Автоматика и телемеханика, № 5, 2019

© 2019 г. **М.В. МОРОЗОВ, канд. физ.-мат. наук (miguel@ipu.ru)**
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

О МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ОДНОРОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ С АСИМПТОТИЧЕСКИ УСТОЙЧИВЫМ МНОЖЕСТВОМ

Доказано, что решения периодического однородного дифференциального включения с асимптотически устойчивым множеством при малых возмущениях, не нарушающих периодичности и однородности включения, обладают свойством сохранения оценки экспоненциального вида.

Ключевые слова: периодическое однородное дифференциальное включение, асимптотически устойчивое множество, малые возмущения.

DOI: 10.1134/S0005231019050039

1. Введение

Изучение систем управления привело к применению теории дифференциальных включений, см., например, [1–7]. Использованию дифференциальных включений в теории систем управления посвящена публикация [8]. Известно, что при достаточно общих предположениях система управления с ограничениями на управление эквивалентна дифференциальному включению

$$\dot{x} \in F(t, x), \tag{1}$$

где $F(t, \mathrm{x})$ – многозначное отображение, т.е. функция, которая каждому моменту времени t и каждой фазовой точке $x \in \mathrm{R}^n$ ставит в соответствие множество $F(t, x) \in \mathrm{R}^n$. В форме дифференциального включения (1) можно представить не только систему управления с заданными ограничениями на управление, но и другие объекты. К таким объектам, например, относятся системы дифференциальных неравенств, неявные дифференциальные уравнения, системы управления с фазовыми ограничениями, дифференциальные уравнения с разрывной правой частью.

Теория дифференциальных включений хорошо развита, см. [9, 10], однако в публикациях, посвященных периодическим по времени дифференциальным включениям (например, [11–13]), в основном рассматриваются вопросы существования периодических решений. Достаточно мало публикаций посвящено исследованию свойств решений периодических по времени дифференциальных включений. Так, например, в [14, 15] исследуются свойства слабой асимптотической и слабой экспоненциальной устойчивости положения равновесия периодического по времени дифференциального включения. Согласно приведенным в [14, 15] определениям положение равновесия рассматриваемого периодического дифференциального включения слабо асимптотически (слабо экспоненциально) устойчиво, если существует хотя бы одно решение включения, удовлетворяющее условиям обычных определений асимптотической (экспоненциальной) устойчивости положения равновесия дифференциального включения. В [14, 15] разработан метод исследования слабой асимптотической и слабой экспоненциальной устойчивости положения равновесия периодического по времени дифференциального включения, состоящий в построении включения первого приближения и исследовании свойств его решений. Доказаны теоремы, позволяющие судить о слабой асимптотической (слабой экспоненциальной) устойчивости положения равновесия исходного включения по аналогичным свойствам положения равновесия включения первого приближения.

В [16–19] решены задачи о абсолютной и робастной устойчивости систем управления с периодически изменяющимися параметрами. В частности, установлено, что рассматриваемые системы управления с периодическими параметрами эквивалентны, в смысле совпадения множеств абсолютно непрерывных решений, периодическому по времени дифференциальному включению. В [20] рассмотрен ряд примеров, приводящих к системам с периодически меняющимися параметрами. К системам подобного вида относятся, например, следящие системы, элементы которых работают на переменном токе, системы управления с амплитудно-импульсной модуляцией и системы, используемые при решении задач, связанных с исследованием вибраций фрезерных станков. В [21] доказано, что решения периодических дифференциальных включений с асимптотически устойчивым нулевым решением обладают в ряде случаев теми же свойствами, что и решения автономных дифференциальных включений. В [22, 23] изучались периодические дифференциальные включения с асимптотически устойчивыми множествами, в частности установлен равномерный характер стремления решений к асимптотически устойчивому множеству и получена оценка решений экспоненциального вида. Данная статья является продолжением [22, 23] и посвящена влиянию малых возмущений на решения периодических дифференциальных включений с асимптотически устойчивыми множествами, что в [22, 23] не рассматривалось.

