

# Оптимизация, системный анализ и исследование операций

© 2019 г. А.Н. КАРКИЩЕНКО, д-р физ.-мат. наук (karkishalex@gmail.com),  
В.Х. ПШИХОПОВ, д-р техн. наук (pshichop@rambler.ru)  
(Научно-конструкторское бюро робототехникии систем управления, Таганрог)

## К ОПРЕДЕЛЕНИЮ СЛОЖНОСТИ СРЕДЫ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ПОДВИЖНОГО ОБЪЕКТА НА ПЛОСКОСТИ<sup>1</sup>

Рассматривается задача формального определения показателей сложности среды подвижного объекта, функционирующего на плоскости при наличии препятствий. Дается математическое обоснование метода вычисления сложности. Вводятся понятия локальной и интегральной сложностей среды. Даны расчетные формулы для вычисления сложности. Приводятся результаты моделирования.

*Ключевые слова:* подвижный объект, сцена, триангуляция, локальная сложность, интегральная сложность.

DOI: 10.1134/S0005231019050088

### 1. Введение

Организации функционирования автономных подвижных объектов (ПО) в неопределенных, априори недетерминированных, средах сегодня посвящены многие исследования [1, 2]. При этом выбор стратегий поведения ПО и алгоритмов планирования траекторий их движений требует при реализации их систем управления использования новых методов и подходов, привлечения интеллектуальных технологий и их комплексирования для парирования неопределенностей среды функционирования [3]. Причем процедура выбора этих подходов, адекватно отражающих состояние среды функционирования, часто носит эвристический характер. В частности, в [3] показано, что в сложных средах такое комплексирование может приводить к существенному, до 50%, увеличению значений показателя качества функционирования. Но, с другой стороны, использование совокупности тех же методов в простых средах приводит к незначительному, около 10%, изменению показателя качества. При этом понятие сложности среды на сегодняшний день во многом является интуитивным, что не позволяет формализовать процедуру выбора того или иного подхода к планированию движений подвижного объекта, соответствующего сложности среды и, следовательно, повысить эффективность функционирования ПО. Другими словами, требуется формирование количественно измеримых характеристик среды функционирования подвижного

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № 18-19-00621).

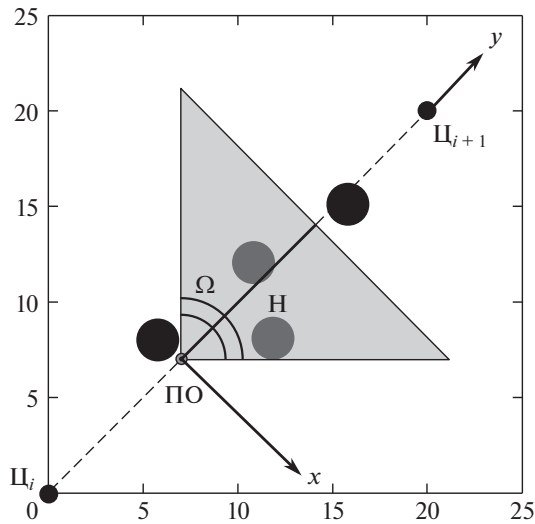


Рис. 1. Сцена среды функционирования с ПО.

объекта, позволяющих обоснованно выбирать наиболее подходящий метод планирования. Это соображение стало основной мотивацией данной статьи, целью которой является построение меры сложности среды функционирования подвижного объекта.

Понятие сложности возникает в различных областях исследований. Однако единообразно понимаемого определения сложности нет. “Значение этой величины должно быть очень близко к определенным мерам сложности, связанным с объектом или рассматриваемой системой: трудность построения объекта, сложность описания системы, трудность достижения цели, трудность выполнения задачи и т.п.” [4]. Конкретные задачи порождают необходимость вводить специфические определения этого понятия.

В [5] рассматривается подход к определению сложности сцен с точки зрения визуальной видимости образующих ее поверхностей и в условиях диффузного освещения этих поверхностей. В [6] дается метод оценки сложности полигональных сцен на основе графов достижимости. Публикация [7] посвящена введению понятия сложности видимой части трехмерной сцены в зависимости от точки наблюдения. В [8] дается метод оценки видимой сложности сцены при анимации, т.е. предпринята попытка разработать методы оценки сложности изменяющихся сцен. При этом в [6] используется геометрический подход к описанию сложности, который при большом количестве элементов на сцене оказывается вычислительно трудоемким, а в [5, 7, 8] используется вычислительно более простой статистический подход к введению понятия сложности с точки зрения теории информации. Вместе с тем все эти методы порождены и связаны с задачами машинной графики и имеют слабое отношение к оценке сложности среды, в которой функционирует автономный подвижный объект.

