Автоматика и телемеханика, № 5, 2019

Стохастические системы

© 2019 г. **В.И. ВОРОТНИКОВ, д-р физ.-мат. наук (vorotnikov-vi@rambler.ru)**
(Уральский федеральный университет, Екатеринбург),
Ю.Г. МАРТЫШЕНКО, канд. физ.-мат. наук (j-mart@mail.ru)
(Российский государственный университет нефти и газа, Москва)

К ЗАДАЧЕ ЧАСТИЧНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ВЕРОЯТНОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Рассматривается общий класс нелинейных нестационарных систем стохастических дифференциальных уравнений в форме Ито. Изучаются две задачи частичной устойчивости по вероятности: 1) устойчивости по части переменных нулевого положения равновесия; 2) устойчивости по части переменных «частичного» (нулевого) положения равновесия. Получены условия частичной устойчивости по вероятности в контексте стохастического варианта метода функций Ляпунова. Наряду с основной функцией Ляпунова рассматривается дополнительная (векторная, вообще говоря) вспомогательная функция для корректировки области, в которой строится основная функция Ляпунова. Дается сравнение с известными результатами по частичной устойчивости систем стохастических дифференциальных уравнений. Рассмотрен пример, иллюстрирующий особенности предложенного подхода. Также рассматривается вопрос унификации исследований частичной устойчивости стационарных и нестационарных систем стохастических дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: системы стохастических дифференциальных уравнений Ито, частичная устойчивость по вероятности, метод функций Ляпунова.

DOI: 10.1134/S0005231019050052

1. Введение

Системы стохастических дифференциальных уравнений широко применяются при математическом моделировании процессов, подверженных воздействию различных случайных факторов [1–3].

Разработка подходов к исследованию устойчивости систем стохастических дифференциальных уравнений началась во второй половине XX столетия. Конструктивной оказалась идея И.Я. Каца и Н.Н. Красовского [4] использования усредненной производной V-функции, предложенная для изучения систем стохастических дифференциальных уравнений вида $\mathbf{x}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \eta(t))$, где $\eta(t)$ — однородная марковская цепь с конечным числом состояний. В этом случае для вычисления производной V-функции достаточно знать лишь правые части системы и вероятностные характеристики случайного процесса.

Предложенный подход в значительной степени предопределил последующие исследования устойчивости систем стохастических дифференциальных уравнений в форме Ито [1, 2], решения которых являются непрерывными марковскими процессами. Более того, оказалось возможным исследование устойчивости и более общих систем стохастических дифференциальных уравнений, совмещающих свойства систем указанных типов, включая системы, где в момент скачкообразного изменения марковской цепи $\eta(t)$ решение также может меняться скачком (случайным или неслучайным образом) [5, 6].

В данной статье рассматривается нелинейная нестационарная система стохастических дифференциальных уравнений в форме Ито общего вида. Сначала рассматривается случай, когда система допускает нулевое положение равновесия. Устойчивость данного положения равновесия анализируется по отношению не ко всем фазовым переменным, определяющим состояние системы, а только по их заданной части. При этом делается допущение о том, что начальные возмущения «неконтролируемых» переменных, устойчивость по которым не анализируется, могут быть большими (принадлежащими произвольному компактному множеству) по одной их части и произвольными по оставшейся части. Затем рассматривается система, допускающая «частичное» (по некоторой части переменных) нулевое положение равновесия; «полного» положения равновесия при этом может и не существовать. Устойчивость данного «частичного» положения равновесия в свою очередь анализируется также по отношению не ко всем определяющим его переменным, а только по их заданной части. При этом делается допущение о том, что начальные значения переменных, не определяющих «частичное» положение равновесия, могут быть большими по одной части и произвольными по оставшейся части этих переменных.

Ранее такие задачи рассматривались для детерминированных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с непрерывной правой частью [7–10], функционально-дифференциальных систем с последействием [11], а также для дискретных (конечно-разностных) систем [12, 13].

Для решения поставленных задач частичной устойчивости применяется стохастический вариант метода функций Ляпунова в соответствующей модификации. Получены условия частичной устойчивости указанного вида, обобщающие известные результаты по частичной устойчивости систем стохастических дифференциальных уравнений [14–21]. В отличие от указанных работ наряду с основной функцией Ляпунова рассматривается дополнительная (векторная, вообще говоря) вспомогательная функция для корректировки области, в которой строится основная функция Ляпунова.

Общий обзор задач частичной устойчивости (стабилизации) динамических систем, область приложений которых в последние годы расширяется, можно найти в [10, 22, 23]. Для случая детерминированных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с непрерывной правой частью основополагающие результаты получены В.В. Румянцевым [24].

Теория устойчивости систем стохастических дифференциальных уравнений возникла [1, 2] в связи с потребностями теории управляемых систем и, в частности, в связи с решением задач стабилизации (по всем переменным) управляемых систем при случайных воздействиях. Однако в последние годы все чаще рассматриваются задачи частичной (по части переменных) стабилизации нелинейных управляемых систем [10, 23], определяющие возможные приложения полученных в статье результатов.

2. Постановка задачи

Рассмотрим линейное действительное конечномерное пространство векторов $\mathbf{x}$ с стандартной евклидовой нормой $\|\mathbf{x}\|$. Введем разбиение $\mathbf{x} = (\mathbf{y}^{\mathrm{T}}, \mathbf{z}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ (Т — обозначает транспонирование).

