со сверхэкспоненциальной скоростью — по повторно-показательному закону. Например, в случае $d = 5$ из формулы (4) следует, что

$$e^{\tilde{c}\,q^n} \leqslant \|\mathbf{r}_n\| \leqslant e^{\tilde{C}\,q^n},$$

где $q = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{1/7} \simeq 1{,}071$, а $\mathbf{r}_n = \{r_{12}, \dots, r_{1d}, r_{23}, \dots, r_{2d}, \dots, r_{d-1,d}\}^{\mathsf{T}}$ — это вектор обменных курсов в момент времени n.

2.3. Заключительное замечание

Итак, в "мире пяти валют" *гипотеза о самостабилизируемости арбитражных операций не верна*: помимо наследования периодичности или экспоненциального роста, имеющих место в случае четырех валют, арбитражные последовательности могут иметь новую форму поведения — сверхэкспоненциальный (повторно-показательный) рост. Все эти типы неустойчивости "наследуются" и в случаях большего числа валют. Характер поведения арбитражных последовательностей зависит от числа валют: периодичность или экспоненциальное поведение может возникнуть при переходе от трех к четырем валютам, а повторно-показательная неустойчивость — при превышении четырех валют.

3. Рассинхронизованные мультиагентные системы

Описанная в разделе 2 модель валютного арбитража представляет один из примеров функционирования мультиагентных (многокомпонентных) систем, в которых агенты (компоненты) изменяют свои состояния в дискретные моменты времени — моменты коррекции. Предполагается, что в общем случае моменты коррекции различных компонент не совпадают друг с другом. Такие системы называются рассинхронизованными. Помимо описанного в разделе 2 экономического примера, типичными примерами являются также многопроцессорные системы и вычислительные системы с асинхронной организацией вычислений. Аналогично описывается функционирование многоконтурных систем управления динамическими объектами, т.е. систем управления технологическими процессами и движущимися объектами.

Системы управления с элементами дискретного типа являются одним из классических объектов анализа теории управления (см., например, [3]). Наиболее трудным этот анализ оказывается в случае, когда отдельные элементы или подсистемы какой-либо системы подвергаются коррекции несинхронно друг с другом. Интерес к таким системам возник еще в 50-х гг. XX в. и значительно возрос в 70–90-х гг. в связи с развитием многопроцессорных вычислительных комплексов [4, 19]. Оказалось, что классические математические методы плохо приспособлены для анализа рассинхронизованных систем. Это потребовало развития новых методов и новых подходов [4, 5, 20].

3.1. Основные определения

Перейдем к описанию одной из простейших моделей асинхронного взаимодействия мультиагентных линейных систем. Рассмотрим систему W, состоящую из компонент (элементов, частей, агентов) $W_1, \ldots, W_N$. Пусть состояние компоненты W_i описывается вектором $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, $n_i \geqslant 1$, и изменяется в некоторые дискретные моменты в соответствии с правилом

$$\mathbf{x}_{i,\text{нов}} = a_{i1}\mathbf{x}_{1,\text{стар}} + a_{i2}\mathbf{x}_{2,\text{стар}} + \cdots + a_{iN}\mathbf{x}_{N,\text{стар}} + \mathbf{f}_i, \tag{5}$$

где a_{ij} — матрицы соответствующих размерностей, а $\mathbf{f}_i$ — вектор внешних воздействий на компоненту W_i. Обозначим через $\ldots < T_{i0} < T_{i1} < \cdots \cdots < T_{in} < \ldots$ моменты изменения состояния компоненты W_i, см. рис 1,*а*. Тогда изменение переменного состояния $\mathbf{x}_i(t)$ компоненты W_i может быть описано уравнением

$$\mathbf{x}_i(T_{in+1}) = a_{i1}\mathbf{x}_1(T_{in}) + a_{i2}\mathbf{x}_2(T_{in}) + \cdots + a_{iN}\mathbf{x}_N(T_{in}) + \mathbf{f}_i(T_{in}), \tag{6}$$

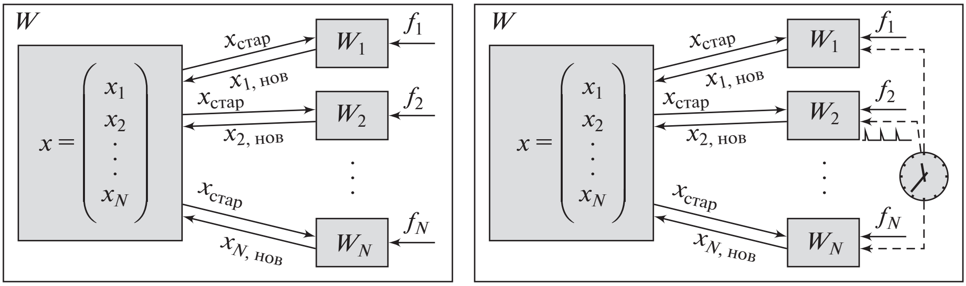
где предполагается постоянство функции $\mathbf{x}_i(t)$ на каждом интервале $T_{in} < t \leqslant T_{in+1}$. Из физических соображений естественно считать, что $T_{in} \to \infty$ при $n \to \infty$. Моменты времени T_{in} называются моментами коррекции компоненты W_i.

Если все компоненты подвергаются коррекции одновременно, например, под воздействием единого синхронизирующего сигнала — см. рис. 1,*б*, т.е.

$$T_{1n} = T_{2n} = \cdots = T_{Nn}, \qquad -\infty < n < \infty,$$

то систему W назовем *синхронизованной*, а в противном случае — *рассинхронизованной*.

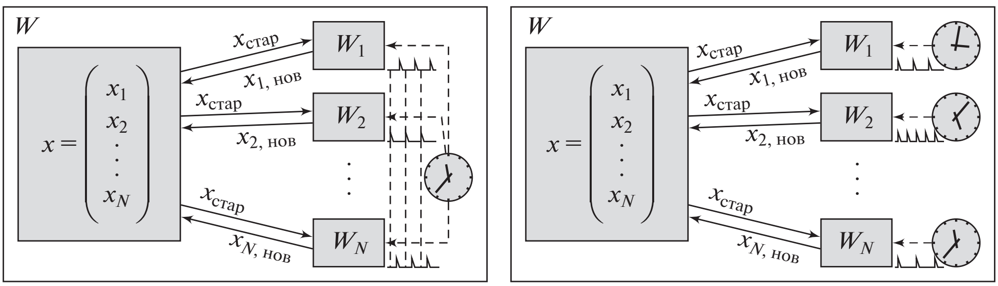
а *б*



Общая система Синхронизованная система

Рис. 1. Пример мультиагентных систем.

а *б*



Рассинхронизация по фазе Рассинхронизация по частоте

Рис. 2. Фазочастотно рассинхронизованные мультиагентные системы.

Например, система рассинхронизована, если ее моменты коррекции определяются соотношениями

$$T_{in} = \tau_i n + \varphi_i, \qquad i = 1, \ldots, N, \; -\infty < n < \infty, \tag{7}$$

где не все τ_i или φ_i совпадают между собой. Такие системы называют рассинхронизованными *по фазе* (в равенствах (7) не все величины φ_i совпадают между собой) и *частоте* (в равенствах (7) не все величины τ_i совпадают между собой) [21–24], см. рис. 2.

В некоторых случаях естественно предполагать, что компоненты системы W подвергаются коррекции в случайные моменты времени, тогда для анализа динамики системы W целесообразно привлечь вероятностные методы. Наконец, возможна ситуация, когда информация о закономерностях коррекции компонент системы W отсутствует. Эти ситуации (если интересуются вопросом об устойчивости системы W) естественно ведут к понятию абсолютной устойчивости (ср. [25]) системы W в том или ином классе рассинхронизаций.

В ряде ситуаций более удобна не непрерывная (6), а дискретная модель функционирования рассинхронизованной системы (ср. [20]). В общем случае одновременно могут подвергаться коррекции несколько компонент системы W; пусть $\omega \subseteq \{1, \ldots, N\}$ — множество их номеров. Обозначим через A_ω блочную матрицу, получающуюся из блочной матрицы $A = (a_{ij})$ заменой строк с номерами $i \notin \omega$ соответствующими строками единичной блочной матрицы I.

Пример 4. В случае, когда множество ω состоит из одного элемента, например $\omega = \{i\}$, матрица A_ω имеет вид

$$A_\omega = \begin{pmatrix} I & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{iN} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & I \end{pmatrix}.$$

В случае, когда множество ω состоит из нескольких элементов, например $\omega = \{2, i\}$, матрица A_ω имеет вид

$$A_\omega = \begin{pmatrix} I & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{iN} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & I \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $\mathbb{X}$ пространство состояний системы W, т.е. множество векторов $\mathbf{x} = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_N\}$, где $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^{n_i}$. Через $\mathbb{X}_\omega$ обозначим линейное подпространство пространства $\mathbb{X}$, состоящее из тех векторов $\mathbf{x} = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_N\}$, для которых $\mathbf{x}_i = 0$ при $i \notin \omega$. Тогда изменение состояния системы W в общем случае описывается векторным равенством

$$\mathbf{x}_{\text{нов}} = A_\omega \mathbf{x}_{\text{стар}} + \mathbf{f}_\omega,$$

где $\mathbf{f}_\omega = \{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_N\} \in \mathbb{X}_\omega$.

