Автоматика и телемеханика, № 5, 2019

© 2019 г. Д.Ф. КУЗНЕЦОВ, д-р физ.-мат. наук (sde_kuznetsov@inbox.ru)
(Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого)

К ЧИСЛЕННОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ МНОГОМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПРИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ С ПОРЯДКОМ СИЛЬНОЙ СХОДИМОСТИ 2,5

Разрабатываются численные методы моделирования с порядком сильной сходимости 2,5 для многомерных динамических систем при случайных возмущениях, описываемых стохастическими дифференциальными уравнениями Ито. Особое внимание уделяется методам численного моделирования повторных стохастических интегралов Ито кратностей 1–5 (исходя из среднеквадратического критерия сходимости), необходимых для реализации указанного численного метода.

Ключевые слова: повторный стохастический интеграл Ито, ряд Фурье, численный метод, среднеквадратическая сходимость.

DOI: 10.1134/S0005231019050064

1. Введение

Настоящая статья является продолжением исследований автора [1] по численным методам для стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) Ито, имеющих достаточно высокие порядки так называемой сильной сходимости (определение сильной сходимости будет дано ниже).

Актуальность построения указанных численных методов обусловливается широким кругом применений СДУ Ито [2–11]. Данные уравнения используются, в частности, в задачах оптимального стохастического управления, фильтрации сигналов на фоне случайных помех, оценивания параметров стохастических систем, а также в задачах о стохастической устойчивости и бифуркациях [2–4]. Кроме этого, СДУ Ито являются адекватными математическими моделями динамических систем различной физической природы, находящихся под воздействием случайных возмущений. Они применяются в качестве математических моделей в стохастической финансовой математике [3–6], гидрологии и сейсмологии [3], геофизике [3, 8], химической кинетике и популяционной динамике [3], электродинамике [3, 7, 8], медицине [3] и ряде других областей [9–11].

С другой стороны, актуальность построения численных методов для СДУ Ито, имеющих достаточно высокие порядки сильной сходимости, обусловливается тем обстоятельством, что точности одного из простейших численных методов — метода Эйлера (при стандартных условиях [3, 9, 10]) оказывается в ряде случаев недостаточно при численном решении практических задач.

Данная работа выполнена в рамках перспективного подхода [3, 4, 9, 10] к численному интегрированию СДУ Ито, основанного на стохастических аналогах формулы Тейлора (так называемых разложениях Тейлора–Ито и

Тейлора–Стратоновича) [12–15] для решений СДУ Ито. Этот подход подразумевает конечную дискретизацию временно́й переменной и численное моделирование решения СДУ Ито в дискретные моменты времени с помощью стохастических аналогов формулы Тейлора. На примере численного метода с порядком сильной сходимости 2,5 в статье показывается, что более целесообразно применение разложения Тейлора–Ито, нежели Тейлора–Стратоновича, поскольку повторные стохастические интегралы Ито (особенно кратности 3–5), необходимые для реализации численного метода, допускают более простые и эффективные процедуры численного моделирования в сравнении с повторными стохастическими интегралами Стратоновича.

В работе применяется так называемое унифицированное разложение Тейлора–Ито [14], позволяющее использовать минимальную совокупность повторных стохастических интегралов Ито, что является упрощающим фактором на стадии реализации численного метода. Для аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито, входящих в рассматриваемую численную схему с порядком сильной сходимости 2,5, используется метод кратных рядов Фурье–Лежандра, рассмотренный в ряде работ автора [1, 15, 17–19]. В [1] отмечается, что указанный метод кратных рядов Фурье не приводит к дроблению промежутка интегрирования $[t, T]$ упомянутых повторных стохастических интегралов Ито, длина $T - t$ которого представляет собой шаг интегрирования численных методов для СДУ Ито и поэтому является достаточно малой величиной. Численные эксперименты показывают [15], что дробление промежутка $[t, T]$ приводит к неприемлемо большим вычислительным затратам (обычно дробление промежутка $[t, T]$ используется в методах аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито, основанных на интегральных суммах [20]).

Как отмечалось в [1], ряд публикаций [3, 4, 9, 10] содержит численные схемы с высокими порядами сильной сходимости (1,5, 2,0 и 2,5) для СДУ Ито, однако без эффективных процедур среднеквадратической аппроксимации, входящих в них, повторных стохастических интегралов для случая многомерного неаддитивного шума. Как правило, авторы [3, 4, 9, 10] вводят упрощающие предположения об аддитивности, коммутативности или малости шума, что ведет к существенному упрощению проблемы численного моделирования поторных стохастических интегралов. Данная статья, также как и работа [1], частично устраняет указанный пробел.

Отметим, что в [3, 4, 9, 10] достаточно хорошо изучены свойства численных схем для СДУ Ито (в том числе и численных схем с порядком сильной сходимости 2,5), в частности их устойчивость. Целью же настоящнй статьи является разработка эффектиных процедур численного моделирования повторных стохастических интегралов Ито кратности 1–5, включая точное вычисление и эффективное оценивание среднеквадратических погрешностей аппроксимации указанных стохастических интегралов.

Пусть задано фиксированное вероятностное пространство $(\Omega, \mathrm{F}, \mathsf{P})$, неубывающая совокупность σ-алгебр $\{\mathrm{F}_t, t \in [0, T]\}$ на нем и F_t-измеримый при всех $t \in [0, T]$ m-мерный стандартный винеровский процесс $\mathbf{f}_t$ с независимыми компонентами $\mathbf{f}_t^{(i)}$; $i = 1, \ldots, m$.

Рассмотрим СДУ Ито в интегральной форме:

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_0 + \int\limits_0^t \mathbf{a}(\mathbf{x}_\tau, \tau) d\tau + \int\limits_0^t B(\mathbf{x}_\tau, \tau) d\mathbf{f}_\tau, \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega), \tag{1.1}$$

где $\mathbf{x}_\tau \in \Re^n$ — случайный процесс, являющийся сильным решением уравнения (1.1); второй интеграл в правой части (1.1) понимается как стохастический интеграл Ито [21]; $\mathbf{a}$: $\Re^n \times [0, T] \to \Re^n$, $B : \Re^n \times [0, T] \to \Re^{n \times m}$ — функции, для которых существует правая часть (1.1) и которые удовлетворяют стандартным условиям существования и единственности сильного решения $\mathbf{x}_t \in \Re^n$ уравнения (1.1) [21]; $\mathbf{x}_0$ и $\mathbf{f}_t - \mathbf{f}_0$ $(t > 0)$ предполагаются независимыми, причем $\mathbf{x}_0 \in \Re^n$ — F_0-измеримая случайная величина, для которой $\mathsf{M}\{|\mathbf{x}_0|^2\} < \infty$; M — оператор математического ожидания.

2. Явная одношаговая численная схема с порядком сильной сходимости 2,5, основанная на унифицированном разложении Тейлора–Ито

Дадим определение сильной сходимости численного метода для СДУ Ито.

Рассмотрим разбиение $\{\tau_p\}_{p=0}^N$ промежутка $[0, T]$ с рангом дробления Δ_N такое, что $0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_N = T$. Через $\mathbf{y}_{\tau_p} \stackrel{\mathsf{def}}{=} \mathbf{y}_p$; $p = 0, 1, \ldots, N$ обозначим дискретную аппроксимацию процесса $\mathbf{x}_t$, $t \in [0, T]$ (решение СДУ Ито (1.1)), соответствующую максимальному шагу дискретизации Δ_N.

Определение 1 [3]. *Будем говорить, что дискретная аппроксимация (численный метод)* $\mathbf{y}_j$; $j = 0, 1, \ldots, N$, *соответствующая максимальному шагу дискретизации* Δ_N, *сходится сильно с порядком* $\gamma > 0$ *к процессу* $\mathbf{x}_t$, $t \in [0, T]$, *если существуют постоянная* $C > 0$, *которая не зависит от* Δ_N *и* j $(j = 0, 1, \ldots, N)$, *а также число* $\delta > 0$ *такие, что*

$$\mathsf{M}\{|\mathbf{x}_j - \mathbf{y}_j|\} \le C (\Delta_N)^\gamma \quad (j = 0, 1, \ldots, N) \tag{2.1}$$

для всех $\Delta_N \in (0, \delta)$.