2. Постановка задачи

Приведем необходимые определения и теорему, доказанную в [23]. Рассмотрим периодическое дифференциальное включение вида

$$(2)\quad \dot{x}\in F(t,x),\quad F(t,x)\equiv F(t+T,x),\quad t\geq 0,\quad x\in \mathrm{R}^n,\quad T=\mathrm{const},\quad T>0.$$

Везде далее будем предполагать, что многозначная функция $F(t,x)$ в области $G=\{0\leq t\leq T, x\in G_R, G_R=\{x_0:\|x_0\|\leq R\}\}$ удовлетворяет основным условиям [5, с. 60], т.е. при всех $(t,x)\in G$ множество $F(t,x)\subset \mathrm{R}^n$ является непустым, ограниченным, замкнутым, выпуклым и функция $F(t,x)$ полунепрерывна сверху [5, с. 52] по (t,x).

Решением включения (2) будем называть абсолютно непрерывную вектор-функцию $x(t)$, определенную на интервале (полуинтервале) или отрезке $\mathbf{I}$, которая почти всюду на $\mathbf{I}$ удовлетворяет (2). В силу периодичности по t многозначной функции $F(t,x)$ при исследовании свойств решений $x(t,t_0,x_0)$ включения (2) без ограничения общности можно считать, что $t_0\in[0,T]$. Из определения решения и периодичности по t правой части включения (2) следует, что решения включения обладают следующими двумя свойствами. Если функция $x(t)$ является решением включения (2) (при $\alpha < t < \beta$), то:

1) функция $x(t+kT)$, где $\alpha - kT < t < \beta - kT$, k – любое целое число, также является решением включения (2), и решения $x(t)$ и $x(t+kT)$ имеют одну и ту же траекторию;

2) для любых $t_0 \in [0,T]$, t_1 и t таких, что $t_0 \leq t_1 \leq t$, выполнено равенство $x(t,t_1,x(t_1)) = x(t,t_0,x_0)$, где $x(t_1) = x(t_1,t_0,x_0)$.

Пусть $a \in \mathrm{R}^n$, $b \in \mathrm{R}^n$ – точки (векторы) с координатами a_i и b_i, $i = \overline{1,n}$, $B \subset \mathrm{R}^n$ – множество. Под расстоянием ρ между точками или точкой и множеством понимаются соответственно следующие неотрицательные числа

$$\rho(a,b) = \|a-b\| = \left(\sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i)^2\right)^{1/2}, \quad \rho(a,B) = \inf_{b\in B}(a,b).$$

Известно, что функция $\varphi(x) = \rho(x,B)$ равномерно непрерывна для любых точек $x \in \mathrm{R}^n$ и $y \in \mathrm{R}^n$ $\quad |\rho(x,B) - \rho(y,B)| \leq \rho(x,y)$. Замкнутой ε-окрестностью M^ε множества M будем называть множество таких точек x, что $\rho(x,M) \leq \varepsilon$. Пусть $M^{\varepsilon_0} \subset G$, где $\varepsilon_0 > 0$.

Определение 1. Множество M называется асимптотически устойчивым для включения (2), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для каждого x_0, для которого $\rho(x_0,M) \leq \delta(\varepsilon)$, существует решение с начальным условием $x(t_0) = x_0$ и все решения, обладающие указанным свойством, продолжаются на интервале $t_0 \leq t < \infty$ и удовлетворяют условиям

$$\rho(x(t),M) \leq \varepsilon \quad \text{при} \quad t_0 \leq t < \infty \quad \text{и} \quad \rho(x(t),M) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty.$$

Далее будем рассматривать однородные по $x \in \mathrm{R}^n$ дифференциальные включения. Если B – множество в R^n, c – число, то cB обозначает множество точек вида cx для всех $x \in B$.

Определение 2. Многозначная функция $F(t,x)$ называется однородной (первой степени) по x, если $F(t,cx) \equiv cF(t,x)$ для всех $c > 0$.

Определение 3. Дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(t,x) \quad (F(t,cx) \equiv cF(t,x), c > 0) \tag{3}$$

называется однородным по x.

Однородное дифференциальное включение (3) совпадает с включением, полученным при замене $x = cx_1$ с любым $c > 0$. Это значит, что если функция $x = \varphi(t)$ – решение включения (3), то для любого $c > 0$ функция $x = c\varphi(t)$ тоже является решением.