Пусть $\ldots < T_0 < T_1 < \cdots < T_n < \ldots$ — все моменты коррекции всех компонент системы W. Обозначим через $\mathbf{x}(n)$ вектор состояния системы в момент T_n, а через $\omega(n)$ — множество номеров подвергающихся в этот момент коррекции компонент. Тогда получаем следующее уравнение динамики мультиагентной системы W:

$$\mathbf{x}(n+1) = A_{\omega(n)} \mathbf{x}(n) + \mathbf{f}(n), \qquad \mathbf{f}(n) \in \mathbb{X}_{\omega(n)}.$$

Синхронизованной системе W отвечает ситуация, когда $\omega(n) \equiv \{1, \ldots, N\}$; динамика такой системы описывается уравнением

$$\mathbf{x}(n+1) = A\mathbf{x}(n) + \mathbf{f}(n).$$

Предположим теперь, что внешние воздействия на систему W отсутствуют. В этом случае $\mathbf{x} = 0$ оказывается положением равновесия системы W, и естественно возникает вопрос о его устойчивости. Это — центральный вопрос многочисленных публикаций, результаты которых отражены в монографии [5].

3.2. Рассинхронизация по фазе и частоте

Пусть в равенствах (7) все величины τ_i совпадают между собой. В этом случае

$$T_{in} = \tau + \varphi_i, \qquad i = 1, \dots, N, \ -\infty < n < \infty, \tag{8}$$

и система W называется рассинхронизованной по фазе [21–24, 26]. Отличительной чертой рассинхронизованной по фазе системы W является тот факт, что описывающее ее динамику однородное уравнение

$$\mathbf{x}(n+1) = A_{\omega(n)}\mathbf{x}(n) \tag{9}$$

оказывается периодическим по переменной n с периодом N. Следовательно, как хорошо известно (см., например, [3]), вопрос о его устойчивости решается по расположению собственных значений матрицы

$$C = A_{\omega(N)}A_{\omega(N-1)} \cdots A_{\omega(1)}. \tag{10}$$

В том случае, когда величины фазовых рассогласований φ_i в (8) удовлетворяют условию

$$0 \leqslant \varphi_1 < \varphi_2 < \ldots < \varphi_N < \tau,$$

вычислять матрицу C нет необходимости, поскольку ее собственные значения совпадают с корнями уравнения

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ \lambda a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{N1} & \lambda a_{N2} & \cdots & a_{NN} - \lambda \end{pmatrix} = 0.$$

Отметим, что с вычислительной точки зрения итерационная процедура (9) близка к процедуре метода Гаусса – Зейделя решения уравнения $\mathbf{x} = A\mathbf{x}$.

Матрица (10) в общем случае отлична от матрицы A. Важно подчеркнуть, что каждая из них может быть устойчивой или неустойчивой (в смысле устойчивости соответствующих систем W) независимо от другой. Подчеркнем также, что величины фазовых рассогласований φ_i не влияют на вид матрицы C — существен лишь их взаимный порядок.

Итак, один из фактов, который необходимо учитывать при анализе рассинхронизованных систем, заключается в том, что сколь угодно малая рассинхронизация изначально синхронизованной системы может привести к качественному изменению ее динамики — сделать устойчивую систему неустойчивой и наоборот.

Если система (9) рассинхронизована по фазе и частоте, т.е. не все величины τ_i в (7) совпадают между собой, то анализ ее устойчивости становится чрезвычайно трудной задачей. Какие-либо эффективные критерии устойчивости таких систем для общего случая авторам не известны. Первые результаты, касающиеся устойчивости двухкомпонентных систем W, были получены А.Ф. Клепцыным [27]. Один из возможных путей анализа устойчивости многокомпонентных систем, рассинхронизованных по частоте и фазе, заключается в следующем. Разобьем числовую ось на интервалы равной длины, например $[nH, (n+1)H)$, где $H > 0$, $-\infty < n < \infty$. Обозначим через D_n матрицу перехода от состояния системы W в момент nH к состоянию системы в момент $(n+1)H$. В рассматриваемом случае различных матриц D_n может быть лишь конечное число: $F_1, \dots, F_L$. Обозначим через f_{lk} число матриц F_l среди матриц D_n $(n = 1, \dots, k)$. Тогда при каждом $l = 1, \dots, L$ существует и конечна средняя частота

$$p_l = \lim_{k\to\infty} \frac{f_{lk}}{k}$$

встречи матриц F_l в последовательности $\{D_n\}$. Вид матриц F_l и значения частот p_l в случае несоизмеримых $\tau_1, \dots, \tau_N$ могут быть вычислены эффективно [24] с использованием геометрических построений, основанных на результатах эргодической теории (см., например, [28]).

Т е о р е м а 1. *Пусть*

$$\|F_1\|^{p_1}\|F_2\|^{p_2}\cdots\|F_L\|^{p_L} < 1$$

и периоды $\tau_1, \dots, \tau_N$ рассинхронизованной по фазе и частоте системы W несоизмеримы. Тогда система W асимптотически устойчива.

3.3. Стохастические мультиагентные системы

В ряде ситуаций более адекватна модель со случайными моментами взаимодействия агентов. Рассмотрим мультиагентную систему W с многомерными в общем случае состояниями агентов (компонент). Будем предполагать, что при каждом $i = 1, \dots, N$ последовательность $\{T_{in}\}$ моментов изменения состояния соответствующего агента является простейшим потоком событий с интенсивностью λ_i, причем эти потоки при разных i независимы.

Обозначим через $D(t)$ случайную матрицу перехода от состояния системы в нулевой момент времени к состоянию в момент времени t. Она определяется равенством $D(t) = A_{\{i_k\}} \cdots A_{\{i_1\}}$, где $i_1, \dots, i_k$ — номера агентов, изменяющих свое состояние на интервале $(0, 1]$. Согласно эргодической теореме Фюрстенберга – Кестена [29] существует неслучайное число μ, для которого с вероятностью 1 выполнено равенство

$$\mu = \lim_{t\to\infty} \frac{\ln\|D(t)\|}{t}.$$

Число μ называют *показателем Ляпунова* системы W. Систему будем называть *L-устойчивой*, если выполнено неравенство $\mu < 0$.

Укажем три метода оценки показателя Ляпунова и проверки L-устойчивости. Первый из них состоит в непосредственном компьютерном моделировании рассинхронизованной системы (точнее, ее аналога с дискретным временем). Второй метод, значительно менее трудоемкий, основан на следующей алгебраической конструкции. Введем в рассмотрение матрицу

$$Q = \frac{\sum_{i=1}^{N} \lambda_i A_{\{i\}}^{\otimes 2}}{\sum_{i=1}^{N} \lambda_i},$$

где $A_{\{i\}}^{\otimes 2}$ обозначает кронекеров квадрат [30] матрицы $A_{\{i\}}$. Тогда, как показано, например, в [5], имеет место следующая оценка:

$$\mu \leqslant \frac{1}{2} (\ln \rho(Q)) \sum_{i=1}^{N} \lambda_i.$$

Следовательно, достаточным условием L-устойчивости системы W является неравенство $\rho(Q) < 1$. Когда это условие выполнено, удается оценить скорость сходимости $\|D(t)\|$ к нулю по вероятности.

Теорема 2. *Пусть $\rho(Q) \leqslant \sigma < 1$. Тогда существует такое число q, что при всех t, $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство*

$$\mathsf{P}\{\|D(t)\| > \varepsilon\} < q\varepsilon^{-2} \exp\left(-\sum_{i=1}^{N} \lambda_i (1-\sigma) t\right).$$

Вычислительные эксперименты показывают, что оценка, которую дает теорема 2, не очень точна. Однако она гораздо точнее тривиальной оценки $\mu \leqslant \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \ln \|A_{\{i\}}\|$, не учитывающей геометрию системы. С помощью численных экспериментов были обнаружены также эффекты приобретения и потери устойчивости при переходе от синхронизованной (или рассинхронизованной по фазе) мультиагентной системы к стохастически рассинхронизованной.

Третий метод проверки L-устойчивости и оценки показателя Ляпунова относится к ситуации, когда удается более точно изучить геометрические характеристики динамики системы. Он изложен в монографии [5].

3.4. Абсолютная устойчивость мультиагентных систем

Пусть при анализе устойчивости мультиагентной системы число агентов, изменяющих свое состояние в каждый момент времени, заранее неизвестно, как неизвестна и закономерность чередования моментов изменения состояния (коррекции) различных агентов. Тогда естественно (ср. [25]) приходим к понятию абсолютной устойчивости мультиагентных систем. Отметим, что в отличие от классических постановок для мультиагентных систем проблема абсолютной устойчивости нетривиальна уже в линейном случае.

Формальное определение дадим в терминах уравнения (9). Обозначим через $\mathcal{P}(A)$ множество всех матриц A_ω, где $\omega \subseteq \{1, \ldots, N\}$. Пусть $\mathcal{F}$ — непустое подмножество множества $\mathcal{P}(A)$. Уравнение (9) (или мультиагентную систему W) назовем абсолютно устойчивым в классе взаимодействий $\mathcal{F}$, если все его решения, отвечающие различным последовательностям матриц $A_{\omega(n)} \in \mathcal{F}$ и различным начальным условиям, ограничены при $n \geqslant 0$.

Скажем, что последовательность матриц $A_{\omega(n)} \in \mathcal{F}$ регулярна, если каждое число $i = 1, \dots, N$ принадлежит бесконечному количеству множеств $\omega(n)$ $(n \geqslant 0)$.

Уравнение (9) (или мультиагентную систему W) назовем абсолютно r-асимптотически устойчивым в классе взаимодействий $\mathcal{F}$, если все его решения, отвечающие различным регулярным последовательностям матриц $A_{\omega(n)} \in \mathcal{F}$ и различным начальным условиям, стремятся к нулю $n \to \infty$.