Представленная статья посвящена определению количественного показателя сложности плоской среды (сцены) на основе данных системы техниче-

ского зрения, имеющей секторный обзор с дальностью  $H$  и углом обзора  $\Omega$ , как это представлено на рис. 1. Неформальная постановка задачи состоит в следующем. ПО перемещается на плоской поверхности. Задача объекта — попасть в целевую точку  $C$ . Как правило, при формировании глобальных траекторий (миссий) ПО перемещается от точки  $C_i$  к точке  $C_{i+1}$  вдоль отрезков прямых, соединяющих эти точки. В случае наличия препятствий  $P$ , детектируемых в секторе обзора системы технического зрения, ПО должен оценить сложность среды на основе некоторого скалярного показателя и принять решение об использовании той или иной стратегии поведения, соответствующей этой сложности.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 приводятся основные определения и допущения, в условиях которых строится модель сложности среды. В разделах 3, 4 и 5 вводится триангуляция сцены, ее топологическое и метрическое описания. В разделах 6, 7 и 8 определяются локальный и интегральный показатели сложности среды соответственно. В разделе 9 приводятся результаты моделирования и вычисления сложностей на плоских сценах.

## 2. Основные определения и допущения

Примем некоторые упрощающие соглашения относительно подвижного объекта и препятствий. Будем считать, что все препятствия и сам подвижный объект представляют собой круги. Круг обладает бесконечной группой симметрий, что значительно упрощает многие связанные с ним рассуждения и построения. Если реальное препятствие не является кругом, то будем считать, что оно замещается в расчетах минимальным кругом, содержащим внутри себя это препятствие. Поэтому размеры препятствий и объекта характеризуются одним числом — радиусом представляющего их круга.

Будем считать, что количество, положение и размеры препятствий заранее неизвестны планирующей системе подвижного объекта, но могут оцениваться в процессе его функционирования в реальном времени. Для определенности будем предполагать, что вершина *сектора* обзора системы технического зрения находится в центре объекта. Сканируемый сектор  $S$  всегда симметричен относительно оси объекта (совпадающей с направлением его движения) и имеет фиксированный угол  $\Omega$  при вершине.

Стороны, образующие сектор, всегда являются отрезками прямых линий, что определяется технологией сканирования пространства перед объектом. Сторона, противолежащая вершине сектора, может быть произвольной, в том числе криволинейной, может иметь изломы и разрывы, поскольку она является результатом сканирования реального пространства. Однако для простоты будем считать ее тоже прямой и будем называть эти стороны *правой*, *левой* и *фронтальной* границами сектора  $S$ .

Все построения будем рассматривать в прямоугольной системе координат, связанной с объектом, в которой начало координат совпадает с центром объекта, ось ординат совпадает с осью объекта в направлении его движения, а ось абсцисс направлена вправо.

Дополнительное допущение состоит в предположении, что пространство сцены за пределами сканируемого сектора полностью занято препятствиями.

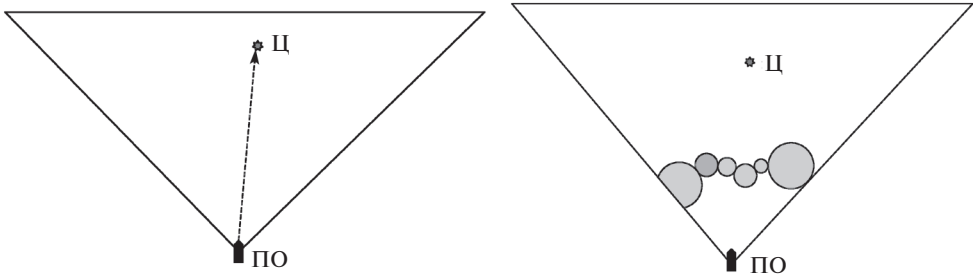


Рис. 2. Примеры предельно простой и предельно сложной среды.

В зависимости от положения цели  $\Pi_{i+1}$  и подвижного объекта, от количества, размеров и расположения в секторе препятствий сложность достижения цели подвижным объектом будет различной. Эта “сложность” может меняться от минимальной, если препятствий вообще нет в секторе  $S$ , до максимальной, когда препятствия перекрывают цель и не позволяют проложить маршрут движения к цели (рис. 2).