Рассмотрим периодическое по t и однородное по x дифференциальное включение

$$\begin{gathered}\dot{x} \in F(t,x) \quad (t \geq 0,\ x \in \mathrm{R}^n), \quad F(t,x) \equiv F(t+T,x) \quad (T = \mathrm{const},\ T > 0), \\ F(t,cx) \equiv cF(t,x) \quad (c > 0).\end{gathered} \tag{4}$$

Т е о р е м а 1. *Если ограниченное множество M асимптотически устойчиво для включения* (4)*, то существуют такие числа $c_0 > 0$ и $c_1 > 0$, что для каждого решения $x(t, t_0, x_0)$ включения* (4) *при любых t_0 и $t \geq t_0$ выполнена оценка*

$$\rho(x(t, t_0, x_0), M) \leq c_0 \|x_0\| e^{-c_1 t} \quad (t_0 \leq t < \infty). \tag{5}$$

Доказательство теоремы 1 приведено в [23], в нем используется доказанное в [22] утверждение, что для включения (4) асимптотическая устойчивость множества M эквивалентна его равномерной асимптотической устойчивости по (t_0, x_0). Кроме того, используются однородность включения (4), компактность множества его решений на любом отрезке и факт, что если $x(t)$ – решение, то функция $x(t + kT)$ также является решением включения (4) и решения $x(t)$ и $x(t + kT)$ имеют одну и ту же траекторию.

Задача состоит в доказательстве свойства сохранения асимптотической устойчивости множества M включения (4) при малых возмущениях, не нарушающих его однородности и периодичности.

3. Основной результат

Выберем произвольную точку (t, x). Введем обозначения:

$$x^\eta = \{x_1 : \|x_1 - x\| \leq \eta\} \quad (\eta > 0) \quad \text{и} \quad F(t, x^\eta) = \bigcup_{x_1 \in x^\eta} F(t, x_1).$$

Рассмотрим $coF(t, x^\eta)$ – выпуклую оболочку множества $F(t, x^\eta)$. Обозначим через $[coF(t, x^\eta)]^\delta$ замкнутую δ-окрестность множества $coF(t, x^\eta)$. Пусть $\eta = p\|x\|$, $\delta = q\|x\|$, где p и q – некоторые положительные параметры. Определим функцию

$$F_{pq}(t, x) = \left[coF\left(t, x^{p\|x\|}\right)\right]^{q\|x\|} \quad (p > 0, q > 0). \tag{6}$$

Функция F_{pq}, как и функция F, периодическая, однородная (первой степени) и удовлетворяет основным условиям, которые приведены при постановке задачи.

В качестве возмущенного будем рассматривать включение

$$\dot{x} \in F_{pq}(t, x). \tag{7}$$

Т е о р е м а 2. *Если ограниченное множество M асимптотически устойчиво для включения* (4)*, то существуют такие $p_0 > 0$ и $q_0 > 0$, что при всех $0 < p \leq p_0$ и $0 < q \leq q_0$ оно асимптотически устойчиво для включения* (7)*. При этом постоянные c_0 и c_1 в оценке* (5) *для решений включения* (7) *можно взять сколь угодно мало отличающимися от значения этих постоянных для включения* (4).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x(t, t_0, x_0)$ – решение включения (4), а $y(t, t_0, y_0)$ – решение включения (7). Поскольку включения (4) и (7) однородны, то без ограничения общности можно считать, что $\|x_0\| \leq 1$ и $\|y_0\| \leq 1$.

Для любого $\varepsilon > 0$ и $\beta \in (0, c_1)$ выберем натуральное число $\tilde{k}$ такое, что выполняется неравенство

$$1 + \varepsilon \le e^{(c_1-\beta)s} \quad (s = \tilde{k}T), \tag{8}$$

где c_1 – постоянная в оценке (5) для решения $x(t, t_0, x_0)$.