Ясно, что ставить вопрос об абсолютной r-асимптотической устойчивости уравнения (9) имеет смысл лишь тогда, когда существует хотя бы одна регулярная последовательность матриц $A_{\omega(n)} \in \mathcal{F}$. В связи с этим множество $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(A)$, содержащее хотя бы один набор матриц $A_{\omega_1}, \dots, A_{\omega_k} \in \mathcal{F}$, для которых

$$\omega_1 \cup \dots \cup \omega_k = \{1, \dots, N\},$$

назовем *порождающим.*

Регулярные последовательности матриц $A_{\omega(n)} \in \mathcal{F}$ существуют только в том случае, когда множество $\mathcal{F}$ порождающее. Примером порождающего множества является множество $\mathcal{P}_k^-(A)$ (при некотором $k = 1, \dots, N$), состоящее из всех матриц A_ω, у которых множество ω содержит не более k различных элементов.

В случае, когда матрица A системы W со скалярными состояниями компонент неотрицательна или симметрична, достаточные условия абсолютной устойчивости предлагались разными авторами (см., например, библиографию в [5]). Приведем здесь более общее утверждение о необходимых и достаточных условиях абсолютной устойчивости таких систем.

Теорема 3. *Пусть матрица $A = (a_{ij})$ мультиагентной системы W скалярная и симметрическая. Система W абсолютно r-асимптотически устойчива в классе взаимодействий $\mathcal{P}_k^-(A)$ тогда и только тогда, когда все собственные значения матрицы A меньше 1, а собственные значения каждой ее главной диагональной подматрицы порядка k больше -1.*

Из этой теоремы вытекает, в частности, что никакая рассинхронизация асимптотически устойчивой синхронизованной системы с симметрической матрицей не приводит к потере устойчивости.

Обозначим через $\rho(A)$ спектральный радиус матрицы A.

Теорема 4. *Пусть $A = (a_{ij})$ — матрица с неотрицательными элементами. Мультиагентная система W абсолютно r-асимптотически устойчива в порождающем классе взаимодействий $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(A)$ тогда и только тогда, когда $\rho(A) < 1$.*

Из теоремы 4 вытекает достаточное условие абсолютной устойчивости рассинхронизованных систем с произвольными блочными матрицами $A = (a_{ij})$. В этом случае каждую матрицу a_{ij} можно понимать как линейное отображение из некоторого пространства $\mathbb{X}_j$ в $\mathbb{X}_i$. Пусть в пространствах $\mathbb{X}_i$, $i =$

$= 1, \dots, N$, зафиксированы нормы $\|\cdot\|_i$. Положим

$$\|a_{ij}\| = \sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{X}_i, \mathbf{x}\neq 0} \frac{\|a_{ij}\mathbf{x}\|_i}{\|\mathbf{x}\|_j}.$$

Теорема 5. *Если $\rho(S) < 1$, где скалярная матрица S имеет вид $S = (\|a_{ij}\|)$, то мультиагентная система W с матрицей A абсолютно r-асимптотически устойчива в любом порождающем классе рассинхронизаций.*

Важно отметить, что для любого решения $\mathbf{x}(n)$ абсолютно устойчивой мультиагентной системы W при каждом $n = 1, \dots$ выполняется оценка $\|\mathbf{x}(n)\| \leqslant c\|\mathbf{x}(0)\|$, в которой константа c не зависит от последовательности матриц $A_{\omega(n)}$ в уравнении (9). Если мультиагентная система W абсолютно r-асимптотически устойчива, то для каждого решения уравнения (9) выполняется более сильная оценка

$$\|\mathbf{x}(n)\| \leqslant cq^{-\varkappa(\{\omega(\cdot)\},n)}\|\mathbf{x}(0)\|, \qquad q < 1,$$

где константы c и q не зависят от последовательности матриц $A_{\omega(n)}$. Здесь $\varkappa(\{\omega(\cdot)\}, n)$ — наибольшее число непересекающихся подынтервалов интервала $[0, n]$, на каждом из которых изменяет состояние каждый из агентов системы W с последовательностью матриц $A_{\omega(n)}$.

4. Системы с недетерминированно функционирующими агентами

В разделе 3 была рассмотрена ситуация, когда каждый из “агентов” в мультиагентной системе может в каждый момент времени либо однозначно реагировать на внешние воздействия по линейному закону (5), меняя свое состояние в соответствии с правилом

$$\mathbf{x}_{i,\text{нов}} = a_{i1}\mathbf{x}_{1,\text{стар}} + a_{i2}\mathbf{x}_{2,\text{стар}} + \dots + a_{iN}\mathbf{x}_{N,\text{стар}} + \mathbf{f}_i, \tag{11}$$

либо в соответствующий момент времени не менять свое состояние:

$$\mathbf{x}_{i,\text{нов}} = \mathbf{x}_{i,\text{стар}}. \tag{12}$$

Рассмотрим более общую ситуацию: предположим, что для каждого из “агентов” в мультиагентной системе имеется не два варианта реакции на внешние воздействия — (11) или (12), — а несколько. Более точно, будем предполагать что агент с номером i, $i = 1, \dots, N$, может менять свое состояние в соответствии с законом

$$\mathbf{x}_{i,\text{нов}} = a_{i1}\mathbf{x}_{1,\text{стар}} + a_{i2}\mathbf{x}_{2,\text{стар}} + \dots + a_{iN}\mathbf{x}_{N,\text{стар}} + \mathbf{f}_i,$$

где строка $a_i = (a_{i1}, \dots, a_{iN})$ определена не однозначно, а может выбираться из некоторого множества строк $\mathcal{A}_i$.

Обозначим в этом случае через $\mathcal{A}$ множество всех матриц

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix},$$

у которых каждая из строк $a_i = (a_{i1}, \ldots, a_{iN})$ принадлежит множеству строк $\mathcal{A}_i$, $i = 1, \ldots, N$. В этом случае динамика полученной мультиагентной системы W будет описываться уравнениями вида

$$\mathbf{x}(n+1) = A(n)\mathbf{x}(n) + \mathbf{f}(n), \qquad A(n) \in \mathcal{A},$$

а соответствующую мультиагентную систему назовем *мультиагентной системой с недетерминированно функционирующими агентами.*

Чтобы рассмотреть вопрос о функционировании мультиагентных систем с недетерминированными агентами, понадобятся некоторые предварительные сведения и понятия. Дальнейшее изложение в настоящем разделе опирается на [31].

Одной из характеристик, описывающих экспоненциальную скорость роста матричных произведений с сомножителями из некоторого набора матриц, является так называемый совместный, или обобщенный, спектральный радиус. Через $\mathcal{M}(N, M)$ будем обозначать множество вещественных $(N \times M)$-матриц. Это множество матриц естественным образом отождествляется с пространством $\mathbb{R}^{N\times M}$, и поэтому в зависимости от контекста его можно трактовать как топологическое, метрическое или нормированное пространство. *Совместным спектральным радиусом* множества вещественных матриц $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}(N, N)$ называют [32] величину

$$(13) \qquad \rho(\mathcal{A}) = \lim_{n\to\infty} \sup_{A_i\in\mathcal{A}} \|A_n \cdots A_1\|^{1/n} = \inf_{n\geqslant 1} \sup_{A_i\in\mathcal{A}} \|A_n \cdots A_1\|^{1/n},$$

где $\|\cdot\|$ — произвольная матричная норма в $\mathcal{M}(N, N)$, порождаемая соответствующей векторной нормой в $\mathbb{R}^N$. *Обобщенным спектральным радиусом* ограниченного множества матриц $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}(N, N)$ называют [33, 34] величину

$$(14) \qquad \hat{\rho}(\mathcal{A}) = \lim_{n\to\infty} \sup_{A_i\in\mathcal{A}} \rho(A_n \cdots A_1)^{1/n} = \sup_{n\geqslant 1} \sup_{A_i\in\mathcal{A}} \rho(A_n \cdots A_1)^{1/n},$$

где $\rho(\cdot)$ — спектральный радиус матрицы, т.е. максимум модулей ее собственных значений. Если матрицы из набора $\mathcal{A}$ равномерно ограничены по норме, то по теореме Бергера – Ванга [35] $\rho(\mathcal{A}) = \hat{\rho}(\mathcal{A})$. А в том случае, когда набор матриц $\mathcal{A}$ компактен (замкнут и ограничен), супремумы по $A_i \in \mathcal{A}$ в (13) и (14) могут быть заменены на максимумы.

Если в (14) супремум заменить на инфимум (или минимум — в случае компактного набора матриц), то получим так называемый *совместный спектральный подрадиус* или *нижний спектральный радиус* (joint spectral subradius или lower spectral radius) [36]:

$$(15) \qquad \check{\rho}(\mathcal{A}) = \lim_{n\to\infty} \inf_{A_i\in\mathcal{A}} \|A_n \cdots A_1\|^{1/n} = \inf_{n\geqslant 1} \inf_{A_i\in\mathcal{A}} \|A_n \cdots A_1\|^{1/n},$$

который также (для произвольного, не обязательно ограниченного множества матриц) может быть выражен равенством

$$\check{\rho}(\mathcal{A}) = \lim_{n\to\infty} \inf_{A_i\in\mathcal{A}} \rho(A_n\cdots A_1)^{1/n} = \inf_{n\geqslant 1} \inf_{A_i\in\mathcal{A}} \rho(A_n\cdots A_1)^{1/n}, \tag{16}$$

как было показано в [36, теорема B1] для конечных множеств $\mathcal{A}$ и в [37, лемма 1.12] и [38, теорема 1] для произвольных множеств $\mathcal{A}$.