Пусть дана система нелинейных нестационарных стохастических дифференциальных уравнений в форме Ито [1–3]

$$d\mathbf{x} = \mathbf{X}(t, \mathbf{x})dt + \sum_{k=1}^{r} \boldsymbol{\sigma}_k(t, \mathbf{x})dw_k(t),$$

которую с учетом сделанного разбиения $\mathbf{x} = (\mathbf{y}^{\mathrm{T}}, \mathbf{z}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ представим в виде двух групп дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} d\mathbf{y} &= \mathbf{Y}(t, \mathbf{y}, \mathbf{z})dt + \sum_{k=1}^{r} \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{y}k}(t, \mathbf{y}, \mathbf{z})dw_k(t), \\ d\mathbf{z} &= \mathbf{Z}(t, \mathbf{y}, \mathbf{z})dt + \sum_{k=1}^{r} \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{z}k}(t, \mathbf{y}, \mathbf{z})dw_k(t). \end{aligned} \tag{1}$$

Вектор-функции $\mathbf{X} = (\mathbf{Y}^{\mathrm{T}}, \mathbf{Z}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\sigma}_k = (\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{y}k}^{\mathbf{T}}, \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{z}k}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$, определяющие правые части системы (1), непрерывны по t, $\mathbf{x}$ в области $t \geq 0$, $\|\mathbf{x}\| < \infty$; w_k — независимые одномерные винеровские процессы.

Если выполняются условия $\mathbf{X}(t, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\sigma}_k(t, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$, то система (1) допускает нулевое положение равновесия $\mathbf{x} = (\mathbf{y}^{\mathrm{T}}, \mathbf{z}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \mathbf{0}$.

Считаем также, что вектор-функции $\mathbf{X}$, $\boldsymbol{\sigma}_k$ равномерно по t удовлетворяют локальным условиям Коши – Липшица. Это значит, что для всякого числа $h > 0$ существует постоянная $K(h) > 0$ такая, что при $t \geq t_0$, $\|\mathbf{x}\| \leq h$ имеют место неравенства

$$\|\mathbf{X}(t, \mathbf{x}') - \mathbf{X}(t, \mathbf{x}'')\| \leq K\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}''\|, \quad \|\boldsymbol{\sigma}_k(t, \mathbf{x}') - \boldsymbol{\sigma}_k(t, \mathbf{x}'')\| \leq K\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}''\|.$$

Тогда для любых $t_0 \geq 0$, $\mathbf{x}_0$ существует [1–3] единственный непрерывный почти наверное марковский процесс $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ с феллеровской переходной функцией, являющийся решением системы стохастических дифференциальных уравнений (1). Данный процесс (решение) рассматривается на вероятностном пространстве [1–3] с вероятностной мерой $\mathbf{P}$.

Продолжимость при всех $t \geq t_0$ указанных решений гарантируют условия «линейного роста»

$$\|\mathbf{X}(t, \mathbf{x})\| \leq M(1 + \|\mathbf{x}\|), \quad \|\boldsymbol{\sigma}_k(t, \mathbf{x})\| \leq M(1 + \|\mathbf{x}\|),$$

выполняющиеся при $t \geq t_0$, $\|\mathbf{x}\| < \infty$, $M = \mathrm{const} > 0$. Эти условия можно заменить на более слабые условия, которые определяются соответствующими требованиями к некоторым вспомогательным функциям Ляпунова [1–3].

Представим компоненту $\mathbf{z}$ вектора $\mathbf{x}$ в виде $\mathbf{z} = (\mathbf{z}_1^{\mathrm{T}}, \mathbf{z}_2^{\mathrm{T}})$ и обозначим через D_δ область значений $\mathbf{x}_0$ таких, что $\|\mathbf{y}_0\| < \delta$, $\|\mathbf{z}_{10}\| \le L$, $\|\mathbf{z}_{20}\| < \infty$.

Определение 1. Положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (1) *при больших значениях $\mathbf{z}_{10}$ в целом по $\mathbf{z}_{20}$* (*for a large $\mathbf{z}_{10}$ in the whole of $\mathbf{z}_{20}$*):

1) $\mathbf{y}$*-устойчиво по вероятности* (*устойчиво по вероятности по отношению к* $\mathbf{y}$), *если для каждого $t_0 \ge 0$ и для любых сколь угодно малых чисел $\varepsilon > 0$, $\gamma > 0$, а также для любого наперед заданного числа $L > 0$ найдется число $\delta(\varepsilon, \gamma, L, t_0) > 0$ такое, что неравенство*

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t \ge t_0} \|\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| > \varepsilon\right\} < \gamma \tag{2}$$

выполняется для всех $t \ge t_0$ и $\mathbf{x}_0 \in D_\delta$;

2) *равномерно* $\mathbf{y}$*-устойчиво, если $\delta = \delta(\varepsilon, \gamma, L)$.*

Если выполняются условия $\mathbf{Y}(t, \mathbf{0}, \mathbf{z}) \equiv \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{y}k}(t, \mathbf{0}, \mathbf{z}) \equiv \mathbf{0}$, то множество $M = \{\mathbf{x} : \mathbf{y} = \mathbf{0}\}$ является «частичным» положением равновесия системы (1). (Нулевого положения равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ может при этом и не существовать.) Имея в виду анализ устойчивости положения равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ по отношению не ко всем определяющим его переменным, а только по их некоторой части, предположим также, что $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_1^{\mathrm{T}}, \mathbf{y}_2^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$.

Определение 2. «Частичное» положение равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ системы (1) *при больших значениях $\mathbf{z}_{10}$ в целом по $\mathbf{z}_{20}$*:

1) $\mathbf{y}_1$*-устойчиво по вероятности* (*устойчиво по вероятности по отношению к* $\mathbf{y}_1$), *если для каждого $t_0 \ge 0$ и для любых сколь угодно малых чисел $\varepsilon > 0$, $\gamma > 0$, а также для любого наперед заданного числа $L > 0$ найдется число $\delta(\varepsilon, \gamma, L, t_0) > 0$ такое, что*

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t \ge t_0} \|\mathbf{y}_1(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| > \varepsilon\right\} < \gamma \tag{3}$$

для всех $t \ge t_0$ и $\mathbf{x}_0 \in D_\delta$;

2) *равномерно* $\mathbf{y}_1$*-устойчиво, если $\delta = \delta(\varepsilon, \gamma, L)$.*

Замечание 1. В определениях 1, 2 значение $\mathbf{x}_0$ предполагается детерминированным. Однако можно показать [3], что если $\mathbf{x}_0$ — случайная величина и включение $\mathbf{x}_0 \in D_\delta$ выполняется почти наверное (с вероятностью 1), то получаем определения, эквивалентные введенным определениям частичной устойчивости.