Под показателем сложности среды  $\delta$ , определяемым на секторе  $S$ , будем понимать меру, количественно характеризующую сложность достижения объектом заданной цели в среде, содержащей препятствия. Важно отметить, что такая мера должна зависеть не только от параметров самой среды, в частности от размеров, количества и расположения препятствий, но и от размеров самого подвижного объекта. Среда, являющаяся относительно простой для небольшого объекта, может оказаться сложной для габаритного объекта, поскольку для него цель может оказаться недостижимой из-за отсутствия достаточно широких проходов между препятствиями.

Естественно потребовать, чтобы мера сложности была *неотрицательной* и удовлетворяла условию *нормированности*, т.е.  $0 \leq \delta \leq 1$ , причем равенство нулю должно соответствовать максимально простой среде, на которой нет препятствий и траектория движения объекта в которой может быть отрезком прямой. Равенство единице должно соответствовать максимально сложной среде, на которой невозможно реализовать движение к цели.

### 3. Триангуляция и плоское разбиение сектора

Будем считать, что подвижный объект всегда находится в вершине сектора  $S$  и  $\Omega = \pi/2$ . Введем некоторое полигональное разбиение сектора  $S$ :

$$S = \bigcup_i S_i, \quad m(S_i \cap S_j) = 0, \quad i \neq j,$$

где  $m(*)$  – некоторая площадная мера<sup>2</sup>.

<sup>2</sup> Введение площадной меры позволяет “расширить” понятие разбиения множества до разбиения на множество пересекающихся не более чем по границам множеств. Тем самым области разбиения можно рассматривать как замкнутые, полужамкнутые или открытые множества.

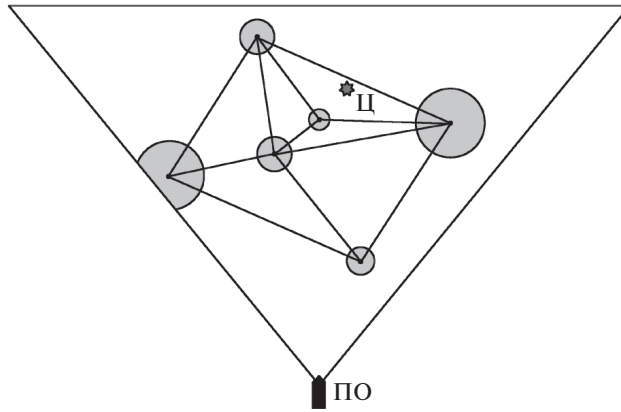


Рис. 3. Триангуляция центров препятствий.

Две области разбиения называются *смежными*, если они имеют общую границу ненулевой длины.

Разбиение сектора приобретает больший смысл и становится легко интерпретируемым, если связать его с расположением препятствий.

Для определенности будем далее считать, что на сцене заданы  $n$  препятствий  $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n$ . Каждое препятствие будем характеризовать тройкой чисел  $\Pi_i = (x_i, y_i, r_i)$ , где  $x_i, y_i$  — координаты центра препятствия, а  $r_i$  — его радиус. Центр  $i$ -го препятствия будем обозначать  $p_i(x_i, y_i)$ .

Пусть  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  — множество центров препятствий. Построим на этом множестве триангуляцию Делоне [9]. Следует отметить, что триангуляция Делоне, а также двойственная к ней конструкция — диаграмма Вороного эффективно используются при планировании путей перемещения подвижных объектов [10]. В частности, в [11, 12] все пространство состояний беспилотного летательного аппарата путем дискретизации преобразуется в конечный набор точек, на котором строится диаграмма Вороного для планирования пути. Идея использования триангуляции Делоне, связанной с препятствиями или в более общем случае с местами, представляющими угрозу для движущегося объекта, реализована в [13–15]. Обозначим через

$$\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k\} \subseteq P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$$

упорядоченную последовательность центров препятствий, принадлежащих границе выпуклой оболочки всех центров препятствий. Триангуляция Делоне порождает плоское разбиение внутренней части сектора, ограниченного контуром  $\Gamma$ . Однако часть среды, внешняя по отношению к выпуклой оболочке  $\Gamma$ , оказывается вне действия алгоритма триангуляции. Она будет представлять собой некоторую нерегулярную, возможно, несвязную область (рис. 3). Чтобы продолжить действие алгоритма триангуляции на весь сектор, поступим следующим образом.