Вычисление как совместного, так и нижнего спектрального радиуса является сложной задачей, и лишь в исключительных случаях удается описать классы матриц, для которых эти характеристики могут быть вычислены в явном "формульном" виде, см., например, библиографию в [8, 39]. Традиционно возможность явного вычисления спектральных характеристик наборов матриц связывается с выполнением *гипотезы о конечности*, предполагающей, что в формулах (14) и (16) предел достигается при некотором конечном значении n. Для обобщенного/совместного спектрального радиуса эта гипотеза была выдвинута Лагариасом и Вангом [40] и впоследствии опровергнута Бушем и Мерессом [41]. Позднее появились альтернативные контрпримеры [42–44]. Однако все эти контрпримеры были чистыми "теоремами несуществования", и ни один из них не давал явного описания множеств матриц, для которых гипотеза о конечности не верна. Первый явный контрпример к гипотезе о конечности был построен в [45], общие методы построения такого рода контрпримеров предъявлены в [46, 47]. Нижний радиус в определенном смысле является более сложным объектом для анализа, чем обобщенный спектральный радиус, поскольку он в общем случае зависит от $\mathcal{A}$ не непрерывным образом [48, 49]. Тем не менее для него опровергнуть гипотезу о конечности оказалось даже проще [41, 50], чем для обобщенного спектрального радиуса.

Несмотря на то, что в общем случае гипотеза о конечности не верна, попытки описания классов матриц, для которых она все же имеет место, продолжаются. При этом следует иметь в виду, что справедливость для какого-либо класса матриц гипотезы о конечности дает лишь теоретическую возможность явно вычислить соответствующую спектральную характеристику, поскольку на практике при уже сравнительно небольших значениях n вычисление спектральных радиусов $\rho(A_n\cdots A_1)$ для всех возможных наборов матриц $A_1,\ldots,A_n\in\mathcal{A}$ может потребовать слишком больших вычислительных ресурсов. Поэтому с практической точки зрения наибольший интерес представляют случаи, когда гипотеза о конечности выполняется для малых значений n.

Гипотеза о конечности очевидно выполняется для множеств коммутируемых матриц, а также для множеств, состоящих из верхне- или нижнетреугольных матриц или из матриц, являющихся с точностью до скалярного множителя изометриями в некоторой норме (т.е. таких, что $\|A\mathbf{x}\|\equiv\lambda_A\|\mathbf{x}\|$ при некотором λ_A). Менее очевидным примером выполнения гипотезы о конечности является класс "симметричных" ограниченных наборов матриц, в которых вместе с каждой матрицей соответствующему набору принадлежит и (комплексно) сопряженная ей матрица [51, предложение 18]. В частности, в этот класс включаются множества самосопряженных матриц. Одним из наиболее интересных классов матриц, для которых справедлива гипотеза о конечности как для обобщенного спектрального радиуса, так и для нижнего радиуса, является так называемый класс неотрицательных матриц с независимым изменением строк [11]. Отметим, что во всех вышеупомянутых случаях обобщенный спектральный радиус совпадает со спектральным радиусом одной из матриц из $\mathcal{A}$ или со спектральным радиусом произведения пары таких матриц.

Достаточно трудными являются утверждения о том, что свойством конечности обладает любое семейство (2×2)-матриц $\mathcal{A}$, состоящее из двух матриц с элементами $\{0,1\}$ [52], а также аналогичное утверждение для произвольных семейств (2×2)-матриц $\mathcal{A}$, состоящих из двух матриц с элементами $\{-1,0,1\}$ [53]. Наконец, свойством конечности обладает любое ограниченное семейство матриц $\mathcal{A}$, в котором все матрицы за исключением, быть может, одной имеют ранг 1 [54–58].

Существует также ряд работ с менее конструктивными достаточными условиями, обеспечивающими достижимость обобщенного/совместного спектрального радиуса на конечном произведении матриц, см., например, библиографию [8].

4.1. Множества матриц с независимыми строками

Как отмечалось выше, одним из наиболее интересных классов матриц, для которых справедлива гипотеза о конечности как для обобщенного спектрального радиуса, так и для нижнего радиуса, является так называемый класс неотрицательных матриц с независимым изменением строк [11]. В настоящем разделе напомним соответствующие определения, а также представим новое доказательство соответствующих результатов о конечности, необходимое для мотивировки дальнейших конструкций.

Следуя [11], множество матриц $\mathcal{A}\subset\mathcal{M}(N,M)$ назовем *множеством с независимыми строками* или *IRU-множеством* (от independent row uncertainty set), если оно состоит из всех матриц

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1M}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2M}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NM}\end{pmatrix},$$

каждая из строк $a_i=(a_{i1},\ldots,a_{iM})$ которых принадлежит некоторому множеству M-строк $\mathcal{A}_i$, $i=1,\ldots,N$.

Пример 5. Пусть множества строк $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ следующие:

$$\mathcal{A}_1=\{(a,b),\ (c,d)\},\quad \mathcal{A}_2=\{(\alpha,\beta),\ (\gamma,\delta),\ (\mu,\nu)\}.$$

Тогда IRU-множество $\mathcal{A}$ состоит из следующих матриц:

$$A_{11}=\begin{pmatrix} a & b\\ \alpha & \beta\end{pmatrix},\ A_{12}=\begin{pmatrix} a & b\\ \gamma & \delta\end{pmatrix},\ A_{13}=\begin{pmatrix} a & b\\ \mu & \nu\end{pmatrix},$$

$$A_{21}=\begin{pmatrix} c & d\\ \alpha & \beta\end{pmatrix},\ A_{22}=\begin{pmatrix} c & d\\ \gamma & \delta\end{pmatrix},\ A_{23}=\begin{pmatrix} c & d\\ \mu & \nu\end{pmatrix}.$$

Отметим, что любое множество матриц, состоящее из одного элемента, является IRU-множеством. Другим примером классов матриц, для которых числовые характеристики (13) и (15) также могут быть явно вычислены, являются *линейно упорядоченные* множества положительных матриц $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$, в которых матрицы A_i удовлетворяют соотношениям $0 < A_1 < \dots < A_n$, где неравенства понимаются поэлементно. Совокупность всех линейно упорядоченных множеств $(N \times M)$-матриц будет обозначаться через $\mathcal{L}(N, M)$.

IRU-множество матриц называется положительным, если положительны все его матрицы, т.е. положительны все строки, образующие множества $\mathcal{A}_i$. Если множество $\mathcal{A}$ компактно, что равносильно компактности каждого множества строк $\mathcal{A}_i$, то корректно определены величины

$$\rho_{\min}(\mathcal{A}) = \min_{A \in \mathcal{A}} \rho(A), \quad \rho_{\max}(\mathcal{A}) = \max_{A \in \mathcal{A}} \rho(A).$$

Будем использовать также обозначения

$$\hat{\rho}_n(\mathcal{A}) = \sup_{A_i \in \mathcal{A}} \rho(A_n \cdots A_1)^{1/n}, \quad \check{\rho}_n(\mathcal{A}) = \inf_{A_i \in \mathcal{A}} \rho(A_n \cdots A_1)^{1/n}.$$

Как показывает следующая теорема, гипотеза о конечности справедлива для компактных IRU-множеств положительных матриц.

Теорема 6. Пусть $\mathcal{A}$ — компактное IRU-множество положительных матриц, а $\tilde{\mathcal{A}}$ — компактное множество матриц, удовлетворяющее включениям $\mathcal{A} \subseteq \tilde{\mathcal{A}} \subseteq \operatorname{co}(\mathcal{A})$, где $\operatorname{co}(\mathcal{A})$ обозначает выпуклую оболочку множества $\mathcal{A}$. Тогда

(i) $\check{\rho}_n(\tilde{\mathcal{A}}) = \rho_{\min}(\mathcal{A})$ *при всех* $n \geqslant 1$, *и поэтому* $\check{\rho}(\tilde{\mathcal{A}}) = \rho_{\min}(\tilde{\mathcal{A}}) = \rho_{\min}(\mathcal{A})$*;*

(ii) $\hat{\rho}_n(\tilde{\mathcal{A}}) = \rho_{\max}(\mathcal{A})$ *при всех* $n \geqslant 1$, *и поэтому* $\hat{\rho}(\tilde{\mathcal{A}}) = \rho_{\max}(\tilde{\mathcal{A}}) = \rho_{\max}(\mathcal{A})$.

Для случаев $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$ и $\tilde{\mathcal{A}} = \operatorname{co}(\mathcal{A})$ данная теорема в несколько иной формулировке доказана в [59]. Как показывает следующий пример, равенства $\rho_{\max}(\tilde{\mathcal{A}}) = \rho_{\max}(\mathcal{A})$ и $\rho_{\min}(\tilde{\mathcal{A}}) = \rho_{\min}(\mathcal{A})$ для произвольных множеств матриц не верны.