Замечание 2. Рассмотренное в [14–19] понятие $\mathbf{y}$-устойчивости по вероятности положения равновесия $\mathbf{x} = 0$ системы (1) предполагает, что $\|\mathbf{x}_0\| < \delta$. Понятие устойчивости ($\mathbf{y}$-устойчивости) по вероятности «частичного» положения равновесия $\mathbf{y} = 0$ предполагает [20, 21], что $\|\mathbf{y}_0\| < \delta$, $\|\mathbf{z}_0\| < \infty$, где δ может зависеть не только от ε, γ, t_0, но и от $\mathbf{z}_0$ (это условие эквивалентно условиям $\|\mathbf{y}_0\| < \delta$, $\|\mathbf{z}_0\| \le L$, где δ зависит не только от ε, γ, t_0, но и от L). Поскольку в введенных определениях 1, 2 имеет место включение $\mathbf{x}_0 \in D_\delta$, то данные определения устойчивости более общие.

З а м е ч а н и е 3. Несмотря на определенное формально-математическое сходство рассматриваемых двух задач частичной устойчивости, имеется их существенное фактическое различие [10]. Это обстоятельство оправдывает отдельное рассмотрение данных задач. Кроме того, будет показано, что рассмотрение задачи устойчивости по части переменных «частичного» положения равновесия позволяет унифицировать исследования частичной устойчивости стационарных и нестационарных систем стохастических дифференциальных уравнений Ито.

3. Условия частичной устойчивости по вероятности

3.1. Условия $\mathbf{y}$*-устойчивости положения равновесия* $\mathbf{x} = 0$

Введем вспомогательные V-функции Ляпунова, $V(t, \mathbf{0}) \equiv 0$, непрерывные и дважды непрерывно дифференцируемые по $\mathbf{x}$ и один раз по t в области $G = \{t \geq 0, \|\mathbf{y}\| < h, \|\mathbf{z}\| < \infty\}$.

Обозначим через $\mathbf{L}$ дифференциальный производящий оператор, ассоциированный с системой стохастических дифференциальных уравнений (1) ($<, >$ – знак скалярного произведения векторов) [1–3],

$$\mathbf{L} = \frac{\partial}{\partial t} + \left\langle \mathbf{X}(t, \mathbf{x}), \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right\rangle + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{r} \left(\left\langle \boldsymbol{\sigma}_k^{\mathrm{T}}(t, \mathbf{x}), \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right\rangle \right)^2 =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} X_i(t, \mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t, \mathbf{x}) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j},$$

$$\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^{\mathrm{T}} = \left(\mathbf{Y}^{\mathrm{T}}, \mathbf{Z}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{\sigma}_k = \left(\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{y}k}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{z}k}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\sigma} = (\boldsymbol{\sigma}_1, \ldots, \boldsymbol{\sigma}_r), \quad \{a_{ij}(t, \mathbf{x})\} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}.$$

При действии оператора $\mathbf{L}$ на V-функцию ее образ $\mathbf{L}V$ является стохастическим аналогом производной V-функции в силу детерминированной системы дифференциальных уравнений.

Для нахождения условий частичной устойчивости также рассмотрим:

1) вспомогательные скалярные функции $V^*(t, \mathbf{y}, \mathbf{z}_1)$, $V^*(\mathbf{y}, \mathbf{z}_1)$ и вектор-функцию $\boldsymbol{\mu}(t, \mathbf{x})$, непрерывные в области G;

2) непрерывную монотонно возрастающую по $r > 0$ скалярную функцию $a(r)$, $a(0) = 0$ (функцию типа Хана [22]).

Т е о р е м а 1. Допустим, что для системы стохастических дифференциальных уравнений (5)*, наряду со скалярной* V*-функцией, можно указать векторную функцию* $\boldsymbol{\mu}(t, \mathbf{x})$*,* $\boldsymbol{\mu}(t, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$ *такие, что в области*

$$(4) \qquad t \geq 0, \quad \|\mathbf{y}\| + \|\boldsymbol{\mu}(t, \mathbf{x})\| < h_1 < h, \quad \|\mathbf{z}\| < \infty$$

выполняются условия:

$$(5) \qquad V(t, \mathbf{x}) \geq a(\|\mathbf{y}\| + \|\boldsymbol{\mu}(t, \mathbf{x})\|);$$

$$(6) \qquad V(t, \mathbf{x}) \leq V^*(t, \mathbf{y}, \mathbf{z}_1), \quad V^*(t, \mathbf{0}, \mathbf{z}_1) \equiv 0;$$

$$(7) \qquad \mathbf{L}V(t, \mathbf{x}) \leq 0.$$

Тогда положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *системы* (1) $\mathbf{y}$*-устойчиво по вероятности при больших значениях* $\mathbf{z}_{10}$ *в целом по* $\mathbf{z}_{20}$.

Если условия (6) *теоремы 1 заменить условиями*

$$V(t, \mathbf{x}) \leq V^*(\mathbf{y}, \mathbf{z}_1), \quad V^*(\mathbf{0}, \mathbf{z}_1) \equiv 0, \tag{8}$$

то положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *системы* (1) *равномерно* $\mathbf{y}$*-устойчиво по вероятности при больших значениях* $\mathbf{z}_{10}$ *в целом по* $\mathbf{z}_{20}$.