В ряде публикаций [9, 10] авторы рассматривают вместо сильной сходимости среднеквадратическую сходимость, что соответствует замене условия (2.1) на следующее условие:

$$\left(\mathsf{M}\left\{|\mathbf{x}_j - \mathbf{y}_j|^2\right\}\right)^{1/2} \le C (\Delta_N)^\gamma \quad (j = 0, 1, \ldots, N). \tag{2.2}$$

В (2.1) и (2.2) было положено $\mathbf{x}_{\tau_j} \stackrel{\mathsf{def}}{=} \mathbf{x}_j$; $j = 0, 1, \ldots, N$.

Очевидно, что в силу неравенства Ляпунова [16] среднедвадратическая сходимость влечет сильную сходимость.

Достаточно непростым оказался вопрос, какие повторные стохастические интегралы (Ито или Стратоновича) более удобны для численного моделирования с корректной оценкой среднеквадратической погрешности аппроксимации. В разделе 3 настоящей статьи показывается, что по внешнему виду аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича проще, чем соответствующие аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито. Однако процедура оценки среднеквадратической погрешности аппроксимации оказывается гораздо проще для повторных стохастических интегралов Ито, что является серьезным мотивом использования интегралов указанного типа.

Рассмотрим явную одношаговую численную схему для СДУ Ито, основанную на унифицированном разложении Тейлора–Ито [15] и имеющую при стандартных условиях [3, 15] порядок сильной сходимости 2,5:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p &+ \sum_{i_1=1}^{m} B_{i_1}\hat{I}_{(0)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)} + \Delta\mathbf{a} + \sum_{i_1,i_2=1}^{m} G_{i_2}B_{i_1}\hat{I}_{(00)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2 i_1)} + \\
&+ \sum_{i_1=1}^{m}\left(G_{i_1}\mathbf{a}\left(\Delta\hat{I}_{(0)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)} + \hat{I}_{(1)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)}\right) - LB_{i_1}\hat{I}_{(1)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)}\right) + \\
&+ \sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{m} G_{i_3}G_{i_2}B_{i_1}\hat{I}_{(000)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} + \frac{\Delta^2}{2}L\mathbf{a} + \frac{\Delta^3}{6}LL\mathbf{a} + \\
&+ \sum_{i_1,i_2=1}^{m}\Biggl(G_{i_2}LB_{i_1}\left(\hat{I}_{(10)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2 i_1)} - \hat{I}_{(01)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2 i_1)}\right) - LG_{i_2}B_{i_1}\hat{I}_{(10)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2 i_1)} + \\
&+ G_{i_2}G_{i_1}\mathbf{a}\left(\hat{I}_{(01)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2 i_1)} + \Delta\hat{I}_{(00)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2 i_1)}\right)\Biggr) + \\
&+ \sum_{i_1,i_2,i_3,i_4=1}^{m} G_{i_4}G_{i_3}G_{i_2}B_{i_1}\hat{I}_{(0000)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)} + \\
&+ \sum_{i_1=1}^{m}\Biggl(G_{i_1}L\mathbf{a}\left(\frac{1}{2}\hat{I}_{(2)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)} + \Delta\hat{I}_{(1)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)} + \frac{\Delta^2}{2}\hat{I}_{(0)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)}\right) + \\
&+ \frac{1}{2}LLB_{i_1}\hat{I}_{(2)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)} - LG_{i_1}\mathbf{a}\left(\hat{I}_{(2)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)} + \Delta\hat{I}_{(1)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)}\right)\Biggr) + \\
&+ \sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{m}\Biggl(G_{i_3}LG_{i_2}B_{i_1}\left(\hat{I}_{(100)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} - \hat{I}_{(010)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)}\right) + \\
&+ G_{i_3}G_{i_2}LB_{i_1}\left(\hat{I}_{(010)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} - \hat{I}_{(001)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)}\right) + \\
&+ G_{i_3}G_{i_2}G_{i_1}\mathbf{a}\left(\Delta\hat{I}_{(000)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} + \hat{I}_{(001)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)}\right) - \\
&- LG_{i_3}G_{i_2}B_{i_1}\hat{I}_{(100)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)}\Biggr) + \\
&+ \sum_{i_1,i_2,i_3,i_4,i_5=1}^{m} G_{i_5}G_{i_4}G_{i_3}G_{i_2}B_{i_1}\hat{I}_{(00000)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_5 i_4 i_3 i_2 i_1)},
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

где $\Delta = T/N \ \ (N > 1)$ — постоянный шаг интегрирования; $\tau_p = p\Delta \ \ (p = 0, 1, \ldots, N)$; $\hat{I}^{(i_1 \ldots i_k)}_{(l_1 \ldots l_k)s,t}$ — аппроксимация повторного стохастического интеграла Ито кратности k вида

$$
I^{(i_1 \ldots i_k)}_{(l_1 \ldots l_k)s,t} = \int\limits_t^s (t-\tau_k)^{l_k} \ldots \int\limits_t^{\tau_2} (t-\tau_1)^{l_1} d\mathbf{f}^{(i_1)}_{\tau_1} \ldots d\mathbf{f}^{(i_k)}_{\tau_k}; \tag{2.4}
$$

$$
L = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}_i(\mathbf{x}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} \sum_{l,i=1}^{n} B_{lj}(\mathbf{x}, t) B_{ij}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_l \partial \mathbf{x}_i};
$$

$$
G_i = \sum_{j=1}^{n} B_{ji}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_j}; \quad i = 1, \ldots, m;
$$

$l_1, \ldots, l_k = 0, 1, 2$; $i_1, \ldots, i_k = 1, \ldots, m$; $k = 1, \ldots, 5$; B_i — i-й столбец матричной функции B; B_{ij} — ij-й элемент матричной функции B; $\mathbf{a}_i$ — i-й элемент векторной функции $\mathbf{a}$; $\mathbf{x}_i$ — i-й элемент столбца $\mathbf{x}$; функции B_{i_1}, $\mathbf{a}$, $G_{i_2}B_{i_1}$, $G_{i_1}\mathbf{a}$, LB_{i_1}, $G_{i_3}G_{i_2}B_{i_1}$, $L\mathbf{a}$, $LL\mathbf{a}$, $G_{i_2}LB_{i_1}$, $LG_{i_2}B_{i_1}$, $G_{i_2}G_{i_1}\mathbf{a}$, $G_{i_4}G_{i_3}G_{i_2}B_{i_1}$, $G_{i_1}L\mathbf{a}$, LLB_{i_1}, $LG_{i_1}\mathbf{a}$, $G_{i_3}LG_{i_2}B_{i_1}$, $G_{i_3}G_{i_2}LB_{i_1}$, $G_{i_3}G_{i_2}G_{i_1}\mathbf{a}$, $LG_{i_3}G_{i_2}B_{i_1}$, $G_{i_5}G_{i_4}G_{i_3}G_{i_2}B_{i_1}$ вычислены в точке $(\mathbf{y}_p, p)$.

Хорошо известно [3, 15], что при стандартных условиях численная схема (2.3) имеет порядок сильной сходимости 2,5. Среди указанных условий отметим только условие для аппроксимаций повторных стохастических интегралов Ито, входящих в (2.3) [3, 15], поскольку основное внимание будет уделяться именно аппроксимации отмеченных интегралов:

$$
\mathsf{M}\left\{ \left(I^{(i_1 \ldots i_k)}_{(l_1 \ldots l_k)\tau_{p+1}, \tau_p} - \hat{I}^{(i_1 \ldots i_k)}_{(l_1 \ldots l_k)\tau_{p+1}, \tau_p} \right)^2 \right\} \le C\Delta^6, \tag{2.5}
$$

где постоянная C не зависит от Δ.

Отметим, что на основе численной схемы (2.3) или ее модификации, основанной на разложении Тейлора–Ито [12, 13], можно строить неявные или многошаговые аналоги (2.3) [3, 9, 10, 15, 19]. При этом набор повторных стохастических интегралов, подлежащий аппроксимации для численной реализации указанных модификаций численной схемы (2.3), будет таким же, как и для численной схемы (2.3).

Заметим, что усеченное унифицированное разложение Тейлора–Ито (на основе которого построена численная схема (2.3)) содержит 12 различных повторных стохастических интегралов Ито вида (2.4), которые не могут быть связаны линейными соотношениями [14, 15]. Аналогичное разложение Тейлора–Ито [3, 12, 13] содержит 17 различных повторных стохастических интегралов Ито, часть из которых связаны друг с другом линейными соотношениями и часть из которых имеют большую кратность, нежели повторные стохастические интегралы Ито вида (2.4). Этим обусловливается мотивация применения численной схемы (2.3).