Пример 6. Рассмотрим семейства матриц $\mathcal{A} = \{A_1, A_2\}$ и $\mathcal{B} = \{B_1, B_2\}$, где

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Тогда $\rho_{\max}(\mathcal{A}) < \rho_{\max}(\operatorname{co}(\mathcal{A}))$ и $\rho_{\min}(\mathcal{B}) > \rho_{\min}(\operatorname{co}(\mathcal{B}))$, поскольку

$$\rho_{\max}(\mathcal{A}) = \max_{A \in \mathcal{A}} \rho(A) = 0, \quad \rho_{\max}(\operatorname{co}(\mathcal{A})) = \max_{A \in \operatorname{co}(\mathcal{A})} \rho(A) \geqslant \rho\left(\frac{1}{2}(A_1 + A_2)\right) = 1,$$

$$\rho_{\min}(\mathcal{B}) = \min_{B \in \mathcal{B}} \rho(B) = 2, \quad \rho_{\min}(\operatorname{co}(\mathcal{B})) = \min_{B \in \operatorname{co}(\mathcal{B})} \rho(B) \leqslant \rho\left(\frac{1}{2}(B_1 + B_2)\right) = 1.$$

Для векторов $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^N$ будем писать $\mathbf{x}\geqslant\mathbf{y}$ (соответственно, $\mathbf{x}>\mathbf{y}$), если координаты вектора $\mathbf{x}$ не меньше соответствующих координат вектора $\mathbf{y}$ (соответственно, строго больше соответствующей координаты вектора $\mathbf{y}$). Аналогичные обозначения будут применяться и для матриц.

В пространстве $\mathbb{R}^1$, т.е. для вещественных чисел, любые два элемента $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ *сравнимы* между собой, т.е. выполняется одно из неравенств $\mathbf{x}\leqslant\mathbf{y}$ или $\mathbf{y}\leqslant\mathbf{x}$; в этом случае говорят, что пространство $\mathbb{R}^1$ линейно упорядочено. В пространствах же $\mathbb{R}^N$ при $N>1$ ситуация принципиально отлична — здесь имеется бесконечное множество пар несравнимых элементов и невыполнение неравенства $\mathbf{x}\geqslant\mathbf{y}$ не влечет, вообще говоря, выполнение обратного неравенства $\mathbf{x}\leqslant\mathbf{y}$. Существование несравнимых элементов приводит к тому, что если при некотором $\mathbf{x}$ система линейных неравенств

$$A\mathbf{x}\geqslant\mathbf{v},\qquad A\in\mathcal{A}\subset\mathcal{M}(N,M)$$

не имеет решения, то это не означает, вообще говоря, что для какой-то матрицы $\bar{A}\in\mathcal{A}$ будет выполняться обратное неравенство $\bar{A}\mathbf{x}\leqslant\mathbf{v}$. Примеры соответствующих множеств матриц $\mathcal{A}$ легко могут быть построены. Тем не менее, как показывает следующая лемма, для множеств матриц с независимыми строками все оказывается не столь безнадежным и для линейных неравенств имеет место некий аналог линейной упорядоченности решений. А именно, справедлива следующая лемма, играющая ключевую роль в доказательстве теоремы 6.

Лемма 1. *Пусть $\mathcal{A}\subset\mathcal{M}(N,M)$ — IRU-множество матриц и пусть для некоторой матрицы $\tilde{A}\in\mathcal{A}$ и векторов $\mathbf{u},\mathbf{v}$ выполняется равенство $\tilde{A}\mathbf{u}=\mathbf{v}$. Тогда справедливы утверждения:*

H1: *либо $A\mathbf{u}\geqslant\mathbf{v}$ при всех $A\in\mathcal{A}$, либо же найдется такая матрица $\bar{A}\in\mathcal{A}$, что $\bar{A}\mathbf{u}\leqslant\mathbf{v}$ и $\bar{A}\mathbf{u}\neq\mathbf{v}$;*

H2: *либо $A\mathbf{u}\leqslant\mathbf{v}$ при всех $A\in\mathcal{A}$, либо же найдется такая матрица $\bar{A}\in\mathcal{A}$, что $\bar{A}\mathbf{u}\geqslant\mathbf{v}$ и $\bar{A}\mathbf{u}\neq\mathbf{v}$.*

Утверждения H1 и H2 допускают простую геометрическую интерпретацию. Представим множества $B_l(\mathbf{v})=\{\mathbf{x}:\mathbf{x}\leqslant\mathbf{v}\}$ и $B_u(\mathbf{v})=\{\mathbf{x}:\mathbf{x}\geqslant\mathbf{v}\}$ как нижний и верхний баллоны некоторых стилизованных песочных часов с перемычкой в точке $\mathbf{v}$, а элементы $A\mathbf{u}$ — песчинками. Тогда согласно утверждениям H1 и H2 либо все "песчинки" $A\mathbf{u}$ заполняют один из баллонов (нижний или верхний), либо же в другом баллоне (верхнем или нижнем соответственно) остается хоть одна "песчинка". Такая интерпретация дает основание назвать лемму 1 *альтернативой песочных часов.* Именно эта альтернатива играет ключевую роль как в доказательстве теоремы 6, так и в ее обобщении на новый класс матриц. Впервые альтернатива песочных часов была предложена и использована в [60] для анализа минимаксных соотношений между спектральными радиусами произведений матриц.

При доказательстве теоремы 6 используются лишь те свойства IRU-множеств матриц, которые сформулированы в утверждениях H1 и H2 альтернативы песочных часов (лемма 1). Поэтому представляется естественным выделить класс матриц, для которых выполняются утверждения H1 и H2, и изучить его свойства.

Скажем, что множество $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}(N, M)$ положительных матриц является $\mathcal{H}$-*множеством* (*hourglass set*, $\mathcal{H}$-*set*), если каждый раз при выполнении равенства $\tilde{A}\mathbf{u} = \mathbf{v}$ для некоторой матрицы $\tilde{A} \in \mathcal{A}$ и векторов $\mathbf{u}, \mathbf{v} > 0$ выполняются также утверждения H1 и H2 леммы 1.

Тривиальным примером $\mathcal{H}$-множеств являются *линейно упорядоченные* множества положительных матриц $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$, в которых матрицы A_i удовлетворяют соотношениям $0 < A_1 < \cdots < A_n$. Здесь при каждом $\mathbf{u} > 0$ векторы $A_1\mathbf{u}, \ldots, A_n\mathbf{u}$ строго положительны и линейно упорядочены, откуда и следует справедливость утверждений H1 и H2 для $\mathcal{A}$. Менее тривиальным и более интересным примером $\mathcal{H}$-множеств, как следует из леммы 1, является класс множеств положительных матриц с независимыми строками.

Опишем некоторые свойства классов $\mathcal{H}$-множеств матриц. Введем операции сложения и умножения по Минковскому множеств матриц:

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} = \{A + B : A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{B}\}, \quad \mathcal{A}\mathcal{B} = \{AB : A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{B}\},$$

а также операцию умножения множества матриц на число:

$$t\mathcal{A} = \mathcal{A}t = \{tA : t \in \mathbb{R},\ A \in \mathcal{A}\}.$$

Естественно, операция сложения *допустима* тогда и только тогда, когда матрицы из множеств $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ имеют одинаковый размер, а операция умножения *допустима* тогда и только тогда, когда размерности матриц из множеств $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ согласованы: размер строк матриц из $\mathcal{A}$ совпадает с размером столбцов матриц из $\mathcal{B}$. Проблем с согласованием размерностей не возникнет, когда рассматриваются множества, состоящие из квадратных матриц одной и той же размерности.

В дальнейшем, если понадобится совершать разного рода предельные переходы как с матрицами из рассматриваемых множеств, так и с самими множествами матриц, естественно ограничиться рассмотрением лишь компактных (замкнутых и ограниченных) множеств матриц. Множество всех компактных положительных множеств матриц с независимыми строками размера $N \times M$ будем обозначать через $\mathcal{U}(N, M)$. Компактность каждого множества матриц из $\mathcal{U}(N, M)$ равносильна компактности каждого из порождающих его множеств строк. Множество всех конечных[2] положительных линейно упорядоченных множеств матриц размера $N \times M$ будем обозначать через $\mathcal{L}(N, M)$. Наконец, через $\mathcal{H}(N, M)$ обозначим множество всех компактных положительных $\mathcal{H}$-множеств матриц размера $N \times M$.

Теорема 7. *Справедливы утверждения:*

(i) $\mathcal{A} + \mathcal{B} \in \mathcal{H}(N, M)$, *если* $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{H}(N, M)$;

(ii) $\mathcal{A}\mathcal{B} \in \mathcal{H}(N, Q)$, *если* $\mathcal{A} \in \mathcal{H}(N, M)$ *и* $\mathcal{B} \in \mathcal{H}(M, Q)$;

(iii) $t\mathcal{A} = \mathcal{A}t \in \mathcal{H}(N, M)$, *если* $t > 0$ *и* $\mathcal{A} \in \mathcal{H}(N, M)$.

[2] Можно было бы рассматривать и бесконечные множества, но в данном разделе нет возможности останавливаться на тонкостях определения линейной упорядоченности для бесконечных множеств.

Согласно теореме 7 множество всех подмножеств квадратных матриц $\mathcal{H}(N,N)$ обладает групповыми операциями сложения и умножения, но не является группой ни по сложению, ни по умножению. Однако после добавления элементов $\{0\}$ и $\{I\}$ к $\mathcal{H}(N,N)$ получившееся множество $\mathcal{H}(N,N)\cup\{0\}\cup\{I\}$ становится полукольцом [61].

Замечание 1. В общем случае $\mathcal{A}(\mathcal{B}_1+\mathcal{B}_2)\neq\mathcal{A}\mathcal{B}_1+\mathcal{A}\mathcal{B}_2$ и $(\mathcal{A}_1+\mathcal{A}_2)\mathcal{B}\neq\neq\mathcal{A}_1\mathcal{B}+\mathcal{A}_2\mathcal{B}$, т.е. операции Минковского неассоциативны. В частности, $\mathcal{A}+{}+\mathcal{A}\neq 2\mathcal{A}$.