Доказательство теоремы 1 дано в Приложении.

Замечание 4. В теореме 1 вспомогательная V-функция, а также функция $\mathbf{L}V$, являющаяся образом V-функции при действии на нее дифференциального производящего оператора $\mathbf{L}$, ассоциированного с системой (1), могут быть *знакопеременными* в области

$$t \geq 0, \quad \|\mathbf{y}\| < h_1 < h, \quad \|\mathbf{z}\| < \infty, \tag{9}$$

которая обычно рассматривается [14–19] при анализе $\mathbf{y}$-устойчивости.

Замечание 5. В рамках предложенного подхода нелинейные V-функции могут быть построены как квадратичные формы $V(t, \mathbf{x}) \equiv V^*(t, \mathbf{y}, \boldsymbol{\mu}(t, \mathbf{x}))$ переменных $\mathbf{y}$, $\boldsymbol{\mu}$, знакоопределенные по всем переменным (но имеющие знакопеременные в области (9) функции $\mathbf{L}V$).

Замечание 6. Сформулированные результаты являются обобщением соответствующих результатов, полученных в [1–4, 14–19]. Для сравнения устойчивость по отношению ко всем переменным положения равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы стохастических дифференциальных уравнений (1) рассмотрена в [1–4]. Условия устойчивости по части переменных ($\mathbf{y}$-устойчивости) положения равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (1) получены в [14–19] с помощью одной V-функции (условие $\boldsymbol{\mu}(t, \mathbf{x}) \equiv \mathbf{0}$), рассматриваемой в области (9), при предположении $\|\mathbf{x}_0\| < \delta$. Поскольку в теореме 1 вспомогательная V-функция, а также функция $\mathbf{L}V$ могут быть знакопеременными в области (9), то полученные результаты являются более общими. Они основаны на использовании двух вспомогательных функций Ляпунова: наряду с основной V-функцией для наиболее рациональной замены области (9) областью (4) вводится дополнительная вспомогательная $\boldsymbol{\mu}$-функция.

Замечание 7. В случае $\boldsymbol{\mu}(t, \mathbf{x}) \equiv \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\sigma}_k(t, \mathbf{x}) \equiv \mathbf{0}$, $\|\mathbf{x}_0\| < \delta$ при выполнении условий (5), (7) имеем классическую теорему В.В. Румянцева [24], а в случае $\boldsymbol{\delta}_k(t, \mathbf{x}) \equiv \mathbf{0}$, $\|\mathbf{x}_0\| < \delta$ получаем теорему из [25]. В случае $\boldsymbol{\mu}_k(t, \mathbf{x}) \equiv \mathbf{0}$ теорема 1 переходит в соответствующую теорему из [9].

Замечание 8. Устойчивость по части переменных нулевого положения равновесия систем стохастических дифференциальных уравнений с разрывными решениями рассмотрена в [26, 27] с помощью одной функции Ляпунова.

3.2. Условия $\mathbf{y}_1$*-устойчивости «частичного» положения равновесия* $\mathbf{y} = \mathbf{0}$

Введем вспомогательные V-функции, $V(t, \mathbf{0}) \equiv 0$, являющиеся в области $G_1 = \{t \geq 0, \|\mathbf{y}_1\| < h, \|\mathbf{y}_2\| + \|\mathbf{z}\| < \infty\}$ непрерывными и дважды непрерывно дифференцируемыми по $\mathbf{x}$ и один раз по t. Функции $V^*(t, \mathbf{y}, \mathbf{z}_1)$, $V^*(\mathbf{y}, \mathbf{z}_1)$ и вектор-функцию $\boldsymbol{\mu}(t, \mathbf{x})$ считаем непрерывными в области G_1.

Т е о р е м а 2. *Допустим, что для системы* (1), *наряду со скалярной* V*-функцией, можно указать векторную функцию* $\boldsymbol{\mu}(t, \mathbf{x})$, $\boldsymbol{\mu}(t, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$ *такие, что в области*

$$(10) \qquad t \geq 0, \quad \|\mathbf{y}_1\| + \|\boldsymbol{\mu}(t, \mathbf{x})\| < h_1 < h, \quad \|\mathbf{y}_2\| + \|\mathbf{z}\| < \infty,$$

наряду с условиями (6), (7), *также выполняется условие*

$$(11) \qquad V(t, \mathbf{x}) \geq a(\|\mathbf{y}_1\| + \|\boldsymbol{\mu}(t, \mathbf{x})\|).$$

Тогда «частичное» положение равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ *системы* (1) $\mathbf{y}_1$*-устойчиво по вероятности при больших значениях* $\mathbf{z}_{10}$ *в целом по* $\mathbf{z}_{20}$.

Если условия (6) *заменить условиями* (8), *то «частичное» положение равновесия* $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ *системы* (1) *равномерно* $\mathbf{y}_1$*-устойчиво по вероятности при больших значениях* $\mathbf{z}_{10}$ *в целом по* $\mathbf{z}_{20}$.

Доказательство теоремы 2 также дано в Приложении.

З а м е ч а н и е 9. В [20, 21] с помощью одной V-функции рассмотрена устойчивость по всем переменным ($\mathbf{y}$-устойчивость) «частичного» положения равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ системы (1) при предположении $\|\mathbf{y}_0\| < \delta$, $\|\mathbf{z}_0\| < \infty$, где δ может зависеть не только от ε, γ, t_0, но и от $\mathbf{z}_0$ (как уже отмечалось, это условие эквивалентно условиям $\|\mathbf{y}_0\| < \delta$, $\|\mathbf{z}_0\| \leq L$, где δ зависит не только от ε, γ, t_0, но и от L). При этом V-функция, а также функция $\mathbf{L}V$ предполагаются знакоопределенными в области (9). В то же время в теореме 2 вспомогательная V-функция, а также функция $\mathbf{L}V$ могут быть *знакопеременными* в области $t \geq 0$, $\|\mathbf{y}_1\| < h_1 < h$, $\|\mathbf{y}_2\| + \|\mathbf{z}\| < \infty$ или в области (9) в случае $\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}$.