Одной из основных проблем на стадии реализации численной схемы (2.3) является проблема совместного численного моделирования повторных стохастических интегралов Ито, входящих в (2.3). В следующем разделе рассмотрим эффективный метод численного моделирования повторных стохастических интегралов Ито, а также покажем, какие стохастические интегралы (Ито или Стратоновича) являются более удобными для численного моделирования с учетом корректной оценки среднеквадратической погрешности аппроксимации.

3. Метод численного моделирования повторных стохастических интегралов, основанный на кратных рядах Фурье

В [1] (см. также [15, 17–19]) был рассмотрен эффективный метод численного моделирования повторных стохастических интегралов Ито, основанный на кратных рядах Фурье. Приведем формулировку теоремы, на которой основан данный метод.

Теорема 1 [1, 15, 17–19]. *Пусть выполнены следующие условия*:

1) $\psi_i(\tau);\ i=1,\ldots,k$ — *непрерывные на промежутке* $[t,T]$ *функции*;

2) $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ — *полная ортонормированная система полиномов Лежандра или тригонометрических функций в пространстве* $L_2([t,T])$.

Тогда повторный стохастический интеграл Ито $J[\psi^{(k)}]_{T,t}$ *вида*

$$J[\psi^{(k)}]_{T,t}=\int\limits_t^T\psi_k(t_k)\ldots\int\limits_t^{t_2}\psi_1(t_1)d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)}\ldots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)}\quad (i_1,\ldots,i_k=0,1,\ldots,m), \tag{3.1}$$

где $\mathbf{w}_\tau^{(i)}=\mathbf{f}_\tau^{(i)}$ $(i=1,\ldots,m)$ *и* $\mathbf{w}_\tau^{(0)}=\tau$, *разлагается в сходящийся в среднеквадратическом смысле кратный ряд*

$$J[\psi^{(k)}]_{T,t}=\underset{p_1,\ldots,p_k\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\sum_{j_1=0}^{p_1}\ldots\sum_{j_k=0}^{p_k}C_{j_k\ldots j_1}\Biggl(\prod_{l=1}^{k}\zeta_{j_l}^{(i_l)}-\\-\underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\sum_{(l_1,\ldots,l_k)\in\mathcal{G}_k}\phi_{j_1}(\tau_{l_1})\Delta\mathbf{w}_{\tau_{l_1}}^{(i_1)}\ldots\phi_{j_k}(\tau_{l_k})\Delta\mathbf{w}_{\tau_{l_k}}^{(i_k)}\Biggr), \tag{3.2}$$

где l.i.m. — *предел в среднеквадратическом смысле,*

$$\mathcal{G}_k=\mathcal{H}_k\backslash\mathcal{L}_k,\quad \mathcal{H}_k=\{(l_1,\ldots,l_k):\ l_1,\ldots,l_k=0,\ 1,\ldots,N-1\},$$

$$\mathcal{L}_k=\Bigl\{(l_1,\ldots,l_k):l_1,\ldots,l_k=0,\ 1,\ldots,N-1;\ l_g\ne l_r\ (g\ne r);\ g,r=1,\ldots,k\Bigr\},$$

$$C_{j_k\ldots j_1}=\int\limits_{[t,T]^k}K(t_1,\ldots,t_k)\prod_{l=1}^{k}\phi_{j_l}(t_l)dt_1\ldots dt_k,$$

$$K(t_1,\ldots,t_k)=\prod_{l=1}^{k}\psi_l(t_l)\prod_{l=1}^{k-1}\mathbf{1}_{\{t_l<t_{l+1}\}};\quad t_1,\ldots,t_k\in[t,T]\quad (k\ge 2)$$

и $K(t_1)=\psi_1(t_1);\ t_1\in[t,T]$ ($\mathbf{1}_A$ *— индикатор множества* A);

$$\zeta_j^{(i)}=\int\limits_t^T \phi_j(s)d\mathbf{w}_s^{(i)}$$

— независимые стандартные гауссовские случайные величины при различных i *или* j (*если* $i\ne 0$), $\Delta\mathbf{w}_{\tau_j}^{(i)}=\mathbf{w}_{\tau_{j+1}}^{(i)}-\mathbf{w}_{\tau_j}^{(i)}$ $(i=0,\ 1,\ldots,m)$, $\{\tau_j\}_{j=0}^{N-1}$ *— разбиение промежутка* $[t,T]$, *удовлетворяющее условию*

$$t=\tau_0<\ldots<\tau_N=T,\ \Delta_N=\max_{0\le j\le N-1}\Delta\tau_j\to 0 \text{ при } N\to\infty,\ \Delta\tau_j=\tau_{j+1}-\tau_j.$$

Отметим, что интегралы $J[\psi^{(k)}]_{T,t}$ допускают точное вычисление среднеквадратической погрешности аппроксимации, а также эффективное оценивание указанной погрешности. В частности, справедливы следующие две теоремы.

Теорема 2 [19]. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *при* $i_1,\ldots,i_k=1,\ldots,m$. *Тогда*

$$\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(k)}]_{T,t}-J[\psi^{(k)}]_{T,t}^q\right)^2\right\}=\int\limits_{[t,T]^k}K^2(t_1,\ldots,t_k)dt_1\ldots dt_k- \tag{3.3}$$

$$-\sum_{j_1,\ldots,j_k=0}^{q}C_{j_k\ldots j_1}\mathsf{M}\left\{J[\psi^{(k)}]_{T,t}\sum_{(j_1,\ldots,j_k)}\int\limits_t^T\phi_{j_k}(t_k)\ldots\int\limits_t^{t_2}\phi_{j_1}(t_1)d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)}\ldots d\mathbf{f}_{t_k}^{(i_k)}\right\},$$

где $J[\psi^{(k)}]_{T,t}^q$ *— допредельное выражение в* (3.2) *при* $p_1=\ldots=p_k=q$:

$$J[\psi^{(k)}]_{T,t}^q=\sum_{j_1,\ldots,j_k=0}^{q}C_{j_k\ldots j_1}\Biggl(\prod_{l=1}^k\zeta_{j_l}^{(i_l)}- \tag{3.4}$$

$$-\underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}}\sum_{(l_1,\ldots,l_k)\in\mathcal{G}_k}\phi_{j_1}(\tau_{l_1})\Delta\mathbf{w}_{\tau_{l_1}}^{(i_1)}\ldots\phi_{j_k}(\tau_{l_k})\Delta\mathbf{w}_{\tau_{l_k}}^{(i_k)}\Biggr),$$

$\sum\limits_{(j_1,\ldots,j_k)}$ *— сумма по всем возможным перестановкам* $(j_1,\ldots,j_k)$, *причем, если* j_r *в перестановке* $(j_1,\ldots,j_k)$ *поменяется местами с* j_q, *то и* i_r *поменяется местами с* i_q *в перестановке* $(i_1,\ldots,i_k)$; *остальные обозначения такие же, как в теореме* 1.

Отметим, что

$$\mathsf{M}\left\{J[\psi^{(k)}]_{T,t}\int\limits_t^T\phi_{j_k}(t_k)\ldots\int\limits_t^{t_2}\phi_{j_1}(t_1)d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)}\ldots d\mathbf{f}_{t_k}^{(i_k)}\right\}=$$

$$=\int\limits_t^T\psi_k(t_k)\phi_{j_k}(t_k)\ldots\int\limits_t^{t_2}\psi_1(t_1)\phi_{j_1}(t_1)dt_1\ldots dt_k=C_{j_k\ldots j_1}.$$

Поэтому, в частности, в случае попарно различных чисел $i_1, \ldots, i_k$ из (3.3) получим

$$\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(k)}]_{T,t} - J[\psi^{(k)}]_{T,t}^q\right)^2\right\} = \tag{3.5}$$
$$= \int\limits_{[t,T]^k} K^2(t_1, \ldots, t_k) dt_1 \ldots dt_k - \sum_{j_1,\ldots,j_k=0}^{q} C_{j_k\ldots j_1}^2.$$

Отметим, что формула (3.5) может быть независимо получена другим методом, рассмотренным в [15].

Теорема 3 [18, 19]. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *при* $i_1, \ldots, i_k = 1, \ldots, m$. *Тогда справедлива оценка*

$$\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(k)}]_{T,t} - J[\psi^{(k)}]_{T,t}^q\right)^2\right\} \le$$
$$\le k!\left(\int\limits_{[t,T]^k} K^2(t_1, \ldots, t_k) dt_1 \ldots dt_k - \sum_{j_1,\ldots,j_k=0}^{q} C_{j_k\ldots j_1}^2\right),$$

где сохранен смысл обозначений теоремы 2.