Замечание 2. Из теоремы 7 следует, что любая конечная сумма любых конечных произведений матриц из $\mathcal{H}(N,N)$ снова является матрицей из $\mathcal{H}(N,N)$. Более того, при любых целых $n,d\geqslant 1$ элементами множества $\mathcal{H}(N,N)$ являются все "полиномиальные" множества матриц

$$P(\mathcal{A}_1,\ldots,\mathcal{A}_n)=\sum_{k=1}^{d}\sum_{i_1,\ldots,i_k\in\{1,\ldots,n\}}p_{i_1,\ldots,i_k}\mathcal{A}_{i_1}\cdots\mathcal{A}_{i_k},\tag{17}$$

где $\mathcal{A}_1,\ldots,\mathcal{A}_n\in\mathcal{H}(N,N)$, а числовые коэффициенты $p_{i_1,\ldots,i_k}$ положительны. Более того, элементами множества $\mathcal{H}(N,N)$ являются все множества матриц, получающиеся как суперпозиции конечного числа полиномиальных отображений (17).

С помощью полиномов (17) и их суперпозиций можно получать не только элементы множества $\mathcal{H}(N,N)$, но и элементы произвольных множеств $\mathcal{H}(N,M)$, беря при этом аргументы $\mathcal{A}_1,\ldots,\mathcal{A}_n$ также из множеств матриц $\mathcal{H}(N_i,M_i)$ произвольных размерностей. При этом надо только следить за тем, чтобы произведения матриц $\mathcal{A}_{i_1}\cdots\mathcal{A}_{i_k}$ были допустимы, а выражение (17) определяло множество матриц размерности $N\times M$.

Выше были предъявлены два вида нетривиальных "элементарных" $\mathcal{H}$-множеств матриц — это множества матриц с независимым изменением строк и линейно упорядоченные множества положительных матриц. В связи с этим обозначим через $\mathcal{H}_*(N,M)$ множество всех множеств матриц размера $N\times M$, получающееся как рекурсивное расширение с помощью полиномов (17) множества положительных матриц с независимым изменением строк и множества линейно упорядоченных положительных матриц. Другими словами, $\mathcal{H}_*(N,M)$ — это множество всех множеств матриц, представимых в виде значений суперпозиций матричных полиномов (17), где аргументы полиномов "низшего уровня" берутся из матричных множеств $\mathcal{U}(N_i,M_i)\cup\mathcal{L}(N_i,M_i)$.

Согласно замечанию 1 операции Минковского неассоциативны. Поэтому рекурсивное расширение множества положительных матриц с независимым изменением строк и множества линейно упорядоченных положительных матриц образует более широкое множество матриц, чем расширение множества положительных матриц с независимым изменением строк и множества линейно упорядоченных положительных матриц с помощью полиномов (17).

Выше были описаны два вида нетривиальных "элементарных" $\mathcal{H}$-множеств матриц — это множества матриц с независимым изменением строк и линейно упорядоченные множества положительных матриц. В связи с этим обозначим через $\mathcal{H}_*(N,M)$ совокупность всех множеств $(N\times M)$-матриц, получающихся как допустимые конечные суммы конечных произведений множеств положительных матриц с независимым изменением строк или множеств линейно упорядоченных положительных матриц. Другими словами, $\mathcal{H}_*(N,M)$ — это множество всех множеств матриц, представимых в виде значений матричных полиномов (17) с аргументами, берущимися из матричных множеств $\mathcal{U}(N_i,M_i)\cup\mathcal{L}(N_i,M_i)$.

Вопрос 1. Имеет ли место равенство $\mathcal{H}_*(N,M)=\mathcal{H}(N,M)$?

Ответ на этот вопрос скорее всего отрицателен, но контрпримеры авторам неизвестны.

При рассмотрении различного рода задач, связанных с множествами матриц, желательно уметь совершать предельные переходы. На самом деле, для дальнейших целей хотелось бы уметь распространять некоторые факты, связанные с $\mathcal{H}$-множествами (положительных) матриц, на такого же рода множества матриц, но с неотрицательными элементами. Для достижения этой цели, не вникая во все многообразие различных видов топологий на пространствах подмножеств, ограничимся описанием лишь одной из них — топологии, задаваемой метрикой Хаусдорфа.

Зададим на множестве $\mathcal{M}(N,M)$ некоторую матричную норму $\|\cdot\|$ и обозначим через $\mathcal{K}(N,M)$ множество всех компактных подмножеств множества $\mathcal{M}(N,M)$. Тогда для любых двух множеств матриц $\mathcal{A},\mathcal{B}\in\mathcal{K}(N,M)$ определена метрика (Хаусдорфа)

$$H(\mathcal{A},\mathcal{B})=\max\left\{\sup_{A\in\mathcal{A}}\inf_{B\in\mathcal{B}}\|A-B\|,\ \sup_{B\in\mathcal{B}}\inf_{A\in\mathcal{A}}\|A-B\|\right\},$$

превращающая $\mathcal{K}(N,M)$ в полное метрическое пространство. Значит, множество матриц $\mathcal{H}(N,M)\subset\mathcal{K}(N,M)$ также является метрическим пространством в метрике Хаусдорфа.

Как известно, см., например, [62, раздел 1.3], отображения

$$(\mathcal{A},\mathcal{B})\mapsto\mathcal{A}+\mathcal{B},\quad (\mathcal{A},\mathcal{B})\mapsto\mathcal{A}\mathcal{B},\quad \mathcal{A}\mapsto\mathcal{A}\times\mathcal{A}\times\cdots\times\mathcal{A},\quad \mathcal{A}\mapsto\mathrm{co}(\mathcal{A}),$$

где $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — компактные множества, непрерывны и в метрике Хаусдорфа, и такими же свойствами непрерывности обладает и любое полиномиальное отображение (17).

Обозначим через $\overline{\mathcal{H}}(N,M)$ замыкание множества $\mathcal{H}(N,M)$ в метрике Хаусдорфа. Ясно, что $\{0\},\{I\}\in\overline{\mathcal{H}}(N,M)$, а поскольку операции сложения и умножения множества матриц по Минковскому непрерывны в метрике Хаусдорфа, то по теореме 8 множество $\overline{\mathcal{H}}(N,N)$ является полукольцом. Однако ответ на вопрос о том, когда для некоторого множества матриц $\mathcal{A}$ справедливо включение $\mathcal{A}\in\overline{\mathcal{H}}(N,M)$, требует дополнительного анализа. Ограничимся описанием лишь одного случая, когда ответ на этот вопрос может быть дан в явном виде. Отметим, что значения любого полиномиального отображения (17) с аргументами из конечных линейно упорядоченных множеств неотрицательных матриц либо из IRU-множеств неотрицательных матриц принадлежат замыканию в метрике Хаусдорфа множества положительных $\mathcal{H}$-множеств матриц.

Следующая теорема является обобщением теоремы 6 на случай $\mathcal{H}$-множеств матриц.

Теорема 8. Пусть $\mathcal{A} \in \overline{\mathcal{H}}(N,N)$ и $\tilde{\mathcal{A}}$ — компактное множество матриц, удовлетворяющее включениям $\mathcal{A} \subseteq \tilde{\mathcal{A}} \subseteq \mathrm{co}(\mathcal{A})$. Тогда

(i) $\check{\rho}_n(\tilde{\mathcal{A}}) = \rho_{\min}(\mathcal{A})$ *при всех* $n \geqslant 1$, *и поэтому* $\check{\rho}(\tilde{\mathcal{A}}) = \rho_{\min}(\tilde{\mathcal{A}}) = \rho_{\min}(\mathcal{A})$;

(ii) $\hat{\rho}_n(\tilde{\mathcal{A}}) = \rho_{\max}(\mathcal{A})$ *при всех* $n \geqslant 1$, *и поэтому* $\hat{\rho}(\tilde{\mathcal{A}}) = \rho_{\max}(\tilde{\mathcal{A}}) = \rho_{\max}(\mathcal{A})$.

Используя эту теорему, легко построить пример, показывающий, что не каждое множество положительных матриц является $\mathcal{H}$-множеством. Не являются $\mathcal{H}$-множествами также одноточечные множества матриц $\{0\}$ и $\{I\}$, состоящие из нулевой и единичной матрицы, поскольку соответствующие матрицы неположительны.

Пример 7. Рассмотрим множество матриц $\mathcal{A}$, состоящее из двух положительных матриц

$$A_1 = \begin{pmatrix} a & a^2 \\ 1 & a \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a & 1 \\ a^2 & a \end{pmatrix}, \qquad a > 0.$$

Тогда $\max\{\rho(A_1), \rho(A_2)\} = 2a$, в то время как $\rho(A_1A_2) = (1+a^2)^2$. Следовательно, при $a \neq 1$

$$\rho(\mathcal{A}) \geqslant \|A_1A_2\|^{1/2} \geqslant \rho(A_1A_2)^{1/2} > \max\{\rho(A_1), \rho(A_2)\},$$

чего в силу теоремы 8 не могло бы быть, если бы $\mathcal{A}$ было $\mathcal{H}$-множеством.

При применении теоремы 8 одним из первых естественно возникает вопрос о проверке для некоторого множества матриц $\mathcal{A}$ справедливости включения $\mathcal{A} \in \overline{\mathcal{H}}(N,N)$. Один из таких случаев описан в следующем следствии.