Рассмотрим правую границу  $OA$  сектора  $S$ . Через среднюю точку  $C$  отрезка  $OA$  проведем перпендикулярную к отрезку прямую и на внешней ее части

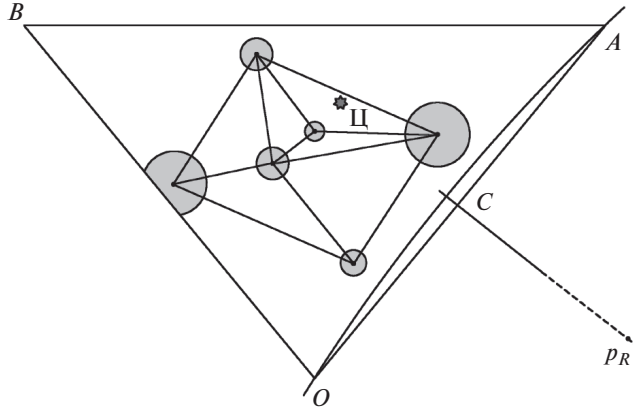


Рис. 4. Построение вспомогательных центров препятствий.

выберем точку  $p_R$ . Построим окружность с центром в точке  $p_R$ , проходящую через точки  $O$  и  $A$  (рис. 4).

Отрезок  $OA$  можно рассматривать как хорду, стягивающую дугу окружности  $OA$ . При удалении точки  $p_R$  от сектора  $S$  дуга окружности будет стягиваться к отрезку  $OA$  и при достаточно большом радиусе этой окружности будет практически совпадать с ней. Круг с центром в точке  $p_R$  радиуса  $r_R = |\overline{p_R A}| = |\overline{p_R O}|$  будем рассматривать как виртуальное препятствие  $\Pi_R = (p_R, r_R) = (x_R, y_R, r_R)$ . С помощью аналогичных построений введем виртуальные препятствия  $\Pi_L$  и  $\Pi_F$  с центрами в точках  $p_L$  и  $p_F$  для левой и фронтальной границ сектора соответственно.

Нетрудно убедиться, что виртуальные препятствия будут определяться следующими параметрами:

$$\begin{aligned} \Pi_R &= (p_R, r_R) = (x_R, y_R, r_R) = \left( t, H - t, \sqrt{t^2 + (t - H)^2} \right), \\ \Pi_L &= (p_L, r_L) = (x_L, y_L, r_L) = \left( -t, H - t, \sqrt{t^2 + (t - H)^2} \right), \\ \Pi_F &= (p_F, r_F) = (x_F, y_F, r_F) = \left( 0, t, \sqrt{H^2 + (t - H)^2} \right), \end{aligned}$$

где  $H$  (см. рис. 1) — длина осевой линии сектора, а  $t$  — достаточно большая положительная величина. Например, можно положить  $t = 100H$ .

Следует заметить, что виртуальные препятствия будут по построению пересекаться за пределами сектора  $S$ . Однако этот факт можно игнорировать, поскольку препятствия виртуальны, их введение носит формальный характер и обусловлено необходимостью построить на основе триангуляции Делоне правильное плоское разбиение всего сектора. Очевидно, что при введении описанным образом дополнительных точек построенная ранее триангуляция Делоне не изменится, но при этом добавятся новые треугольные области, имеющие в качестве одной или двух своих вершин центры виртуальных препятствий.

В результате этих построений получим триангуляцию Делоне совокупности точек, определяемых центрами препятствий, и трех центров виртуальных препятствий. При таком построении сектор  $S$  будет находиться строго внутри выпуклой оболочки триангуляции (при достаточно большом значении  $t$ ), представляющей собой треугольник с вершинами в точках  $p_R, p_L$  и  $p_F$ . Пересечение сектора  $S$  с полученной триангуляцией порождает его плоское разбиение. Важно отметить, что все плоские области в секторе  $S$  окажутся по построению во взаимно однозначном соответствии с треугольными областями полученной триангуляции точек  $\{p_1, p_2, \dots, p_n\} \cup \{p_R, p_L, p_F\}$ .

Все внутренние грани полученного разбиения сектора  $S$  будут треугольниками Делоне, а граничные, т.е. имеющие одно или два ребра, совпадающих с границами сектора, — четырехугольниками. При этом можно считать центры виртуальных препятствий устремленными в бесконечность вдоль средних перпендикуляров. В этом случае граничные области (в том числе и три угловых области) будут четырехугольниками, два ребра которых перпендикулярны к соответствующим границам, что упрощает в последующем их метрический анализ<sup>3</sup>.

#### 4. Топологическое описание триангуляции. Ширина пути. Проходимость среды

Для описания полученного разбиения сектора  $S$  построим граф  $G = (X, U)$ ,  $|X| = N$ ,  $|U| = M$ , следующим образом. Вершины графа взаимно однозначно соответствуют  $N$  областям разбиения сектора. При этом две вершины смежны в том и только в том случае, если соответствующие области имеют общую границу ненулевой длины. Таким образом, все точки, лежащие внутри некоторой области разбиения, отображаются в одну и ту же вершину графа. Оказывается, что при описанном построении триангуляции количество  $n$  препятствий, количество  $M$  ребер и количество  $N$  плоских областей разбиения сектора связаны между собой простыми соотношениями.