В противоположность повторным стохастическим интегралам Ито повторные стохастические интегралы Стратоновича допускают более простые разложения, чем (3.2), однако проблема вычисления (или оценивания) среднеквадратической погрешности аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича оказывается гораздо более сложной, чем для повторных стохастических интегралов Ито. Рассмотрим более подробно данный вопрос.

Введем в рассмотрение повторные стохастические интегралы Стратоновича вида

$$J^*[\psi^{(k)}]_{T,t} = \int\limits_t^{*T} \psi_k(t_k) \ldots \int\limits_t^{*t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \ldots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)}, \tag{3.6}$$

где сохранен смысл обозначений формулы (3.1).

Приведем несколько видоизмененный и расширенный вариант теоремы [1], которая адаптирует теорему 1 для интегралов (3.6) кратностей 2–5 [17–19, 22].

Теорема 4 [1, 17–19, 22]. *Пусть* $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ — *полная ортонормированная система полиномов Лежандра или система тригонометрических функций в* $L_2([t, T])$. *При этом* $\psi_2(s)$ — *непрерывно дифференцируемая на интервале* $[t, T]$ *функция, а* $\psi_1(s), \psi_3(s)$ — *дважды непрерывно дифференцируемые на интервале* $[t, T]$ *функции. Тогда*

$$J^*[\psi^{(k)}]_{T,t} = \underset{p\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1,\ldots,j_k=0}^{p} C_{j_k\ldots j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \ldots \zeta_{j_k}^{(i_k)}, \tag{3.7}$$

где $k=2,3,4,5,$ *причем* $\psi_1(s),\ldots,\psi_k(s)\equiv 1$ *и* $i_1,\ldots,i_k=0,1,\ldots,m$ *в* (3.7) *при* $k=4,5,$ *а* $i_1,\ldots,i_k=1,\ldots,m$ *в* (3.7) *при* $k=2,3;$ *другие обозначения соответствуют обозначениям теоремы* 1.

Очевидно, что разложение (3.7) проще, нежели разложение (3.2). Однако покажем, что вычисление среднеквадратической погрешности аппроксимации на основе разложения (3.7) существенно сложнее, чем вычисление аналогичной погрешности на основе разложения (3.2) (см. теоремы 2 и 3).

Случаи $k=1,2$ не представляют интерес, поскольку для случая $k=1$, как известно, стохастические интегралы Ито и Стратоновича от гладкой неслучайной функции совпадают с вероятностью 1 (далее "с в. 1"), а стохастические интегралы Ито второй кратности, входящие в численную схему (2.3), отличаются с в. 1 (в силу стандартных формул связи стохастических интегралов Ито и Стратоновича [3]) от соответствующих стохастических интегралов Стратоновича на постоянные величины.

Рассмотрим повторный стохастический интеграл Стратоновича кратности 3 вида

$$I_{(000)T,t}^{*(i_1i_2i_3)}=\int\limits_t^{*T}\int\limits_t^{*t_3}\int\limits_t^{*t_2}d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)}d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)}d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_3)}\quad (i_1,i_2,i_3=1,\ldots,m).$$

Учитывая стандартные формулы связи стохастических интегралов Ито и Стратоновича [3], а также теоремы 1 и 4 ($k=3$), получим

$$\begin{aligned}&\mathsf{M}\left\{\left(I_{(000)T,t}^{*(i_1i_2i_3)}-I_{(000)T,t}^{*(i_1i_2i_3)q}\right)^2\right\}=\mathsf{M}\left\{\left(I_{(000)T,t}^{(i_1i_2i_3)}+\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\frac{1}{2}\int\limits_t^{T}\int\limits_t^{\tau}dsd\mathbf{f}_{\tau}^{(i_3)}+\right.\right.\\ &\left.\left.+\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}}\frac{1}{2}\int\limits_t^{T}\int\limits_t^{\tau}d\mathbf{f}_{s}^{(i_1)}d\tau-I_{(000)T,t}^{*(i_1i_2i_3)q}\right)^2\right\}=\\ &=\mathsf{M}\left\{\left(I_{(000)T,t}^{(i_1i_2i_3)}-I_{(000)T,t}^{(i_1i_2i_3)q}+I_{(000)T,t}^{(i_1i_2i_3)q}+\right.\right.\\ &\left.\left.+\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\frac{1}{2}\int\limits_t^{T}\int\limits_t^{\tau}dsd\mathbf{f}_{\tau}^{(i_3)}+\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}}\frac{1}{2}\int\limits_t^{T}\int\limits_t^{\tau}d\mathbf{f}_{s}^{(i_1)}d\tau-I_{(000)T,t}^{*(i_1i_2i_3)q}\right)^2\right\},\end{aligned}\tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}I_{(000)T,t}^{(i_1i_2i_3)q}=\sum_{j_1,j_2,j_3=0}^{q}C_{j_3j_2j_1}\Biggl(&\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}-\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}}\zeta_{j_3}^{(i_3)}-\\ &-\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}-\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\Biggr),\end{aligned}\tag{3.9}$$

$$I^{*(i_1 i_2 i_3)q}_{(000)T,t} = \sum_{j_1,j_2,j_3=0}^{q} C_{j_3 j_2 j_1} \zeta^{(i_1)}_{j_1} \zeta^{(i_2)}_{j_2} \zeta^{(i_3)}_{j_3}, \tag{3.10}$$

где $I^{(i_1 i_2 i_3)q}_{(000)T,t}$ — аппроксимация, полученная по формуле (3.4) при $k = 3$, а $I^{*(i_1 i_2 i_3)q}_{(000)T,t}$ — аппроксимация, полученная по теореме 4 при $k = 3$.

Подставим (3.9) и (3.10) в (3.8):

$$\begin{aligned}
\mathsf{M}\left\{\left(I^{*(i_1 i_2 i_3)}_{(000)T,t} - I^{*(i_1 i_2 i_3)q}_{(000)T,t}\right)^2\right\} &= \mathsf{M}\left\{\left(I^{(i_1 i_2 i_3)}_{(000)T,t} - I^{(i_1 i_2 i_3)q}_{(000)T,t} + \right.\right.\\
&+ \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\left(\frac{1}{2}\int\limits_t^T\int\limits_t^\tau ds d\mathbf{f}^{(i_3)}_\tau - \sum_{j_1,j_3=0}^{q} C_{j_3 j_1 j_1} \zeta^{(i_3)}_{j_3}\right) +\\
&+\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}}\left(\frac{1}{2}\int\limits_t^T\int\limits_t^\tau d\mathbf{f}^{(i_1)}_s d\tau - \sum_{j_1,j_3=0}^{q} C_{j_3 j_3 j_1} \zeta^{(i_1)}_{j_1}\right) -\\
&\left.\left. - \mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}}\sum_{j_1,j_2=0}^{q} C_{j_1 j_2 j_1} \zeta^{(i_2)}_{j_2}\right)^2\right\} \le\\
&\le 4\left(\mathsf{M}\left\{\left(I^{(i_1 i_2 i_3)}_{(000)T,t} - I^{(i_1 i_2 i_3)q}_{(000)T,t}\right)^2\right\} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} F^{(i_3)}_q + \right.\\
&\left. + \mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}} G^{(i_1)}_q + \mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}} H^{(i_2)}_q\right),
\end{aligned} \tag{3.11}$$

где

$$F^{(i_3)}_q = \mathsf{M}\left\{\left(\frac{1}{2}\int\limits_t^T\int\limits_t^\tau ds d\mathbf{f}^{(i_3)}_\tau - \sum_{j_1,j_3=0}^{q} C_{j_3 j_1 j_1} \zeta^{(i_3)}_{j_3}\right)^2\right\},$$

$$G^{(i_1)}_q = \mathsf{M}\left\{\left(\frac{1}{2}\int\limits_t^T\int\limits_t^\tau d\mathbf{f}^{(i_1)}_s d\tau - \sum_{j_1,j_3=0}^{q} C_{j_3 j_3 j_1} \zeta^{(i_1)}_{j_1}\right)^2\right\},$$

$$H^{(i_2)}_q = \mathsf{M}\left\{\left(\sum_{j_1,j_2=0}^{q} C_{j_1 j_2 j_1} \zeta^{(i_2)}_{j_2}\right)^2\right\}.$$

При доказательстве теоремы 4 при $k = 3$ [17–19] было показано, что для случаев полиномов Лежандра и тригонометрических функций выполняются равенства

$$\lim_{q\to\infty} F^{(i_3)}_q = 0, \quad \lim_{q\to\infty} G^{(i_1)}_q = 0, \quad \lim_{q\to\infty} H^{(i_2)}_q = 0.$$

Однако согласно (3.11) величина

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{(000)T,t}^{*(i_1i_2i_3)} - I_{(000)T,t}^{*(i_1i_2i_3)q}\right)^2\right\}$$

при конечном q оценивается величиной

$$4\mathsf{M}\left\{\left(I_{(000)T,t}^{(i_1i_2i_3)} - I_{(000)T,t}^{(i_1i_2i_3)q}\right)^2\right\},$$

которая либо вычисляется точно по теореме 2, либо оценивается с помощью теоремы 3 ($k=3$) и тремя дополнительными слагаемыми достаточно сложной структуры.