Следствие 1. Пусть $\mathcal{A}$ — множество матриц, являющееся значением некоторого полиномиального отображения (17), *аргументами которого являются конечные линейно упорядоченные множества неотрицательных матриц либо компактные IRU-множества неотрицательных матриц. Тогда для любого компактного множества матриц $\tilde{\mathcal{A}}$, удовлетворяющего включениям $\mathcal{A} \subseteq \tilde{\mathcal{A}} \subseteq \mathrm{co}(\mathcal{A})$, выполняются утверждения теоремы 8.*

Из теоремы 8 вытекает, что для произвольного множества $\mathcal{A} \in \overline{\mathcal{H}}(N,M)$ имеют место равенства

$$\hat{\rho}(\mathcal{A}) = \hat{\rho}(\mathrm{co}(\mathcal{A})), \quad \check{\rho}(\mathcal{A}) = \check{\rho}(\mathrm{co}(\mathcal{A})). \tag{18}$$

На самом деле, как известно [37, 39], первое из этих равенств справедливо для произвольных (не обязательно неотрицательных) ограниченных множеств $(N \times N)$-матриц; оно является следствием того очевидного факта, что для любой нормы

$$\sup_{A_i \in \mathcal{A}} \|A_n \cdots A_1\| = \sup_{A_i \in \mathrm{co}(\mathcal{A})} \|A_n \cdots A_1\|.$$

Второе же равенство в (18) для общих множеств матриц перестает быть верным, как видно из примера множества $\mathcal{A} = \{I, -I\}$, для которого $\check{\rho}(\mathcal{A}) = 1$, но $\check{\rho}(\mathrm{co}(\mathcal{A})) = 0$. В связи с этим отметим одно общее утверждение.

Теорема 9. Для любого ограниченного множества $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}(N, N)$, состоящего из неотрицательных матриц, справедливо второе из равенств (18).

4.3. Заключительные замечания

Термин "набор матриц с независимыми строками (или столбцами)" позаимствован из относительно недавней работы [11], хотя такого рода наборы матриц фактически уже давно использовались в теории параллельных вычислений и теории асинхронных систем. В частном случае, когда каждая из строк матриц из $\mathcal{A}$ совпадает со строкой некоторой заранее заданной матрицы A или единичной матрицы I, такого рода матрицы также называют [21] помесями матриц A и I, см. раздел 3. Простейшим примером, в котором возникают помеси матриц, является так называемая линейная мультиагентная асинхронная система, в которой в каждый момент времени обновление одной или нескольких компонент вектора состояния может происходить независимо друг от друга, т.е. каждая координата вектора $\mathbf{x}_{n+1}$ принимает значение соответствующей координаты вектора $A\mathbf{x}_n$ или $\mathbf{x}_n$. В [63] эти же множества матриц названы *product families*.

Так как спектральный радиус не меняется при переходе к транспонированной матрице, то все утверждения теоремы 8 сохраняют силу для множеств матриц, берущихся из класса $\mathcal{H}^{\mathsf{T}}$-матриц, получающегося транспонированием всех $\mathcal{H}$-матриц. В частности, при транспонировании множества матриц с независимыми строками переходят в множества матриц с независимыми столбцами [11]. Отметим, что для множеств $\mathcal{H}^{\mathsf{T}}$-матриц альтернатива песочных часов, вообще говоря, не выполняется. В связи с этим естественно возникает вопрос о расширении того класса матриц, для которых справедливы приведенные в настоящем разделе теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Козякин В.С., Кузнецов Н.А., Чеботарев П.Ю.* Консенсус в асинхронных мультиагентных системах. I // АиТ. 2019. № 4. С. 3–40.
2. *Фань Чун-Вуй.* О следящих системах, содержащих два импульсных элемента с неравными периодами повторения // АиТ. 1958. Т. 19. № 10. С. 917–930.
3. *Цыпкин Я.З.* Теория линейных импульсных систем. М.: Физматгиз, 1963.
4. *Bertsekas D.P., Tsitsiklis J.N.* Parallel and Distributed Computation. Numerical Methods. Englewood Cliffs. N.J.: Prentice Hall, 1989.
5. *Асарин Е.А., Козякин В.С., Красносельский М.А., Кузнецов Н.А.* Анализ устойчивости рассинхронизованных дискретных систем. М.: Наука, 1992. DOI: 10.13140/RG.2.1.3381.6169.
6. *Сейфуллаев Р.Э., Фрадков А.Л.* Анализ дискретно-непрерывных нелинейных многосвязных систем на основе линейных матричных неравенств // АиТ. 2015. № 6. С. 57–74.
   Seifullaev R.E., Fradkov A.L. Linear Matrix Inequality-Based Analysis of the Discrete-Continuous Nonlinear Multivariable Systems // Autom. Remote Control. 2015. V. 76. No. 6. P. 989–1004.

7. *Hetel L., Fiter C., Omran H. et al.* Recent developments on the stability of systems with aperiodic sampling: an overview // Automatica J. IFAC. 2017. V. 76. P. 309–335. DOI: 10.1016/j.automatica.2016.10.023.

8. *Kozyakin V.* An annotated bibliography on convergence of matrix products and the theory of joint/generalized spectral radius: Preprint. Moscow: Institut. Inform. Transmis. Probl. 2013. December. DOI: 10.13140/RG.2.1.4257.5040/1.

9. *Cross R., Kozyakin V.S.* Double exponential instability of triangular arbitrage systems // Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B. 2013. V. 18. No. 2. P. 349–376. DOI: 10.3934/dcdsb.2013.18.349.

10. *Bhaya A., Kaszkurewicz E., Kozyakin V.S.* Existence and Stability of a Unique Equilibrium in Continuous-Valued Discrete-Time Asynchronous Hopfield Neural Networks // Proc. 1995 IEEE Int. Sympos. Circuits Syst. ISCAS'95. V. 2. 1995. P. 1140–1143. DOI: 10.1109/ISCAS.1995.520345.

11. *Blondel V.D., Nesterov Y.* Polynomial-time computation of the joint spectral radius for some sets of nonnegative matrices // SIAM J. Matrix Anal. Appl. 2009. V. 31. No. 3. P. 865–876. DOI: 10.1137/080723764.

12. *Dybvig P.H., Ross S.A.* Arbitrage // The New Palgrave Dictionary of Economics / Ed. by S.N. Durlauf, L.E. Blume. Basingstoke: Palgrave Macmillan, 2008.

13. *Marshall B.R., Treepongkaruna S., Young M.* Exploitable Arbitrage Opportunities Exist in the Foreign Exchange Market. Discussion Paper, 10 September, Massey Univer., Palmerston North, New Zealand, 2007.

14. *Akram Q.F., Rime D., Sarno L.* Arbitrage in the Foreign Exchange Market: Turning on the Microscope // J. Int. Econom. 2008. December. V. 76. No. 2. P. 237–253. DOI: 10.1016/j.jinteco.2008.07.004.

15. *Eun C.S., Resnick B.G.* International Financial Management. Irwin Series in Finance, Insurance, and Real Estate. 6th edition. McGraw-Hill/Irwin, 2011.

16. *Cassel G.* The Present Situation of the Foreign Exchanges. I // Econom. J. 1916. V. 26. No. 1. P. 62–65.

17. *Ross S.A.* A Simple Approach to the Valuation of Risky Streams // J. Business. 1978. V. 51. P. 453–475.

18. *Cross R., Kozyakin V., O'Callaghan B. et al.* Periodic Sequences of Arbitrage: A Tale of Four Currencies // Metroeconomica. 2012. May. V. 63. No. 2. P. 250–294. DOI: 10.1111/j.1467-999X.2011.04140.x.

19. *Козякин В.С.* Абсолютная устойчивость дискретных рассинхронизованных систем // Докл. АН СССР. 1990. Т. 312. № 5. С. 1066–1070.

20. *Baudet G.M.* Asynchronous iterative methods for multiprocessors // J. Assoc. Comput. Mach. 1978. V. 25. No. 2. P. 226–244.

21. *Клепцын А.Ф., Козякин В.С., Красносельский М.А., Кузнецов Н.А.* О влиянии малой рассинхронизации на устойчивость сложных систем. I // АиТ. 1983. № 7. С. 44–51.
Kleptsyn A.F., Kozyakin V.S., Krasnoselskii M.A., Kuznetsov N.A. Effect of Small Synchronization Errors on Stability of Complex Systems. I // Autom. Remote Control. 1983. V. 44. No. 7. P. 861–867.

22. *Клепцын А.Ф., Козякин В.С., Красносельский М.А., Кузнецов Н.А.* О влиянии малой рассинхронизации на устойчивость сложных систем. II // АиТ. 1984. № 3. С. 42–47.
Kleptsyn A.F., Kozyakin V.S., Krasnoselskii M.A., Kuznetsov N.A. Effect of Small Synchronization Errors on Stability of Complex Systems. II // Autom. Remote Control. 1984. V. 45. No. 3. P. 309–314.

23. *Клепцын А.Ф., Козякин В.С., Красносельский М.А., Кузнецов Н.А.* О влиянии малой рассинхронизации на устойчивость сложных систем. III // АиТ. 1984. № 8. С. 63–67.
Kleptsyn A.F., Kozyakin V.S., Krasnoselskii M.A., Kuznetsov N.A. Effect of Small Synchronization Errors on Stability of Complex Systems. III // Autom. Remote Control. 1984. V. 45. No. 8. P. 1014–1018.

24. *Клепцын А.Ф., Козякин В.С., Красносельский М.А., Кузнецов Н.А.* Устойчивость рассинхронизованных систем // Докл. АН СССР. 1984. Т. 274. № 5. С. 1053–1056.