*Утверждение.*

- 1)  $N = 2n + 1$ ;
- 2)  $M = 3n + 3$ .

Доказательство утверждения приведено в Приложении.

Точки, определяющие местоположение объекта и цели, окажутся внутри некоторых участков плоского разбиения, поэтому они также будут отождествлены с некоторыми вершинами построенного графа. Если они окажутся отождествленными с одной и той же вершиной, то сложность сцены равна нулю. Поэтому будем считать, что подвижный объект и цель соответствуют различным вершинам графа.

---

<sup>3</sup> Если говорить о свободных областях (не занятых препятствиями) при таком разбиении, то на самом деле при ненулевых радиусах препятствий они будут шестиугольными и пятиугольными (для угловых граней). Кроме того, помимо прямолинейных они будут содержать также и криволинейные границы.

Возможный переход на графе из одной вершины в другую соответствует перемещению объекта из одной области плоского разбиения в соседнюю область. При этом объект неизбежно должен пересечь воображаемый отрезок, соединяющий центры соседних препятствий. Надо учесть, что препятствия имеют ненулевые габариты и по предположению являются кругами. Поэтому если соседние препятствия имеют координаты центров  $(\xi_i, \eta_i)$  и  $(\xi_j, \eta_j)$  и соответственно радиусы  $r_i$  и  $r_j$ , то для подвижного объекта радиуса  $\rho$  промежуток между препятствиями будет доступным для прохождения, если выполняется условие достаточности его “ширины”:

$$\sqrt{(\xi_i - \xi_j)^2 + (\eta_i - \eta_j)^2} - r_i - r_j - 2\rho > 0.$$

Другими словами, свободное расстояние между препятствиями должно быть больше, чем удвоенный радиус подвижного объекта.

Каждое ребро на графе  $G = (X, U)$  взаимно однозначно соответствует какому-то ребру на триангуляции. Поэтому каждому ребру на графе  $G = (X, U)$  можно приписать вес, характеризующий его “ширину”. Другими словами, можно ввести определенную на ребрах из  $U$  функцию  $w(u)$ : если

$$w_{ij} = w(u_{ij}) = w((x_i, x_j)),$$

то

$$w_{ij} = \begin{cases} \sqrt{(\xi_i - \xi_j)^2 + (\eta_i - \eta_j)^2} - r_i - r_j - 2\rho, & \text{если это выражение больше нуля,} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Предположим теперь, что  $G = (X, U, w)$  — взвешенный граф триангуляции Делоне, причем  $x_{\text{ПО}}$  — вершина, соответствующая области, содержащей объект, а  $x_{\text{Ц}}$  — вершина, соответствующая области, содержащей цель. Пусть  $P_i = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_{l+1}}$  — некоторый путь из  $x_{\text{ПО}}$  в  $x_{\text{Ц}}$  длины  $l$ , т.е.  $x_{i_1} = x_{\text{ПО}}$ ,  $x_{i_{l+1}} = x_{\text{Ц}}$ . Введем для удобства обозначение  $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$ . *Шириной пути* будем называть величину  $w(P_i) = \min_{k \in I_l} w(u_{i_k, i_{k+1}})$ , где  $u_{i_k, i_{k+1}}$  — ребро, соединяющее вершины  $x_{i_k}$  и  $x_{i_{k+1}}$ . Другими словами, ширина пути равна наименьшей ширине среди всех ребер, образующих этот путь.

Пусть теперь  $P = \{P_1, P_2, \dots, P_L\}$  — множество путей, соединяющих  $x_{\text{ПО}}$  и  $x_{\text{Ц}}$ . Тогда под *проходимостью* среды можно понимать максимальную ширину среди всех путей:  $\gamma(x_{\text{Ц}}) = \max_{i \in I_L} w(P_i)$ .

## 5. Матричная процедура вычисления проходимости

Для вычисления проходимости  $\gamma(x_{\text{Ц}})$  можно воспользоваться простой матричной процедурой [16]. Рассмотрим матрицу смежности  $R = \|r_{ij}\|$  графа  $G = (X, U, w)$ , где

$$r_{ij} = \begin{cases} w(u_{ij}), & \text{если } x_i \text{ и } x_j \text{ смежны,} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$



Матрица  $R$  имеет размеры  $N \times N$  или в силу приведенного утверждения —  $(2n + 1) \times (2n + 1)$ , а количество ненулевых элементов в ней равно  $6n$ .