В силу следствия 2 теоремы 1 из [5, с. 69] при достаточно малых p и q и при $t_0 \le t \le t_0 + s$ все решения включения (7) с начальными условиями $\|y_0\| \le 1$ отличаются от некоторых решений включения (4) с $\|x_0\| \le 1$ меньше чем на $\varepsilon e^{-c_1 s}$. Поэтому выполнены неравенства

$$\|y(t, t_0, y_0) - x(t, t_0, x_0)\| \le \varepsilon e^{-c_1 s} \le \varepsilon e^{-c_1(t-t_0)} \quad (t_0 \le t \le t_0 + s). \tag{9}$$

Кроме того, выполнены неравенства

$$\begin{aligned} &\rho(y(t, t_0, y_0), M) - \rho(x(t, t_0, x_0), M) \le \\ &\le |\rho(y(t, t_0, y_0), M) - \rho(x(t, t_0, x_0), M)| \le \\ &\le \rho(x(t, t_0, x_0), y(t, t_0, y_0)). \end{aligned} \tag{10}$$

Из (5), (9) и (10), учитывая, что $c_0 = e^{c_1 t_0}$ (это показано в доказательстве теоремы 1), следуют неравенства

$$\begin{aligned} &\rho(y(t, t_0, y_0), M) \le \|y(t, t_0, y_0) - x(t, t_0, x_0)\| + \rho(x(t, t_0, x_0), M) \le \\ &\le \varepsilon e^{-c_1(t-t_0)} + c_0 e^{-c_1 t} = \varepsilon e^{-c_1(t-t_0)} + e^{c_1 t_0} e^{-c_1 t} = \\ &= (\varepsilon + 1) e^{-c_1(t-t_0)} \quad (t_0 \le t \le t_0 + s). \end{aligned} \tag{11}$$

Так как после замены t на $t + kT$ (k – любое целое число) решение включения (7) остается решением, то, взяв за начальные условия $y(t_0 + s)$, $y(t_0 + 2s), \ldots$ и применив (11), получим, что

$$\begin{aligned} &\rho(y(t, t_0 + (i-1)s, y(t_0 + (i-1)s)), M) \le (\varepsilon + 1)^i e^{-c_1(t-t_0)} \\ &(t_0 + (i-1)s \le t \le t_0 + is,\ i = 1, 2, \ldots). \end{aligned} \tag{12}$$

Из (8) следует, что для всякого $i = 1, 2, \ldots$ и соответствующего интервала $t_0 + (i-1)s \le t \le t_0 + is$ выполнены неравенства

$$\begin{aligned} &(1+\varepsilon)^i e^{-c_1(t-t_0)} = (1+\varepsilon)(1+\varepsilon)^{i-1} e^{-c_1(t-t_0)} \le \\ &\le (1+\varepsilon) e^{(c_1-\beta)s(i-1)} e^{-c_1(t-t_0)} \le \\ &\le (1+\varepsilon) e^{(c_1-\beta)(t-t_0)} e^{-c_1(t-t_0)} \le (1+\varepsilon) e^{-\beta(t-t_0)}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (12) следует оценка

$$\rho(y(t, t_0, y_0), M) \le (1+\varepsilon) e^{-\beta(t-t_0)} \quad (t \ge t_0, \quad \beta \in (0, c_1)),$$

что доказывает асимптотическую устойчивость множества M для включения (7). При $\varepsilon \to 0$ и $\beta \to c_1$ $(1+\varepsilon)e^{\beta t_0} \to e^{c_1 t_0} = c_0$ и оценка $\rho(y(t, t_0, y_0), M)$ сколь угодно мало отличается от оценки (5).

Теорема 2 доказана.

4. Пример

Рассмотрим пример, иллюстрирующий применение теоремы 2 и построение возмущенного включения. Рассмотрим периодическое однородное (первой степени) дифференциальное включение вида

$$\dot{x} \in F(t,x),$$
$$F(t,x) = \Big\{ y : y = (\lambda_1 a_1(t) + \lambda_2 a_2(t))x,\ \lambda_1 \geq 0,\ \lambda_2 \geq 0,\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \Big\}, \tag{13}$$