Кроме того, условия (6) и (8) являются «промежуточными» по отношению к условиям $V(t, \mathbf{0}, \mathbf{z}) \equiv 0$ и $V \leq V^*(\mathbf{y})$ в [20, 21], что можно использовать для поиска компромисса между содержательным смыслом понятия частичной устойчивости и соответствующими требованиями к функциям Ляпунова.

З а м е ч а н и е 10. В случае $\boldsymbol{\sigma}_k(t, \mathbf{x}) \equiv \mathbf{0}$ теорема 1 переходит в соответствующую теорему из [9].

4. Пример

Пусть система (1) состоит из уравнений

$$(12) \qquad \begin{gathered} dy_1 = y_1(-1 + z_1 \sin z_2)dt + 0{,}1 y_1 dw_1, \\ dz_1 = -z_1[1 + \sin(t y_1) \cos z_2]dt + 0{,}2 z_1 dw_2, \\ dz_2 = [\sin(t y_1) \sin z_2]dt. \end{gathered}$$

Рассмотрим две вспомогательные функции

$$(13) \qquad V = \frac{1}{2} y_1^2 \left(1 + z_1^2 \sin^2 z_2\right), \quad \mu_1 = z_1 \sin z_2,$$

для которых выполняются условия

$$V = \frac{1}{2} y_1^2 \left(1 + \mu_1^2\right) \leq V^*(y_1, z_1) = \frac{1}{2} y_1^2 (1 + z_1^2), \quad V^*(0, z_1) \equiv 0,$$

причем нелинейная по фазовым переменным V-функция является квадратичной формой переменных y_1 и μ_1.

В данном случае имеют место соотношения

$$\boldsymbol{\sigma}_k = (\sigma_{k1}, \sigma_{k2}, \sigma_{k3})^{\mathrm{T}} \quad (k = 1, 2);$$
$$\sigma_{11} = 0{,}1 y_1; \quad \sigma_{22} = 0{,}2 z_1; \quad \sigma_{33} = 0; \quad \sigma_{ij} = 0 \quad (i \neq j);$$
$$\sum_{k=1}^{2} \left(\left\langle \boldsymbol{\sigma}_k^{\mathrm{T}}(t, \mathbf{x}), \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right\rangle \right)^2 V = \sigma_{11}^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y_1^2} + \sigma_{22}^2 \frac{\partial^2 V}{\partial z_1^2} = 0{,}01 y_1^2 + 0{,}04 \mu_1^2.$$

Для V-функции (13) вдоль траекторий системы (12) в области (4) получаем следующие оценки:

$$\mathbf{L}V = -y_1^2 - \mu_1^2 + y_2^2 \mu_1 +$$
$$+ 0{,}005 y_1^2 + 0{,}02 \mu_1^2 \leq -l(y_1^2 + \mu_1^2) \leq 0, \quad l = \text{const} > 0.$$

На основании теоремы 1 положение равновесия $y_1 = z_1 = z_2 = 0$ системы (12) равномерно y_1-устойчиво по вероятности при большом z_{10} в целом по z_{20}.

Отметим, что функция $\mathbf{L}V$, являющаяся образом V-функции (13) при действии на нее дифференциального производящего оператора $\mathbf{L}$, ассоциированного с системой (12), знакопеременна в области (9).

5. К унификации исследований частичной устойчивости

Вводя обозначения $u = t$, $\tau = t - t_0$, нестационарную систему стохастических дифференциальных уравнений (1) представим в виде стационарной системы стохастических дифференциальных уравнений [20, 21]

$$d\mathbf{x}(\tau) = \mathbf{X}(\mathbf{x}(\tau), u(\tau)) d\tau + \sum_{k=1}^{r} \boldsymbol{\sigma}_k(\mathbf{x}(\tau), u(\tau)) dw_k(\tau), \tag{14}$$
$$du(\tau) = d\tau.$$

Заметим, что решение $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$, $t \geq t_0$ нестационарной системы (1) эквивалентно определяется решением $\mathbf{x}(\tau; 0, \mathbf{x}_0)$, $\tau \geq 0$ стационарной системы стохастических дифференциальных уравнений (14).

Если система (1) допускает положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, то система (14) допускает «частичное» положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. В результате как задача устойчивости по части переменных нулевого положения равновесия, так и задача устойчивости по части переменных «частичного» положения равновесия нестационарной системы стохастических дифференциальных уравнений (1) сводятся к задаче устойчивости по части переменных «частичного» положения равновесия стационарной системы стохастических дифференциальных уравнений (14). А именно, задача $\mathbf{y}$-устойчивости положения равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (1) сводится к задаче $\mathbf{y}$-устойчивости «частичного» положения равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (14), а задача $\mathbf{y}_1$-устойчивости «частичного» положения равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ системы (1) сводится к задаче $\mathbf{y}_1$-устойчивости «частичного» положения равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ системы (14).

Особенность такого сведения в том, что в случае равномерной (или неравномерной) по t_0 частичной устойчивости исходной системы (1) постановки обеих задач частичной устойчивости для системы (14) должны отвечать требованию «в целом по u_0» (или «при большом u_0»). Поскольку при этом постановки обеих задач частичной устойчивости для системы (14) допускают как требование «в целом по $\mathbf{z}_0$», так и требование «при большом $\mathbf{z}_0$», то в результате приходим к необходимости анализа задачи устойчивости по части переменных «частичного» положения равновесия, рассмотренной в разделе 2.