25. *Айзерман М.А., Гантмахер Ф.Р.* Абсолютная устойчивость регулируемых систем. М.: Изд-во АН СССР, 1963.

26. *Asarin Ye. A., Kozyakin V.S., Krasnosel'skiĭ M.A. et al.* On some new types of mathematical models of complex systems // Modelling and adaptive control (Sopron, 1986). Berlin: Springer, 1988. V. 105 of Lecture Notes in Control and Inform. Sci. P. 10–26. DOI: 10.1007/BFb0043174.

27. *Асарин Е.А., Козякин В.С., Красносельский М.А., Кузнецов Н.А.* Математические модели устойчивости рассинхронизованных систем // Интеллект. процессы и их моделирование. Информационные сети. М.: Изд-во РАН, 1994. С. 3–17.

28. *Walters P.* An introduction to ergodic theory. N.Y.: Springer-Verlag, 1982.

29. *Furstenberg H., Kesten H.* Products of random matrices // Ann. Math. Statist. 1960. V. 31. P. 457–469. DOI: 10.1214/aoms/1177705909.

30. *Lancaster P.* Theory of matrices. N.Y.-London: Academic Press, 1969.

31. *Kozyakin V.* Hourglass alternative and the finiteness conjecture for the spectral characteristics of sets of non-negative matrices // Linear Algebra Appl. 2016. V. 489. P. 167–185. DOI: 10.1016/j.laa.2015.10.017.

32. *Rota G.-C., Strang G.* A note on the joint spectral radius // Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 63 = Indag. Math. 1960. V. 22. P. 379–381.

33. *Daubechies I., Lagarias J.C.* Sets of matrices all infinite products of which converge // Linear Algebra Appl. 1992. V. 161. P. 227–263. DOI: 10.1016/0024-3795(92)90012-Y.

34. *Daubechies I., Lagarias J.C.* Corrigendum/addendum to: "Sets of matrices all infinite products of which converge" [Linear Algebra Appl. **161** (1992), 227–263; MR1142737 (93f:15006)] // Linear Algebra Appl. 2001. V. 327. No. 1-3. P. 69–83. DOI: 10.1016/S0024-3795(00)00314-1.

35. *Berger M.A., Wang Y.* Bounded semigroups of matrices // Linear Algebra Appl. 1992. V. 166. P. 21–27. DOI: 10.1016/0024-3795(92)90267-E.

36. *Gurvits L.* Stability of discrete linear inclusion // Linear Algebra Appl. 1995. V. 231. P. 47–85. DOI: 10.1016/0024-3795(95)90006-3.

37. *Theys J.* Joint Spectral Radius: Theory and Approximations: Ph. D. thesis / Faculté des sciences appliquées, Département d'ingénierie mathématique, Center for Systems Engineering and Applied Mechanics. Université Catholique de Louvain. 2005. May. 189 p.

38. *Czornik A.* On the generalized spectral subradius // Linear Algebra Appl. 2005. V. 407. P. 242–248. DOI: 10.1016/j.laa.2005.05.006.

39. *Jungers R.* The joint spectral radius. Berlin: Springer-Verlag, 2009. V. 385 of Lecture Notes in Control and Information Sciences. DOI: 10.1007/978-3-540-95980-9.

40. *Lagarias J.C., Wang Y.* The finiteness conjecture for the generalized spectral radius of a set of matrices // Linear Algebra Appl. 1995. V. 214. P. 17–42. DOI: 10.1016/0024-3795(93)00052-2.

41. *Bousch T., Mairesse J.* Asymptotic height optimization for topical IFS, Tetris heaps, and the finiteness conjecture // J. Amer. Math. Soc. 2002. V. 15. No. 1. P. 77–111. DOI: 10.1090/S0894-0347-01-00378-2.
42. *Blondel V.D., Theys J., Vladimirov A.A.* An elementary counterexample to the finiteness conjecture // SIAM J. Matrix Anal. Appl. 2003. V. 24. No. 4. P. 963–970. DOI: 10.1137/S0895479801397846.
43. *Kozyakin V.* A Dynamical Systems Construction of a Counterexample to the Finiteness Conjecture // Proc. 44 IEEE Conf. Decision Control 2005 and 2005 Eur. Control Conf. CDC-ECC'05. 2005. P. 2338–2343. DOI: 10.1109/CDC.2005.1582511.
44. *Kozyakin V.S.* Structure of Extremal Trajectories of Discrete Linear Systems and the Finiteness Conjecture // Autom. Remote Control. 2007. V. 68. No. 1. P. 174–209. DOI: 10.1134/S0005117906040171.
45. *Hare K.G., Morris I.D., Sidorov N., Theys J.* An explicit counterexample to the Lagarias-Wang finiteness conjecture // Adv. Math. 2011. V. 226. No. 6. P. 4667–4701. DOI: 10.1016/j.aim.2010.12.012.
46. *Morris I., Sidorov N.* On a Devil's staircase associated to the joint spectral radii of a family of pairs of matrices // J. Eur. Math. Soc. (JEMS). 2013. V. 15. No. 5. P. 1747–1782. DOI: 10.4171/JEMS/402.
47. *Jenkinson O., Pollicott M.* Joint spectral radius, Sturmian measures, and the finiteness conjecture // Ergodic Theory Dynam. Syst. 2017. P. 1–39. DOI: 10.1017/etds.2017.18.
48. *Jungers R.M.* On asymptotic properties of matrix semigroups with an invariant cone // Linear Algebra Appl. 2012. V. 437. No. 5. P. 1205–1214. DOI: 10.1016/j.laa.2012.04.006.
49. *Bochi J., Morris I.D.* Continuity properties of the lower spectral radius // Proc. Lond. Math. Soc. (3). 2015. V. 110. No. 2. P. 477–509. DOI: 10.1112/plms/pdu058.
50. *Czornik A., Jurgaś P.* Falseness of the finiteness property of the spectral subradius // Int. J. Appl. Math. Comput. Sci. 2007. V. 17. No. 2. P. 173–178. DOI: 10.2478/v10006-007-0016-1.
51. *Plischke E., Wirth F.* Duality results for the joint spectral radius and transient behavior // Linear Algebra Appl. 2008. V. 428. No. 10. P. 2368–2384. DOI: 10.1016/j.laa.2007.12.009.
52. *Jungers R.M., Blondel V.D.* On the finiteness property for rational matrices // Linear Algebra Appl. 2008. V. 428. No. 10. P. 2283–2295. DOI: 10.1016/j.laa.2007.07.007.
53. *Cicone A., Guglielmi N., Serra-Capizzano S., Zennaro M.* Finiteness property of pairs of 2×2 sign-matrices via real extremal polytope norms // Linear Algebra Appl. 2010. V. 432. No. 2-3. P. 796–816. DOI: 10.1016/j.laa.2009.09.022.
54. *Dai X., Huang Y., Liu J., Xiao M.* The finite-step realizability of the joint spectral radius of a pair of $d \times d$ matrices one of which being rank-one // Linear Algebra Appl. 2012. V. 437. No. 7. P. 1548–1561. DOI: 10.1016/j.laa.2012.04.053.
55. *Liu J., Xiao M.* Computation of Joint Spectral Radius for Network Model Associated with Rank-One Matrix Set // Neural Inform. Proc. Proc. 19 Int. Conf., ICONIP 2012, Doha, Qatar, November 12-15, 2012. P. III. Springer Berlin Heidelberg, 2012. V. 7665 of Lecture Notes Comput. Sci. P. 356–363. DOI: 10.1007/978-3-642-34487-9_44.
56. *Liu J., Xiao M.* Rank-one characterization of joint spectral radius of finite matrix family // Linear Algebra Appl. 2013. V. 438. No. 8. P. 3258–3277. DOI: 10.1016/j.laa.2012.12.032.
57. *Morris I.D.* Rank one matrices do not contribute to the failure of the finiteness property. ArXiv.org e-Print archive. 2011. September. arXiv: 1109.4648.

58. *Wang S., Wen J.* The Finiteness Conjecture for the Joint Spectral Radius of a Pair of Matrices // Proc. 9 Int. Conf. Comput. Intelligence Security (CIS), 2013, Emeishan, China, December 14–15. 2013. P. 798–802.

59. *Nesterov Y., Protasov V.Y.* Optimizing the spectral radius // SIAM J. Matrix Anal. Appl. 2013. V. 34. No. 3. P. 999–1013. DOI: 10.1137/110850967.

60. *Asarin E., Cervelle J., Degorre A. et al.* Entropy Games and Matrix Multiplication Games // 33 Symp. Theor. Aspects Comp. Sci., (STACS 2016) / Ed. by N. Ollinger, H. Vollmer. V. 47 of LIPIcs. Leibniz Int. Proc. Inform. Dagstuhl, Germany: Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum fuer Informatik. 2016. P. 11:1–11:14. DOI: 10.4230/LIPIcs.STACS.2016.11.

61. *Golan J.S.* Semirings and their applications. Dordrecht: Kluwer Academ. Publish., 1999. DOI: 10.1007/978-94-015-9333-5.

62. *Borisovich Y.G., Gel'man B.D., Myshkis A.D., Obukhovskii V.V.* Multivalued mappings // J. Soviet Math. 1984. V. 24. No. 6. P. 719–791. DOI: 10.1007/BF01305758.

63. *Protasov V. Yu.* Spectral simplex method // Math. Program. 2016. V. 156. No. 1-2. Ser. A. P. 485–511. DOI: 10.1007/s10107-015-0905-2.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.Л. Фрадковым.

Поступила в редакцию 17.09.2018

После доработки 22.10.2018

Принята к публикации 08.11.2018