Максиминная композиция  $R^{(2)} = R \circ R$  матрицы  $R$  с собой определяется по правилу:  $R^{(2)} = R \circ R = \left\| r_{ij}^{(2)} \right\|$ , где  $r_{ij}^{(2)} = \max_{k \in I_N} (\min(r_{ik}, r_{kj}))$ . В этом случае  $r_{ij}^{(2)}$  равно максимальной ширине среди ширин всех путей длины 2, соединяющих вершины  $x_i$  и  $x_j$ . В частности, это означает, что существует по крайней мере один путь длины 2 из  $x_i$  в  $x_j$ , ширина которого равна  $r_{ij}^{(2)}$ . Далее индуктивно определяем

$$R^{(3)} = R^{(2)} \circ R = \left\| r_{ij}^{(3)} \right\|, \dots, R^{(n+1)} = R^{(n)} \circ R = \left\| r_{ij}^{(n+1)} \right\|, \dots$$

Теперь заметим, что для любых  $i$  и  $j$  все пути из  $x_i$  в  $x_j$  распадаются на непесекающиеся классы путей топологической длины 1, 2, ... При этом некоторые из этих классов могут быть пустыми. Поэтому поиск ширины наиболее “безопасного” пути сводится к выбору наиболее “безопасного” пути среди наиболее “безопасных” путей в каждом классе, т.е.  $\max_{k \in I_\infty} r_{ij}^{(k)}$ .

Учитывая рефлексивность отношения, задаваемого графом  $G$ , при вычислении максиминных “степеней” матрицы достаточно ограничиться лишь матрицами  $R^{(1)} = R, R^{(2)}, \dots, R^{(N-1)}$ , поскольку  $R^{(N-1)} = R^{(N)} = R^{(N+1)} = \dots$ . Поэтому если, например,  $x_{\text{ПО}} = x_i$ , а  $x_{\text{Ц}} = x_j$ , то  $\gamma(x_{\text{Ц}}) = \max_{k \in I_{N-1}} r_{ij}^{(k)}$ .

## 6. Локальная мера сложности среды

Проходимость среды  $\gamma$  как характеристика сложности среды неудобна, поскольку она, с одной стороны, выражается в абсолютных единицах расстояния, т.е. зависит от выбранного масштаба измерений, а с другой — не удовлетворяет требованию нормированности. Рассмотрим выражение для меры сложности, связанное с вычисляемыми проходимостями и лишенное указанных недостатков. Точнее, будем рассматривать меру сложности как функцию  $\delta(\gamma)$  от проходимости  $\gamma$ .

Заметим, что с ростом  $\gamma$  естественно считать, что сложность  $\delta(\gamma)$  должна уменьшаться. При этом если  $\gamma$  достаточно велико, а  $\delta(\gamma)$  соответственно мало, то дальнейшее увеличение  $\gamma$  будет лишь незначительно уменьшать сложность. Напротив, при малых проходимостях сложность среды должна быть большой, а небольшие увеличения  $\gamma$  должны приводить к быстрому уменьшению сложности. Таким образом, можно считать, что скорость изменения сложности при любом значении достижимости  $\gamma$  обратно пропорциональна значению сложности при том же значении  $\gamma$ , т.е.  $\delta'(\gamma) = -\alpha\delta(\gamma)$ , где  $\alpha$  — некоторая положительная константа, характеризующая эту зависимость. Отсюда сразу получаем, что  $\delta(\gamma) = C e^{-\alpha\gamma}$ , где  $C$  — постоянная интегрирования, которая может быть установлена на основе следующих соображений. При  $\gamma = 0$  цель для объекта недостижима и сложность такой среды максимальна. Принимая во внимание требование нормированности меры сложности  $0 \leq \delta(\gamma) \leq 1$ , получаем, что  $\delta(0) = C = 1$ . Свойство неотрицательности

выполняется автоматически. Таким образом,  $\delta(\gamma) = e^{-\alpha\gamma}$ . При этом когда  $\gamma$  увеличивается до бесконечности, то сложность стремится к нулю.