Отметим, что ранее обсуждались вопросы:

1) унификации исследований в задачах устойчивости по всем переменным нестационарных систем стохастических дифференциальных уравнений и задачах частичной устойчивости стационарных систем стохастических дифференциальных уравнений [20, 21];

2) унификации исследований частичной устойчивости стационарных и нестационарных детерминированных систем обыкновенных дифференциальных уравнений (непрерывных и дискретных) [9, 12].

6. Заключение

Для нелинейных нестационарных систем стохастических дифференциальных уравнений Ито получены условия частичной устойчивости по вероятности для двух задач: 1) устойчивости по части переменных нулевого положения равновесия; 2) устойчивости по части переменных «частичного» (нулевого) положения равновесия. При этом вводятся более общие в сравнении с известными определения частичной устойчивости.

Использован стохастический вариант метода функций Ляпунова в соответствующей модификации. А именно, в отличие от ранее выполненных работ по частичной устойчивости систем стохастических дифференциальных уравнений наряду с основной функцией Ляпунова рассматривается дополнительная (векторная, вообще говоря) вспомогательная функция для корректировки области, в которой строится основная функция Ляпунова.

Целесообразность такого подхода заключается в том, что в результате основная V-функция Ляпунова, а также функция $\mathbf{L}V$, являющаяся образом V-функции при действии на нее дифференциального производящего оператора $\mathbf{L}$, ассоциированного с изучаемой системой, могут быть знакопеременными в обычно рассматриваемой при изучении частичной устойчивости области фазового пространства системы. Кроме того, появляется возможность построения основной функции Ляпунова в виде квадратичной формы новых переменных, включающих переменные, устойчивость по которым исследуется, и компоненты вспомогательной функции. Рассмотрен пример, иллюстрирующий особенности указанного подхода.

Показано, что на базе задачи устойчивости по части переменных «частичного» положения равновесия возможна унификация исследований частичной устойчивости стационарных и нестационарных систем стохастических дифференциальных уравнений.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Возьмем произвольное ε $(0 < \varepsilon < h_1)$, произвольный момент времени t_0, а также начальную точку $\mathbf{x}_0$ из области $D_\varepsilon = \{\|\mathbf{y}_0\| < \varepsilon, \|\mathbf{z}_{10}\| \le L, \|\mathbf{z}_{20}\| < \infty\}$. Рассмотрим решение $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ $(t \ge t_0)$ системы (1) и обозначим через τ_ε момент первого достижения процессом $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ поверхности $\|\mathbf{y}\| = \varepsilon$. Если некоторые траектории этого процесса ни за какое конечное время не достигают поверхности $\|\mathbf{y}\| = \varepsilon$, то для них τ_ε считаем равным ∞. Положим $\tau_\varepsilon(t) = \min(\tau_\varepsilon, t)$.

На основании теории марковских процессов [1] имеем равенство ($\mathbf{E}$ — знак математического ожидания)

$$\begin{gathered}\mathbf{E}\left[V(\tau_\varepsilon(t), \mathbf{x}(\tau_\varepsilon(t); t_0, \mathbf{x}_0)) - V(t_0, \mathbf{x}_0)\right] = \\ = \mathbf{E} \int\limits_{t_0}^{\tau_\varepsilon(t)} \mathbf{L}V(s, \mathbf{x}(s; t_0, \mathbf{x}_0))ds.\end{gathered} \tag{П.1}$$

Поэтому из равенства (П.1) в силу условия (6) следует, что

$$\mathbf{E}[V(\tau_\varepsilon(t), \mathbf{x}(\tau_\varepsilon(t); t_0, \mathbf{x}_0))] \le V(t_0, \mathbf{x}_0). \tag{П.2}$$

Если справедливо неравенство $t > \tau_\varepsilon$ (в этом случае имеем $\tau_\varepsilon(t) = \tau_\varepsilon$), то выполняются соотношения $\|\mathbf{y}(\tau_\varepsilon(t); t_0, \mathbf{x}_0)\| = \|\mathbf{y}(\tau_\varepsilon; t_0, \mathbf{x}_0)\| = \varepsilon$. Если же справедливо неравенство $t < \tau_\varepsilon$ (в этом случае имеем $\tau_\varepsilon(t) = t$), то на основании неравенства Чебышева и оценки (П.2) находим

$$\begin{gathered}\mathbf{P}[\|\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| > \varepsilon] \le a^{-1}(\varepsilon)\mathbf{E}[a(\|\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\|)] \le \\ \le a^{-1}(\varepsilon)\mathbf{E}[a(\|\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| + \|\boldsymbol{\mu}(t, \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0))\|)] \le \\ \le a^{-1}(\varepsilon)\mathbf{E}[V(t, \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0))] = \\ = a^{-1}(\varepsilon)\mathbf{E}[V(\tau_\varepsilon(t), \mathbf{x}(\tau_\varepsilon(t); t_0, \mathbf{x}_0))] \le a^{-1}(\varepsilon)V(t_0, \mathbf{x}_0).\end{gathered} \tag{П.3}$$

Поскольку функция $V(t, \mathbf{x})$ непрерывна, $V(t, \mathbf{0}) \equiv 0$, а также выполняются условия (6), то для всех $t_0 \ge 0$ и для любого заданного числа $L > 0$ предельное соотношение

$$\lim_{\mathbf{y}_0 \to 0} V(t_0, \mathbf{x}_0) = 0 \tag{П.4}$$

выполняется при $\|\mathbf{z}_{10}\| \le L$ равномерно по $\|\mathbf{z}_{20}\| < \infty$.

Поэтому для всех $t_0 \leq 0$ и для любого заданного числа $L > 0$ на основании неравенств (П.3), (П.4) имеем предельное соотношение

$$\lim_{\mathbf{y}_0 \to 0} \mathbf{P} \left[\lim_{t > t_0} \|\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| > \varepsilon \right] = 0,$$

выполняющееся при $\|\mathbf{z}_{10}\| \leq L$ равномерно по $\|\mathbf{z}_{20}\| < \infty$.