где $x, y \in \mathrm{R}$, $a_1(t)$, $a_2(t)$ – непрерывные периодические функции периода $T > 0$, $a_1(t) \geq a_2(t)$, при $t \in [0, \infty]$, с ограниченным асимптотически устойчивым множеством M. В частности, если $M = \{0\}$, то включение (13) имеет асимптотически устойчивое нулевое решение. Полагая $\eta = px > 0$ и $\delta = qx > 0$, построим возмущенное включение. Для простоты будем считать, что $x \geq 0$, тогда

$$F(t,x) = [a_1(t)x;\ a_2(t)x], \quad x^\eta = [x - \eta;\ x + \eta],$$
$$F(t, x^\eta) = [a_1(t)(x - \eta);\ a_2(t)(x + \eta)], \quad coF(t, x^\eta) \equiv F(t, x^\eta),$$
$$[coF(t,x^\eta)]^\delta = [a_1(t)(x - \eta) - \delta;\ a_2(t)(x + \eta) + \delta] =$$
$$= [(a_1(t)(1 - p) - q)x;\ (a_2(t)(1 + p) + q)x],$$

а возмущенное включение будет иметь вид

$$\dot{x} \in F_{pq}(t,x),$$
$$F_{pq}(t,x) = \Big\{ y : y = (\lambda_1(a_1(t)(1-p) - q) + \lambda_2(a_2(t)(1+p) + q))x,$$
$$\lambda_1 \geq 0,\ \lambda_2 \geq 0,\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \Big\}. \tag{14}$$

Включение (14), как и включение (13), является однородным и периодическим. В соответствии с теоремой 2 если ограниченное множество M асимптотически устойчиво для включения (13), то при достаточно малых p и q оно асимптотически устойчиво для включения (14). При этом постоянные c_0 и c_1 в оценке (5) для решений включения (14) можно взять сколь угодно мало отличающимися от значения этих постоянных для включения (13). Заметим, что вопрос об условиях существования для включения (13) ограниченного асимптотически устойчивого множества требует отдельного исследования.

5. Заключение

Доказано, что для однородного периодического включения ограниченное асимптотически устойчивое множество обладает свойством сохранения асимптотической устойчивости при малых возмущениях включения, не нарушающих его периодичности и однородности. Показано также, что коэффициенты в оценке экспоненциального вида для решений возмущенного включения сколь угодно мало отличаются от коэффициентов в оценке решений невозмущенного включения, если возмущения достаточно малы. Полученный результат может найти применение при изучении систем управления с периодическими параметрами, в частности систем с амплитудно-частотной модуляцией.

Дальнейшее исследование рассмотренного в данной статье включения может быть связано с распространением на него принципа отсутствия ограниченных решений, сформулированного в [3] для автономных включений (с возмущениями и без них), с получением условий слабой асимптотической и слабой экспоненциальной устойчивости. Представляет интерес также вопрос об условиях существования асимптотически устойчивого множества для частных случаев однородного периодического дифференциального включения, например при ограничениях на размерность вектора x и на параметры включения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Roxin E.* On Generalized Dynamical Systems Defined by Contingent Equations // J. Differ. Equat. 1965. V. 1. No. 2. P. 188–205.
2. *Kikuchi N.* On Some Fundamental Theorems of Contingent Equations in Connection with the Control Problems // Publ. RIMS. Kyoto Univ. Ser. A. 1967. V. 3. P. 840–844.
3. *Красносельский М.А., Покровский А.В.* Принцип отсутствия ограниченных решений в проблеме абсолютной устойчивости // ДАН СССР. 1977. Т. 233. № 3. С. 293–296.
4. *Благодатских В.И.* Теория дифференциальных включений. Ч. I. М.: Изд-во МГУ, 1979.
5. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.
6. *Молчанов А.П., Пятницкий Е.С.* Критерии устойчивости селекторно-линейных дифференциальных включений // Докл. АН СССР. 1987. Т. 297. № 1. С. 37–40.
7. *Молчанов А.П., Морозов М.В.* Алгоритмы анализа робастной устойчивости линейных нестационарных систем управления с периодическими ограничениями // АиТ. 1997. № 5. С. 100–111.