Параметр  $\alpha$  определяет скорость убывания сложности с ростом  $\gamma$ . Выбор  $\alpha$  можно осуществить, например, следующим образом. Поскольку предельное значение  $\delta(\gamma) = 0$  формально достигается только при  $\gamma = \infty$ , то для реальных задач можно считать, что сложность “практически” равна нулю, если  $\delta(\gamma) \leq \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — малое положительное число. С другой стороны, можно полагать, что сложность практически равна нулю, если проходимость превышает радиус  $\rho$  подвижного объекта более чем в  $k$  раз. Другими словами, можно считать, что  $\varepsilon = e^{-\alpha \cdot k\rho}$ , откуда  $\alpha = -\frac{\ln \varepsilon}{k\rho}$ . С учетом этого выражение для меры сложности приобретает вид  $\delta(\gamma) = \varepsilon^{\frac{\gamma}{k\rho}}$ . Полагая, например,  $\varepsilon = 0,01$ , а  $k = 20$ , получаем  $\delta(\gamma) = 10^{-\frac{\gamma}{10\rho}}$ .

Значение проходимости среды, следовательно, и введенной меры сложности зависит от заданных координат  $p(x, y)$  цели. Поэтому выражение для меры сложности следует понимать как функцию  $\delta(\gamma(p)) = e^{-\alpha\gamma(p)}$ . Другими словами, при изменении положения цели или соответствующей ей точки в секторе сложность будет, вообще говоря, меняться. По этой причине данное выражение целесообразно назвать *локальной мерой сложности* среды, т.е. сложностью относительно фиксированной точки, определяющей конкретное положение цели.

## 7. Интегральная мера сложности с точечными препятствиями

Возникает вопрос, как охарактеризовать сложность среды вообще, т.е. безотносительно к заданной цели. Один из возможных подходов состоит в том, чтобы ввести некоторую характеристику, интегрально учитывающую сложность достижения каждой точки сектора, которая потенциально может являться целью. Такую меру естественно назвать *интегральной мерой сложности* среды. Подобная задача возникает, например, в том случае, если координаты цели заранее неизвестны, но сообщаются подвижному объекту в процессе его перемещения либо координаты могут изменяться с течением времени. Построить интегральную меру можно следующим образом.

Рассмотрим сначала случай, когда все препятствия (за исключением виртуальных) являются точечными, т.е. имеют нулевой радиус. Предположим для простоты, что треугольник Делоне, в котором находится подвижный объект, имеет номер 1. Обозначим через  $\delta_1^*(p)$  сложность достижения подвижным объектом, находящимся в вершине сектора  $S$ , произвольной точки  $p(x, y) \in S$ . Тогда в качестве интегральной характеристики сложности среды можно взять усреднение локальных мер сложности по всем точкам сектора:

$$\Delta(S) = \frac{1}{m(S)} \int_S \delta_1^*(p) dp,$$

где  $m(S)$  — площадь сектора  $S$ .

Для всех точек  $p$ , которые находятся внутри треугольника Делоне с номером  $k$ , величина проходимости является постоянной, т.е.  $\gamma(p) = r_{1k}$  и, значит,

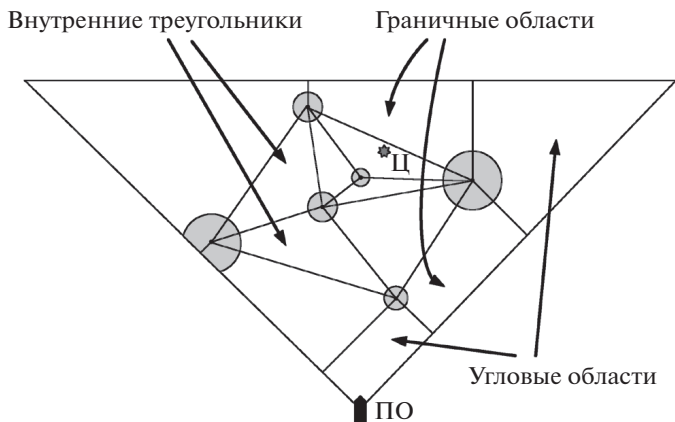


Рис. 5. Классы областей.

$\delta_1^*(p) = \delta_{1k} = e^{-\alpha r_{1k}}$ . Таким образом, функция  $\delta_1^*(p)$  является кусочно-постоянной на  $S$ . Поэтому, обозначая через  $S_k$   $k$ -ю область плоского разбиения сектора  $S$ , а через  $m(S_k)$  — ее площадь, получаем:

$$\begin{aligned}
 \Delta(S) &= \frac{1}{m(S)} \sum_{k=1}^N \int_{S_k} \delta_1^*(p) dp = \\
 (1) \quad &= \frac{1}{m(S)} \sum_{k=1}^N e^{-\alpha r_{1k}} m(S_k) = \sum_{k=1}^N \frac{m(S_k)}{m(S)} e^{-\alpha r_{1k}}.
 \end{aligned}$$

Здесь  $m(S) = H^2$ , где  $H$  — длина осевой линии сектора  $S$ .