В результате для каждого $t_0 \geq 0$ и для любых сколь угодно малых чисел $\varepsilon > 0$, $\gamma > 0$, а также для любого наперед заданного числа $L > 0$ найдется число $\delta(\varepsilon, \gamma, L, t_0) > 0$ такое, что неравенство (2) имеет место для всех $t \geq t_0$ и $\mathbf{x}_0 \in D_\delta$. Следовательно, при больших значениях $\mathbf{z}_{10}$ в целом по $\mathbf{z}_{20}$ положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (1) $\mathbf{y}$-устойчиво по вероятности. Первая часть теоремы 1 доказана.

При выполнении условий (8) для любого заданного числа $L > 0$ предельное соотношение (П.4) выполняется при $\|\mathbf{z}_{10}\| \leq L$ равномерно не только по $\|\mathbf{z}_{20}\| < \infty$, но и по $t_0 \geq 0$. В результате для каждого $t_0 \geq 0$ и для любых сколь угодно малых чисел $\varepsilon > 0$, $\gamma > 0$, а также для любого наперед заданного числа $L > 0$ найдется не зависимое от t_0 число $\delta(\varepsilon, \gamma, L) > 0$ такое, что неравенство (2) имеет место для всех $t \geq t_0$ и $\mathbf{x}_0 \in D_\delta$. Следовательно, при больших значениях $\mathbf{z}_{10}$ в целом по $\mathbf{z}_{20}$ положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (1) равномерно $\mathbf{y}$-устойчиво по вероятности. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Возьмем произвольное ε $(0 < \varepsilon < h_1)$, произвольный момент времени t_0, а также начальную точку $\mathbf{x}_0$ из области D_ε. Рассмотрим решение $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ $(t \geq t_0)$ системы дифференциальных уравнений (1) и обозначим через τ_ε^* момент первого достижения процессом $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ поверхности $\|\mathbf{y}_1\| = \varepsilon$. Если некоторые траектории этого процесса ни за какое конечное время не достигают поверхности $\|\mathbf{y}_1\| = \varepsilon$, то для них τ_ε^* считаем равным ∞. Положим $\tau_\varepsilon^*(t) = \min(\tau_\varepsilon^*, t)$.

Из равенства (П.1) на основании условия (7) следует неравенство (П.2). Если справедливо неравенство $t > \tau_\varepsilon^*$ (в этом случае имеем $\tau_\varepsilon^*(t) = \tau_\varepsilon^*$), то выполняются соотношения $\|\mathbf{y}_1(\tau_\varepsilon^*(t); t_0, \mathbf{x}_0)\| = \|\mathbf{y}_1(\tau_\varepsilon^*; t_0, \mathbf{x}_0)\| = \varepsilon$. Если же справедливо неравенство $t < \tau_\varepsilon^*$ (в этом случае имеем $\tau_\varepsilon^*(t) = t$), то на основании неравенства Чебышева и оценки (П.2) аналогично (П.3) находим

$$\begin{gathered} \mathbf{P}\left[\|\mathbf{y}_1(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| > \varepsilon\right] \leq \\ \leq a^{-1}(\varepsilon)\mathbf{E}\left[V(\tau_\varepsilon(t), \mathbf{x}(\tau_\varepsilon(t); t_0, \mathbf{x}_0))\right] \leq a^{-1}(\varepsilon) V(t_0, \mathbf{x}_0). \end{gathered} \tag{П.5}$$

Имея в виду предельное соотношение (П.4), для всех $t_0 \geq 0$ и для любого заданного числа $L > 0$ на основании неравенств (П.5) получим предельное соотношение

$$\lim_{\mathbf{y}_0 \to 0} \mathbf{P} \left[\lim_{t > t_0} \|\mathbf{y}_1(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| > \varepsilon \right] = 0,$$

выполняющееся при $\|\mathbf{z}_{10}\| \leq L$ равномерно по $\|\mathbf{z}_{20}\| < \infty$.

В результате для каждого $t_0 \leq 0$ и для любых сколь угодно малых чисел $\varepsilon > 0$, $\gamma > 0$, а также для любого наперед заданного числа $L > 0$ найдется число $\delta(\varepsilon, \gamma, L, t_0) > 0$ такое, что неравенство (3) имеет место для всех $t \geq t_0$ и $\mathbf{x}_0 \in D_\delta$. Следовательно, при больших значениях $\mathbf{z}_{10}$ в целом по $\mathbf{z}_{20}$ «частичное» положение равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ системы (1) $\mathbf{y}_1$-устойчиво по вероятности. Первая часть теоремы 2 доказана.

При выполнении условий (8) для каждого $t_0 \geq 0$ и для любых сколь угодно малых чисел $\varepsilon > 0$, $\gamma > 0$, а также для любого наперед заданного числа $L > 0$ найдется не зависимое от t_0 число $\delta(\varepsilon, \gamma, L) > 0$ такое, что неравенство (3) имеет место для всех $t \geq t_0$ и $\mathbf{x}_0 \in D_\delta$. Следовательно, при больших значениях $\mathbf{z}_{10}$ в целом по $\mathbf{z}_{20}$ «частичное» положение равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ системы (1) равномерно $\mathbf{y}_1$-устойчиво по вероятности. Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хасьминский Р.З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М.: Наука, 1969.
2. *Кушнер Г.Дж.* Стохастическая устойчивость и управление / Пер. с англ. М.: Мир, 1969.
3. *Mao X.R.* Stochastic Differential Equations and Applications. 2nd ed. Oxford: Woodhead Publ., 2008.
4. *Кац И.Я., Красовский Н.Н.* Об устойчивости систем со случайными параметрами // Прикл. матем. и механика. 1960. Т. 24. Вып. 5. С. 809–823.
5. *Kats I.Ya., Martynyuk A.A.* Stability and Stabilization of Nonlinear Systems with Random Structure. London: Taylor & Francis, 2002.
6. *Mao X.R., Yuan C.G.* Stochastic Differential Equations with Markovian Switching. London: Imperial College Press, 2006.
7. *Воротников В.И.* Два класса задач частичной устойчивости: к унификации понятий и единым условиям разрешимости // Докл. РАН. 2002. Т. 384. № 1. С. 47–51.