Нетрудно видеть, что приведенная особенность будет присутствовать и при рассмотрении повторных стохастических интегралов Стратоновича кратности 4 и 5 с единственным отличием, что число дополнительных слагаемых, подобных $F_q^{(i_3)}$, $G_q^{(i_1)}$ и $H_q^{(i_2)}$, будет существенно бóльшим и они будут иметь более сложную структуру.

Таким образом, платой за относительную простоту аппроксимаций повторных стохастических интегралов Стратоновича (теорема 4) является существенно более сложное в сравнении с повторными стохастическими интегралами Ито (теоремы 2 и 3) вычисление или оценивание их среднеквадратических погрешностей аппроксимации.

Именно по указанной выше причине в данной статье обращается основное внимание на аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито, входящих в численную схему (2.3). При этом для аппроксимации используется теорема 1 при $k=1,\ldots,5$ и полная ортонормированная система полиномов Лежандра в пространстве $L_2([t,T])$ (в [1] пояснялось, что полиномы Лежандра имеют ряд преимуществ перед тригонометрическими функциями при аппроксимации повторных стохастических интегралов с помощью теоремы 1).

Рассмотрим аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито, входящих в численную схему (2.3), с использованием теоремы 1 и полной ортонормированной системы полиномов Лежандра в пространстве $L_2([t,T])$:

$$I_{(0)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)} = \sqrt{\Delta}\zeta_0^{(i_1)}, \tag{3.12}$$

$$I_{(1)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)} = -\frac{\Delta^{3/2}}{2}\left(\zeta_0^{(i_1)} + \frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_1^{(i_1)}\right), \tag{3.13}$$

$$I_{(2)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)} = \frac{\Delta^{5/2}}{3}\left(\zeta_0^{(i_1)} + \frac{\sqrt{3}}{2}\zeta_1^{(i_1)} + \frac{1}{2\sqrt{5}}\zeta_2^{(i_1)}\right), \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned} I_{(00)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1i_2)q} = \frac{\Delta}{2}\Biggl(\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)} &+ \\ + \sum_{i=1}^{q}\frac{1}{\sqrt{4i^2-1}}\left(\zeta_{i-1}^{(i_1)}\zeta_i^{(i_2)} - \zeta_i^{(i_1)}\zeta_{i-1}^{(i_2)}\right) &- \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\Biggr), \end{aligned} \tag{3.15}$$

$$
(3.16)\quad I_{(01)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1i_2)q}=-\frac{\Delta}{2}I_{(00)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1i_2)q}-\frac{\Delta^2}{4}\Biggl(\frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_0^{(i_1)}\zeta_1^{(i_2)}+
+\sum_{i=0}^{q}\Biggl(\frac{(i+2)\zeta_i^{(i_1)}\zeta_{i+2}^{(i_2)}-(i+1)\zeta_{i+2}^{(i_1)}\zeta_i^{(i_2)}}{\sqrt{(2i+1)(2i+5)}(2i+3)}-\frac{\zeta_i^{(i_1)}\zeta_i^{(i_2)}}{(2i-1)(2i+3)}\Biggr)\Biggr),
$$

$$
(3.17)\quad I_{(10)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1i_2)q}=-\frac{\Delta}{2}I_{(00)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1i_2)q}-\frac{\Delta^2}{4}\Biggl(\frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_0^{(i_2)}\zeta_1^{(i_1)}+
+\sum_{i=0}^{q}\Biggl(\frac{(i+1)\zeta_{i+2}^{(i_2)}\zeta_i^{(i_1)}-(i+2)\zeta_i^{(i_2)}\zeta_{i+2}^{(i_1)}}{\sqrt{(2i+1)(2i+5)}(2i+3)}+\frac{\zeta_i^{(i_1)}\zeta_i^{(i_2)}}{(2i-1)(2i+3)}\Biggr)\Biggr),
$$

$$
(3.18)\quad I_{(000)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1i_2i_3)q}=\sum_{i,j,k=0}^{q}C_{kji}\Biggl(\zeta_i^{(i_1)}\zeta_j^{(i_2)}\zeta_k^{(i_3)}-
-\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\mathbf{1}_{\{i=j\}}\zeta_k^{(i_3)}-\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}}\mathbf{1}_{\{j=k\}}\zeta_i^{(i_1)}-\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}}\mathbf{1}_{\{i=k\}}\zeta_j^{(i_2)}\Biggr),
$$

$$
(3.19)\quad I_{(001)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1i_2i_3)q}=\sum_{i,j,k=0}^{q}C_{kji}^{001}\Biggl(\zeta_i^{(i_1)}\zeta_j^{(i_2)}\zeta_k^{(i_3)}-
-\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\mathbf{1}_{\{i=j\}}\zeta_k^{(i_3)}-\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}}\mathbf{1}_{\{j=k\}}\zeta_i^{(i_1)}-\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}}\mathbf{1}_{\{i=k\}}\zeta_j^{(i_2)}\Biggr),
$$

$$
(3.20)\quad I_{(010)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1i_2i_3)q}=\sum_{i,j,k=0}^{q}C_{kji}^{010}\Biggl(\zeta_i^{(i_1)}\zeta_j^{(i_2)}\zeta_k^{(i_3)}-
-\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\mathbf{1}_{\{i=j\}}\zeta_k^{(i_3)}-\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}}\mathbf{1}_{\{j=k\}}\zeta_i^{(i_1)}-\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}}\mathbf{1}_{\{i=k\}}\zeta_j^{(i_2)}\Biggr),
$$

$$
(3.21)\quad I_{(100)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1i_2i_3)q}=\sum_{i,j,k=0}^{q}C_{kji}^{100}\Biggl(\zeta_i^{(i_1)}\zeta_j^{(i_2)}\zeta_k^{(i_3)}-
-\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\mathbf{1}_{\{i=j\}}\zeta_k^{(i_3)}-\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}}\mathbf{1}_{\{j=k\}}\zeta_i^{(i_1)}-\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}}\mathbf{1}_{\{i=k\}}\zeta_j^{(i_2)}\Biggr),
$$

$$
(3.22)\quad I_{(0000)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1i_2i_3i_4)q}=\sum_{i,j,k,l=0}^{q}C_{lkji}\Biggl(\zeta_i^{(i_1)}\zeta_j^{(i_2)}\zeta_k^{(i_3)}\zeta_l^{(i_4)}-\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\mathbf{1}_{\{i=j\}}\zeta_k^{(i_3)}\zeta_l^{(i_4)}-
-\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}}\mathbf{1}_{\{i=k\}}\zeta_j^{(i_2)}\zeta_l^{(i_4)}-\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\}}\mathbf{1}_{\{i=l\}}\zeta_j^{(i_2)}\zeta_k^{(i_3)}-
-\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}}\mathbf{1}_{\{j=k\}}\zeta_i^{(i_1)}\zeta_l^{(i_4)}-\mathbf{1}_{\{i_2=i_4\}}\mathbf{1}_{\{j=l\}}\zeta_i^{(i_1)}\zeta_k^{(i_3)}-
-\mathbf{1}_{\{i_3=i_4\}}\mathbf{1}_{\{k=l\}}\zeta_i^{(i_1)}\zeta_j^{(i_2)}+\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\mathbf{1}_{\{i=j\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_4\}}\mathbf{1}_{\{k=l\}}+
+\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}}\mathbf{1}_{\{i=k\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_4\}}\mathbf{1}_{\{j=l\}}+\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\}}\mathbf{1}_{\{i=l\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}}\mathbf{1}_{\{j=k\}}\Biggr),
$$