   Molchanov A.P., Morozov M.V. Algorithms for Robust Stability Analysis of Linear Time-Varying Control Systems with Periodic Constraints // Autom. Remote Control. 1997. V. 58. No. 5. Part 2. P. 795–804.
8. *Han Z., Cai X., Huang J.* Theory of Control Systems Described by Differential Inclusions. Springer, 2016.
9. *Благодатских В.И.* Некоторые результаты по теории дифференциальных включений (обзор) / Summer school on ordinary differential equations. Brno. 1975. С. 29–67.
10. *Aubin J.-P., Cellina A.* Differential inclusions. Paris: Univ. Paris IX Dauphine, 1983.
11. *Поволоцкий А.И., Ганго Е.А.* Существование периодических решений дифференциальных уравнений с многозначной правой частью // Республик. сб. тр. “Математический анализ и теория функций”. Вып. 8. М.: МОПИ им. Н.К. Крупской, 1977. С. 106–113.
12. *Ирисов А.Е., Тонкова В.С., Тонков Е.Л.* Периодические решения дифференциального включения // Сб. тр. “Нелинейные колебания и теория управления”. Вып. 2. Ижевск: Удмурт. гос. ун-т, 1978. С. 3–15.

13. *Macki J.W., Nistri P., Zecca P.* The Existence of Periodic Solutions to Non-Autonomous Differential Inclusions // Proc. Amer. Math. Soc. 1988. V. 104. No. 3. P. 840–844.
14. *Smirnov G.V.* Weak Asymptotic Stability at First Approximation for Periodic Differential Inclusions // Nonlinear differential equations and applications. 1995. V. 2. No. 4. P. 445–461.
15. *Gama R., Smirnov G.V.* Weak Exponential Stability for Time-Periodic Differential Inclusions via First Approximation Averaging // Set-valued and variational analysis. 2013. V. 21. Iss. 2. P. 191–200.
16. *Молчанов А.П., Морозов М.В.* Абсолютная устойчивость нелинейных нестационарных систем управления с периодической линейной частью // АиТ. 1992. № 2. С. 49–59.

    Molchanov A.P., Morozov M.V. Absolute Stability of Nonlinear Nonstationary Control Systems with Periodic Linear Sections // Autom. Remote Control. 1992. V. 53. No. 2. Part 1. P. 189–198.
17. *Молчанов А.П., Морозов М.В.* Функции Ляпунова для нелинейных нестационарных дискретных систем управления с периодической линейной частью // АиТ. 1992. № 10. С. 37–45.

    Molchanov A.P., Morozov M.V. Lyapunov Functions for Nonlinear Nonstationary Discrete Control Systems with a Periodic Linear Part // Autom. Remote Control. 1992. V. 53. No. 10. Part 1. P. 1505–1513.
18. *Морозов М.В.* Критерии робастной абсолютной устойчивости дискретных систем управления с периодическими ограничениями // Тр. ИСА РАН. 2014. Т. 64. Вып. 2. С. 13–18.
19. *Молчанов А.П., Морозов М.В.* Достаточные условия робастной устойчивости линейных нестационарных систем управления с периодическими интервальными ограничениями // АиТ. 1997. № 1. С. 100–107.

    Molchanov A.P., Morozov M.V. Sufficient Conditions for Robust Stability of Linear Nonstationary Control Systems with Periodic Interval Constraints // Autom. Remote Control. 1997. V. 58. No. 1. Part 2. P. 82–87.
20. *Шильман С.В.* Метод производящих функций в теории динамических систем. М.: Наука, 1978.
21. *Морозов М.В.* О свойствах периодических дифференциальных включений // Диф. уравн. 2000. Т. 36. № 5. С. 612–617.
22. *Морозов М.В.* О свойствах решений периодических по времени дифференциальных включений с асимптотически устойчивыми множествами // Тр. ИСА РАН. 2017. Т. 67. Вып. 3. С. 13–19.
23. *Морозов М.В.* Оценка решений периодического однородного дифференциального включения с асимптотически устойчивым множеством // Тр. ИСА РАН. 2018. Т. 68. Вып. 4. С. 101–103.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.Г. Кушнером.

Поступила в редакцию 10.04.2018

После доработки 30.10.2018

Принята к публикации 08.11.2018