   Vorotnikov V.I. Two Classes of Partial Stability Problems: Unification of the Notions and Common Conditions of Solvability // Dokl. Physics. 2002. V. 47. No. 5. P. 377–381.
8. *Воротников В.И., Мартышенко Ю.Г.* К задаче частичной детектируемости нелинейных динамических систем // АиТ. 2009. № 1. С. 25–38.

   Vorotnikov V.I., Martyshenko Yu.G. On Partial Detectability of the Nonlinear Dynamic Systems // Autom. Remote Control. 2009. V. 70. No. 1. P. 20–32.
9. *Воротников В.И., Мартышенко Ю.Г.* К теории частичной устойчивости нелинейных динамических систем // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2010. Т. 51. Вып. 5. С. 23–31.

   Vorotnikov V.I., Martyshenko Yu.G. On the Partial Stability of Nonlinear Dynamical Systems // J. Comp. Syst. Sci. Int. 2010. V. 49. No. 5. P. 702–709.
10. *Воротников В.И.* Частичная устойчивость и управление: состояние проблемы и перспективы развития // АиТ. 2005. № 4. С. 3–59.

    Vorotnikov V.I. Partial Stability and Control: the State of the Art and Developing Prospects // Autom. Remote Control. 2005. V. 66. No. 4. P. 511–561.
11. *Воротников В.И., Мартышенко Ю.Г.* Об устойчивости по части переменных «частичных» положений равновесия систем с последействием // Мат. заметки. 2014. Т. 96. Вып. 4. С. 496–503.

    Vorotnikov V.I., Martyshenko Yu.G. Stability in a Part of Variables of “Partial” Equilibria of Systems with Aftereffect // Math. Notes. 2014. V. 96. No. 4. P. 477–483.

12. *Воротников В.И., Мартышенко Ю.Г.* К задаче частичной устойчивости нелинейных дискретных систем // Мехатроника. Автоматизация. Управление. 2017. Т. 18. № 6. С. 371–375.

13. *Ramirez-Llanos, E., Martinez S.* Distributed and Robust Fair Optimization Applied to Virus Diffusion Control // IEEE Trans. Network Sci. Engineer. 2017. V. 4. No. 1. P. 41–54.

14. *Шаров В.Ф.* Устойчивость и стабилизация стохастических систем по отношению к части переменных // АиТ. 1978. № 11. С. 63–71.

    Sharov V.F. Stability and Stabilization of Stochastic Systems vis-a-vis Some of the Variables // Autom. Remote Control. 1978. V. 39. No. 11. P. 1629–1636.

15. *Vorotnikov V.I.* Partial Stability and Control. Boston: Birkhauser, 1998.

16. *Potcovaru G.* On the Partial Stability of a Dynamical Systems with Random Parameters // An. Univ. Bucur. Mat. 1999. V. 48. No. 2. P. 163–168.

17. *Ignatyev O.* Partial Asymptotic Stability in Probability of Stochastic Differential Equations // Statist. Probab. Lett. 2009. V. 79. No. 5. P. 597–601.

18. *Ignatyev O.* New Criterion of Partial Asymptotic Stability in Probability of Stochastic Differential Equations // Appl. Math. Comp. 2013. V. 219. No. 23. P. 10961–10966.

19. *Зуев А.Л., Игнатьев А.О., Ковалев А.М.* Устойчивость и стабилизация нелинейных систем. Киев: Наук. думка, 2013.

20. *Rajpurohit T., Haddad W.M.* Stochastic Finite-Time Partial Stability, Partial-State Stabilization, and Finite-Time Optimal Feedback Control // Math. Control, Signals, Syst. 2017. V. 29. No. 2. art. 10.

21. *Rajpurohit T., Haddad W.M.* Partial-State Stabilization and Optimal Feedback Control for Stochastic Dynamical Systems // J. Dynam. Syst., Measurement, Control. 2017. V. 139. No. 9. P. DS-15-1602.

22. *Румянцев В.В., Озиранер А.С.* Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. М.: Наука, 1987.

23. *Мирошник И.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л.* Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. СПб.: Наука, 2000.

24. *Румянцев В.В.* Об устойчивости движения по отношению к части переменных // Вест. МГУ. Сер. Матем. Механика. Физика. Астрономия. Химия. 1957. № 4. С. 9–16.

25. *Воротников В.И.* К теории устойчивости по отношению к части переменных // Прикл. матем. и механика. 1995. Т. 59. Вып. 4. С. 553–561.

    Vorotnikov V.I. On the Theory of Partial Stability // J. Appl. Math. Mech. 1995. V. 59. No. 4. P. 525–531.

26. *Kao Y., Wang C., Zha F., Cao H.* Stability in Mean of Partial Variables for Stochastic Reaction–Diffusion Systems with Markovian Switching // J. Franklin Institute. 2014. V. 351. No. 1. P. 500–512.

27. *Socha L., Zhu Q.X.* Exponential Stability with Respect to Part of the Variables for a Class of Nonlinear Stochastic Systems with Markovian Switching // Math. Comp. Simul. 2019. V. 155. P. 2–14.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.М. Хрусталевым.

Поступила в редакцию 20.04.2018

После доработки 10.09.2018

Принята к публикации 08.11.2018