$$
\begin{aligned}
I_{(00000)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1 i_2 i_3 i_4 i_5)q} = \sum_{i,j,k,l,r=0}^{q} C_{rlkji}\Biggl(& \zeta_r^{(i_5)}\zeta_l^{(i_4)}\zeta_k^{(i_3)}\zeta_j^{(i_2)}\zeta_i^{(i_1)} - \\
& -\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\mathbf{1}_{\{i=j\}}\zeta_k^{(i_3)}\zeta_l^{(i_4)}\zeta_r^{(i_5)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}}\mathbf{1}_{\{i=k\}}\zeta_j^{(i_2)}\zeta_l^{(i_4)}\zeta_r^{(i_5)} - \\
& -\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\}}\mathbf{1}_{\{i=l\}}\zeta_j^{(i_2)}\zeta_k^{(i_3)}\zeta_r^{(i_5)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_5\}}\mathbf{1}_{\{i=r\}}\zeta_j^{(i_2)}\zeta_k^{(i_3)}\zeta_l^{(i_4)} - \\
& -\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}}\mathbf{1}_{\{j=k\}}\zeta_i^{(i_1)}\zeta_l^{(i_4)}\zeta_r^{(i_5)} - \mathbf{1}_{\{i_2=i_4\}}\mathbf{1}_{\{j=l\}}\zeta_i^{(i_1)}\zeta_k^{(i_3)}\zeta_r^{(i_5)} - \\
& -\mathbf{1}_{\{i_2=i_5\}}\mathbf{1}_{\{j=r\}}\zeta_i^{(i_1)}\zeta_k^{(i_3)}\zeta_l^{(i_4)} - \mathbf{1}_{\{i_3=i_4\}}\mathbf{1}_{\{k=l\}}\zeta_i^{(i_1)}\zeta_j^{(i_2)}\zeta_r^{(i_5)} - \\
& -\mathbf{1}_{\{i_3=i_5\}}\mathbf{1}_{\{k=r\}}\zeta_i^{(i_1)}\zeta_j^{(i_2)}\zeta_l^{(i_4)} - \mathbf{1}_{\{i_4=i_5\}}\mathbf{1}_{\{l=r\}}\zeta_i^{(i_1)}\zeta_j^{(i_2)}\zeta_k^{(i_3)} + \\
& +\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\mathbf{1}_{\{i=j\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_4\}}\mathbf{1}_{\{k=l\}}\zeta_r^{(i_5)} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\mathbf{1}_{\{i=j\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_5\}}\mathbf{1}_{\{k=r\}}\zeta_l^{(i_4)} + \\
& +\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\mathbf{1}_{\{i=j\}}\mathbf{1}_{\{i_4=i_5\}}\mathbf{1}_{\{l=r\}}\zeta_k^{(i_3)} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}}\mathbf{1}_{\{i=k\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_4\}}\mathbf{1}_{\{j=l\}}\zeta_r^{(i_5)} + \\
& +\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}}\mathbf{1}_{\{i=k\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_5\}}\mathbf{1}_{\{j=r\}}\zeta_l^{(i_4)} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}}\mathbf{1}_{\{i=k\}}\mathbf{1}_{\{i_4=i_5\}}\mathbf{1}_{\{l=r\}}\zeta_j^{(i_2)} + \\
& +\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\}}\mathbf{1}_{\{i=l\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}}\mathbf{1}_{\{j=k\}}\zeta_r^{(i_5)} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_4\}}\mathbf{1}_{\{i=l\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_5\}}\mathbf{1}_{\{j=r\}}\zeta_k^{(i_3)} + \\
& +\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\}}\mathbf{1}_{\{i=l\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_5\}}\mathbf{1}_{\{k=r\}}\zeta_j^{(i_2)} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_5\}}\mathbf{1}_{\{i=r\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}}\mathbf{1}_{\{j=k\}}\zeta_l^{(i_4)} + \\
& +\mathbf{1}_{\{i_1=i_5\}}\mathbf{1}_{\{i=r\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_4\}}\mathbf{1}_{\{j=l\}}\zeta_k^{(i_3)} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_5\}}\mathbf{1}_{\{i=r\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_4\}}\mathbf{1}_{\{k=l\}}\zeta_j^{(i_2)} + \\
& +\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}}\mathbf{1}_{\{j=k\}}\mathbf{1}_{\{i_4=i_5\}}\mathbf{1}_{\{l=r\}}\zeta_i^{(i_1)} + \mathbf{1}_{\{i_2=i_4\}}\mathbf{1}_{\{j=l\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_5\}}\mathbf{1}_{\{k=r\}}\zeta_i^{(i_1)} + \\
& +\mathbf{1}_{\{i_2=i_5\}}\mathbf{1}_{\{j=r\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_4\}}\mathbf{1}_{\{k=l\}}\zeta_i^{(i_1)}\Biggr),
\end{aligned}
\tag{3.23}
$$

где

$$
C_{kji} = \int\limits_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \phi_k(z)\int\limits_{\tau_p}^{z} \phi_j(y)\int\limits_{\tau_p}^{y} \phi_i(x)dxdydz = L_{ijk}\frac{\Delta^{3/2}}{8}\bar{C}_{kji},
$$

$$
C_{kji}^{001} = \int\limits_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} (\tau_p - z)\phi_k(z)\int\limits_{\tau_p}^{z} \phi_j(y)\int\limits_{\tau_p}^{y} \phi_i(x)dxdydz = L_{ijk}\frac{\Delta^{5/2}}{16}\bar{C}_{kji}^{001},
$$

$$
C_{kji}^{010} = \int\limits_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \phi_k(z)\int\limits_{\tau_p}^{z} (\tau_p - y)\phi_j(y)\int\limits_{\tau_p}^{y} \phi_i(x)dxdydz = L_{ijk}\frac{\Delta^{5/2}}{16}\bar{C}_{kji}^{010},
$$

$$
C_{kji}^{100} = \int\limits_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \phi_k(z)\int\limits_{\tau_p}^{z} \phi_j(y)\int\limits_{\tau_p}^{y} (\tau_p - x)\phi_i(x)dxdydz = L_{ijk}\frac{\Delta^{5/2}}{16}\bar{C}_{kji}^{100},
$$

$$C_{lkji}=\int\limits_{\tau_p}^{\tau_{p+1}}\phi_l(u)\int\limits_{\tau_p}^{u}\phi_k(z)\int\limits_{\tau_p}^{z}\phi_j(y)\int\limits_{\tau_p}^{y}\phi_i(x)dxdydzdu=M_{ijkl}\frac{\Delta^2}{16}\bar{C}_{lkji},$$

$$C_{rlkji}=\int\limits_{\tau_p}^{\tau_{p+1}}\phi_r(v)\int\limits_{\tau_p}^{v}\phi_l(u)\int\limits_{\tau_p}^{u}\phi_k(z)\int\limits_{\tau_p}^{z}\phi_j(y)\int\limits_{\tau_p}^{y}\phi_i(x)dxdydzdudv=N_{ijklr}\frac{\Delta^{5/2}}{32}\bar{C}_{rlkji},$$

$$\bar{C}_{kji}=\int\limits_{-1}^{1}P_k(z)\int\limits_{-1}^{z}P_j(y)\int\limits_{-1}^{y}P_i(x)dxdydz, \tag{3.24}$$

$$\bar{C}_{kji}^{100}=-\int\limits_{-1}^{1}P_k(z)\int\limits_{-1}^{z}P_j(y)\int\limits_{-1}^{y}P_i(x)(x+1)dxdydz, \tag{3.25}$$

$$\bar{C}_{kji}^{010}=-\int\limits_{-1}^{1}P_k(z)\int\limits_{-1}^{z}P_j(y)(y+1)\int\limits_{-1}^{y}P_i(x)dxdydz, \tag{3.26}$$

$$\bar{C}_{kji}^{001}=-\int\limits_{-1}^{1}P_k(z)(z+1)\int\limits_{-1}^{z}P_j(y)\int\limits_{-1}^{y}P_i(x)dxdydz, \tag{3.27}$$

$$\bar{C}_{lkji}=\int\limits_{-1}^{1}P_l(u)\int\limits_{-1}^{u}P_k(z)\int\limits_{-1}^{z}P_j(y)\int\limits_{-1}^{y}P_i(x)dxdydzdu, \tag{3.28}$$

$$\bar{C}_{rlkji}=\int\limits_{-1}^{1}P_r(v)\int\limits_{-1}^{v}P_l(u)\int\limits_{-1}^{u}P_k(z)\int\limits_{-1}^{z}P_j(y)\int\limits_{-1}^{y}P_i(x)dxdydzdudv, \tag{3.29}$$

$$L_{ijk}=\sqrt{(2i+1)(2j+1)(2k+1)},$$

$$M_{ijkl}=\sqrt{(2i+1)(2j+1)(2k+1)(2l+1)},$$

$$N_{ijklr}=\sqrt{(2i+1)(2j+1)(2k+1)(2l+1)(2r+1)},$$

$P_i(x);\ i=0,1,2,\ldots$ — ортонормированные на отрезке $[-1,1]$ полиномы Лежандра [23, с. 120]; $\zeta_j^{(i)}$ $(i=1,\ldots,m:\ j=0,\ 1,\ldots,q+2)$ — независимые при различных i или j стандартные гауссовские случайные величины; $\mathbf{1}_A$ — индикатор множества A;

$$\phi_i(x)=\sqrt{\frac{2i+1}{\Delta}}P_i\left(\left(x-\tau_p-\frac{\Delta}{2}\right)\frac{2}{\Delta}\right);\quad i=0,1,2,\ldots.$$

В [1] отмечалось, что коэффициенты Фурье $\bar{C}_{kji}$ и $\bar{C}_{lkji}$ (то же самое касается и коэффициентов Фурье $\bar{C}_{kji}^{001}$, $\bar{C}_{kji}^{010}$, $\bar{C}_{kji}^{100}$, $\bar{C}_{rlkji}$) могут быть вычислены точно с помощью компьютерных пакетов символьных преобразований таких, как, например, DERIVE. В монографии [15] составлены таблицы точно вычисленных с помощью программы DERIVE указанных коэффициентов Фурье. Важно отметить, что коэффициенты Фурье (3.24)–(3.29) не зависят от шага интегрирования $\tau_{p+1} - \tau_p$ численного метода, который может быть переменным.

Вообще говоря, минимальные числа q, обеспечивающие выполнение условия (2.5) для каждой из аппроксимаций (3.15)–(3.23), различны и резко убывают с ростом порядка малости аппроксимации повторного стохастического интеграла по величине Δ.

Рассмотрим более подробно выбор указанных чисел q.

В [1, 17–19] с помощью теоремы 2 получены следующие точные формулы для среднеквадратических погрешностей аппроксимации стохастических интегралов Ито кратности 2:

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{(00)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1 i_2)} - I_{(00)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1 i_2)q}\right)^2\right\} = \frac{\Delta^2}{2}\left(\frac{1}{2} - \sum_{i=1}^{q}\frac{1}{4i^2-1}\right), \tag{3.30}$$

$$\begin{gathered}
\mathsf{M}\left\{\left(I_{(10)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1 i_2)} - I_{(10)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1 i_2)q_1}\right)^2\right\} = \\
= \mathsf{M}\left\{\left(I_{(01)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1 i_2)} - I_{(01)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1 i_2)q_1}\right)^2\right\} = \\
= \frac{\Delta^4}{16}\left(\frac{5}{9} - 2\sum_{i=2}^{q_1}\frac{1}{4i^2-1} - \sum_{i=1}^{q_1}\frac{1}{(2i-1)^2(2i+3)^2} - \right. \\
\left. - \sum_{i=0}^{q_1}\frac{(i+2)^2+(i+1)^2}{(2i+1)(2i+5)(2i+3)^2}\right) \ (i_1 \neq i_2),
\end{gathered} \tag{3.31}$$

$$\begin{gathered}
\mathsf{M}\left\{\left(I_{(10)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1 i_1)} - I_{(10)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1 i_1)q_2}\right)^2\right\} = \\
= \mathsf{M}\left\{\left(I_{(01)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1 i_1)} - I_{(01)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1 i_1)q_2}\right)^2\right\} = \\
= \frac{\Delta^4}{16}\left(\frac{1}{9} - \sum_{i=0}^{q_2}\frac{1}{(2i+1)(2i+5)(2i+3)^2} - 2\sum_{i=1}^{q_2}\frac{1}{(2i-1)^2(2i+3)^2}\right).
\end{gathered} \tag{3.32}$$

С помощью теоремы 3 получим следующие оценки для среднеквадратических погрешностей аппроксимации повторных стохастических интегралов

Ито кратности 3–5, входящих в численную схему (2.3):

$$\text{(3.33)} \qquad \mathsf{M}\left\{\left(I_{(000)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1 i_2 i_3)} - I_{(000)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1 i_2 i_3)q_3}\right)^2\right\} \le 6\left(\frac{\Delta^3}{6} - \sum_{i,j,k=0}^{q_3} C_{kji}^2\right),$$

$$\text{(3.34)} \qquad \mathsf{M}\left\{\left(I_{(100)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1 i_2 i_3)} - I_{(100)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1 i_2 i_3)q_4}\right)^2\right\} \le 6\left(\frac{\Delta^5}{60} - \sum_{i,j,k=0}^{q_4} \left(C_{kji}^{100}\right)^2\right),$$

$$\text{(3.35)} \qquad \mathsf{M}\left\{\left(I_{(010)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1 i_2 i_3)} - I_{(010)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1 i_2 i_3)q_5}\right)^2\right\} \le 6\left(\frac{\Delta^5}{20} - \sum_{i,j,k=0}^{q_5} \left(C_{kji}^{010}\right)^2\right),$$

$$\text{(3.36)} \qquad \mathsf{M}\left\{\left(I_{(001)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1 i_2 i_3)} - I_{(001)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1 i_2 i_3)q_6}\right)^2\right\} \le 6\left(\frac{\Delta^5}{10} - \sum_{i,j,k=0}^{q_6} \left(C_{kji}^{001}\right)^2\right),$$

$$\text{(3.37)} \qquad \mathsf{M}\left\{\left(I_{(0000)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1 i_2 i_3 i_4)} - I_{(0000)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1 i_2 i_3 i_4)q_7}\right)^2\right\} \le 24\left(\frac{\Delta^4}{24} - \sum_{i,j,k,l=0}^{q_7} C_{lkji}^2\right),$$

$$\text{(3.38)} \quad \mathsf{M}\left\{\left(I_{(00000)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1 i_2 i_3 i_4 i_5)} - I_{(00000)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1 i_2 i_3 i_4 i_5)q_8}\right)^2\right\} \le 120\left(\frac{\Delta^5}{120} - \sum_{i,j,k,l,r=0}^{q_8} C_{rlkji}^2\right).$$

Отметим, что при попарно различных $i_1, \ldots, i_5 = 1, \ldots, m$ по теореме 2 при $q_3 = 6$, $q_4 = \ldots = q_7 = 2$, $q_8 = 1$ имеем:

$$\text{(3.39)} \quad \mathsf{M}\left\{\left(I_{(000)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1 i_2 i_3)} - I_{(000)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1 i_2 i_3)6}\right)^2\right\} = \frac{\Delta^3}{6} - \sum_{i,j,k=0}^{6} C_{kji}^2 \approx 0{,}01956000\Delta^3,$$

$$\text{(3.40)} \quad \mathsf{M}\left\{\left(I_{(100)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1 i_2 i_3)} - I_{(100)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1 i_2 i_3)2}\right)^2\right\} = \frac{\Delta^5}{60} - \sum_{i,j,k=0}^{2} \left(C_{kji}^{100}\right)^2 \approx 0{,}00815429\Delta^5,$$

$$\text{(3.41)} \quad \mathsf{M}\left\{\left(I_{(010)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1 i_2 i_3)} - I_{(010)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1 i_2 i_3)2}\right)^2\right\} = \frac{\Delta^5}{20} - \sum_{i,j,k=0}^{2} \left(C_{kji}^{010}\right)^2 \approx 0{,}01739030\Delta^5,$$

$$\text{(3.42)} \quad \mathsf{M}\left\{\left(I_{(001)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1 i_2 i_3)} - I_{(001)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1 i_2 i_3)2}\right)^2\right\} = \frac{\Delta^5}{10} - \sum_{i,j,k=0}^{2} \left(C_{kji}^{001}\right)^2 \approx 0{,}02528010\Delta^5,$$

$$\text{(3.43)} \quad \mathsf{M}\left\{\left(I_{(0000)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1 i_2 i_3 i_4)} - I_{(0000)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1 i_2 i_3 i_4)2}\right)^2\right\} = \frac{\Delta^4}{24} - \sum_{i,j,k,l=0}^{2} C_{lkji}^2 \approx 0{,}02360840\Delta^4,$$

$$\text{(3.44)} \quad \mathsf{M}\left\{\left(I_{(00000)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1 i_2 i_3 i_4 i_5)} - I_{(00000)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1 i_2 i_3 i_4 i_5)1}\right)^2\right\} = \frac{\Delta^5}{120} - \sum_{i,j,k,l,r=0}^{1} C_{rlkji}^2 \approx 0{,}00759105\Delta^5.$$

Учитывая, что величина Δ играет роль шага интегрирования численного метода (2.3) для СДУ Ито (1.1) и является в силу этого достаточно малой величиной, получим, что уже при $q_3 = 6$, $q_4 = \ldots = q_7 = 2$, $q_8 = 1$ среднеквадратические погрешности аппроксимации (3.39)–(3.44) повторных стохастических интегралов Ито кратности 3–5 достаточно малы.

Следует отметить, что в [3, 9, 10, 24] в рамках метода аппроксимации повторных стохастических интегралов, основанного на тригонометрических разложениях Фурье компонет векторного винеровского процесса [9], предлагается оценивать среднеквадратическую погрешность аппроксимации повторных стохастических интегралов кратности 3 и выше (здесь учитываются интегрирования как по компонентам векторного винеровского процесса, так и по времени) величиной вида

$$\frac{C_1 \Delta^2}{q},$$

где C_1 — постоянная, а Δ и q имеют тот же смысл, что и в (3.30). Очевидно, что указанный подход является более грубым, чем подход, основанный на теоремах 2 и 3 (см. (3.30)–(3.44)).

4. Алгоритм численного моделирования с порядком сильной сходимости 2,5

Сформулируем в виде алгоритма приведенные формулы и рекомендации, касающиеся численного метода (2.3) с порядком сильной сходимости 2,5.

Будем считать, что необходимые коэффициенты Фурье $\bar{C}_{kji}$, $\bar{C}_{lkji}$, $\bar{C}^{001}_{kji}$, $\bar{C}^{010}_{kji}$, $\bar{C}^{100}_{kji}$, $\bar{C}_{rlkji}$ уже вычислены (в частности, в [15] приведены таблицы точно вычисленных с помощью компьютерной программы DERIVE указанных коэффициентов).

Алгоритм 1.

Шаг 1. Задаются исходные параметры задачи: промежуток интегрирования $[0, T]$, шаг интегрирования Δ (например постоянный $\Delta = T/N$; $N > 1$, хотя допускается выбор переменного шага интегрирования), начальное условие $\mathbf{y}_0$, постоянная C, входящая в условие (2.5).

Шаг 2. Полагаем $p = 0$.

Шаг 3. Выбор минимальных чисел q и $q_1, \ldots, q_8$ $(q_1, \ldots, q_8 < q)$, при которых правые части (3.30)–(3.38) не превосходят правую часть неравенства (2.5).

Шаг 4. Моделирование последовательности независимых стандартных гауссовских случайных величин $\zeta_l^{(i)}$ $(l = 0, 1, \ldots, q;\ i = 1, \ldots, m)$.

Шаг 5. Моделирование стохастических интегралов Ито

$$I^{(i_1)}_{(0)\tau_{p+1},\tau_p},\ I^{(i_1)}_{(1)\tau_{p+1},\tau_p},\ I^{(i_1)}_{(2)\tau_{p+1},\tau_p},\ I^{(i_1 i_2)}_{(00)\tau_{p+1},\tau_p},\ I^{(i_1 i_2)}_{(10)\tau_{p+1},\tau_p},\ I^{(i_1 i_2)}_{(01)\tau_{p+1},\tau_p},$$
$$I^{(i_1 i_2 i_3)}_{(000)\tau_{p+1},\tau_p},\ I^{(i_1 i_2 i_3)}_{(100)\tau_{p+1},\tau_p},\ I^{(i_1 i_2 i_3)}_{(010)\tau_{p+1},\tau_p},\ I^{(i_1 i_2 i_3)}_{(001)\tau_{p+1},\tau_p},\ I^{(i_1 i_2 i_3 i_4)}_{(0000)\tau_{p+1},\tau_p},\ I^{(i_1 i_2 i_3 i_4 i_5)}_{(00000)\tau_{p+1},\tau_p}$$

по формулам (3.12)–(3.23) с учетом выбранных на шаге 3 чисел q и $q_1, \ldots, q_8$.

Шаг 6. Производим вычисление $\mathbf{y}_{p+1}$ по формуле (2.3).

Шаг 7. Если $p < N - 1$, то полагаем $p = p + 1$ и переходим к шагу 4. В противном случае переходим к шагу 8.

Шаг 8. Конец работы алгоритма.

5. Заключение

В статье получены эффективные процедуры среднеквадратической аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито кратности 1–5, основанные на кратных рядах Фурье–Лежандра. Данные результаты могут быть использованы для реализации численных методов с порядком сильной сходимости 2,5 для СДУ Ито с многомерным неаддитивным шумом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кузнецов Д.Ф.* К численному моделированию многомерных динамических систем при случайных возмущениях с порядками сильной сходимости 1,5 и 2,0 // АиТ. 2018. № 7. С. 80-98.

   Kuznetsov D.F. On Numerical Modeling of the Multidimensional Dynamic Systems under Random Perturbations with the 1.5 and 2.0 Orders of Strong Convergence // Autom. Remote Control. 2018. V. 79. No. 7. P. 1240–1254.
2. *Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.* Статистика случайных процессов: Нелинейная фильтрация и смежные вопросы. М.: Наука, 1974.
3. *Kloeden P.E., Platen E.* Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. Berlin: Springer, 1992.
4. *Kloeden P.E., Platen E., Schurz H.* Numerical solution of SDE through computer experiments. Berlin: Springer, 2003.
5. *Ширяев А.Н.* Основы стохастической финансовой математики. Т. 1, 2. М.: Фазис, 1998.
6. *Platen E., Bruti-Liberati N.* Numerical Solution of Stochastic Differential Equations with Jumps in Finance. Berlin–Heidelberg: Springer, 2010.
7. *Стратонович Р.Л.* Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М.: Советское радио, 1961.
8. *Arato M.* Linear Stochastic Systems with Constant Coefficients. A Statistical Approach. Berlin–Heidelberg–N.Y.: Springer, 1982.
9. *Мильштейн Г.Н.* Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений. Свердловск: Изд-во Урал. ун-та, 1988.
10. *Milstein G.N., Tretyakov M.V.* Stochastic Numerics for Mathematical Physics. Berlin: Springer, 2004.
11. *Han X., Kloeden P.E.* Random Ordinary Differential Equations and Their Numerical Solution. Singapore: Springer, 2017.
12. *Platen E., Wagner W.* On a Taylor formula for a class of Ito processes // Probab. Math. Statist. 1982. No. 3. P. 37–51.
13. *Kloeden P.E., Platen E.* The Stratonovich and Ito–Taylor Expansions // Math. Nachr. 1991. V. 151. P. 33–50.
14. *Кульчицкий О.Ю., Кузнецов Д.Ф.* Унифицированное разложение Тейлора–Ито // Зап. научн. семинаров ПОМИ РАН. Вероятность и статистика. 2. СПб.: 1997. Т. 244. С. 186–204.

15. *Кузнецов Д.Ф.* Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений. 2. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2006.
16. *Ширяев А.Н.* Вероятность. М:. Наука, 1989.
17. *Kuznetsov D.F.* Strong Approximation of Multiple Ito and Stratonovich Stochastic Integrals: Multiple Fourier Series Approach. 2nd Ed. S.-Petersburg: Polytechn. Univ. Publ. House, 2011.
18. *Kuznetsov D.F.* Multiple Ito and Stratonovich Stochastic Integrals: Fourier–Legendre and Trigonometric Expansions, Approximations, Formulas // Electr. J. Differ. Equat. Control Proc. 2017. No. 1. P. A.1–A.385.
19. *Кузнецов Д.Ф.* Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения. С программами в среде MatLab. Изд. 5-е. // Электр. журн. Диффер. уравнения и проц. управления. 2017. № 2. С. A.1-A.1000.
20. *Allen E.* Approximation of Triple Stochastic Integrals Through Region Subdivision // Commun. Appl. Anal. Special Tribute Issue Prof. V. Lakshmikantham. 2013. V. 17. P. 355–366.
21. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. Киев: Наук. думка, 1982.
22. *Kuznetsov D.F.* Expansion of Multiple Stratonovich Stochastic Integrals of Fifth Multiplicity, Based on Generalized Multiple Fourier Series. arXiv:1802.00643 [math.PR]. 2018, 21 pp.
23. *Суетин П.К.* Классические ортогональные многочлены. М.: Физматлит, 2005.
24. *Kloeden P.E., Platen E., Wright I.W.* The Approximation of Multiple Stochastic Integrals // Stoch. Anal. Appl. 1992. V. 10. No. 4. P. 431–441.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.М. Миллером.

Поступила в редакцию 15.07.2018

После доработки 02.11.2018

Принята к публикации 08.11.2018