Формула (1) получена в предположении, что препятствия являются точечными. В этом случае она допускает простую вероятностную интерпретацию. Если точка, задающая цель, является равномерно распределенной в  $S$  случайной величиной, то  $\frac{m(S_k)}{m(S)}$  — вероятность появления точки в области  $S_k$ . Тогда выражение (1) есть математическое ожидание функции локальной сложности для конкретной сцены с фиксированным набором препятствий.

При известных координатах центров препятствий величины  $m(S_k)$  можно вычислить геометрически. Однако формулы для их вычисления будут различными, поскольку области  $S_k$  являются фигурами нескольких разных геометрических классов (рис. 5), а именно:

- 1) все внутренние области будут треугольниками;
- 2) граничные области будут трапециями (в предположении бесконечной удаленности виртуальных препятствий), у которых одна из сторон совпадает с границей сектора, причем углы, образуемые этой стороной, прямые;
- 3) три угловые области будут четырехугольниками, которые составлены из двух прямоугольных треугольников, имеющих общую гипотенузу.

Во всех случаях площади  $m(S_k)$  легко определяются геометрически, если известны координаты центров препятствий. При этом очевидно, что внутрен-

**Таблица**

Области плоского разбиения сектора $S$	Площади $m(S_k)$ областей
Внутренние треугольники	$\frac{1}{2} (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) $
Правые граничные области	$\frac{1}{4} (x_1 - y_2)^2 - (x_2 - y_1)^2 $
Левые граничные области	$\frac{1}{4} (x_1 + y_2)^2 - (x_2 + y_1)^2 $
Фронтальные граничные области	$\frac{1}{2} x_1 - x_2  \cdot (2H - (y_1 + y_2))$
Угловая область, содержащая начало координат	$\frac{1}{2}(y^2 - x^2)$
Правая угловая область	$\frac{1}{4}(2(H - x)^2 - (x - y)^2)$
Левая угловая область	$\frac{1}{4}(2(H + x)^2 - (x + y)^2)$

ние области (треугольники) задаются координатами трех точек, граничные — двух, а угловые — координатами одной единственной точки. Соответствующие формулы для площадей указанных областей приведены в таблице.

В построенной триангуляции Делоне тип плоской области легко определяется путем анализа вершин, образующих эту область. В частности, если область образована внутренними вершинами (центрами реальных препятствий), то это *внутренний треугольник*. Если среди вершин имеется одна, задающая центр виртуального препятствия, то это граничная область, причем, если эта вершина — точка  $p_R$ , то это *правая граничная область*, если  $p_L$  — *левая граничная область*, если  $p_F$  — *фронтальная граничная область*. Наконец, если среди вершин имеются две точки, задающие центры виртуальных препятствий, то это угловые области. Наличие точек  $p_R$  и  $p_L$  означает, что это *угловая область, содержащая начало координат*, точки  $p_R$  и  $p_F$  означают, что область является *правой угловой областью*, а  $p_L$  и  $p_F$  — *левой угловой областью*.

## 8. Интегральная мера сложности с неточечными препятствиями

Построенная интегральная мера получена в предположении, что препятствия являются точечными. Ею можно приближенно пользоваться и в том случае, если размеры препятствий существенно меньше размеров сектора и их можно примерно считать точечными. Если же размеры препятствий соизмеримы с размерами сектора, то эта формула будет давать существенные ошибки. Чтобы избежать этого, необходимо учесть размеры препятствий, т.е. рассматривать разбиение области сектора, которая не занята препятствиями.

Если предположить, что каждое препятствие полностью находится внутри сектора, то, очевидно, площадь области, не занятой препятствиями, равна

$$\tilde{m}(S) = m(S) - (\text{суммарная площадь всех препятствий}) = H^2 - \pi \sum_{i=1}^n r_i^2.$$

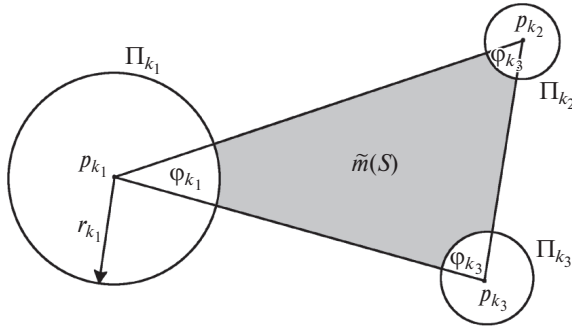


Рис. 6. Площадь области, не занятая препятствиями.

Соответственно площадь  $\tilde{m}(S_k)$  области  $S_k$ , не занятая препятствиями (рис. 6), равна

$$\tilde{m}(S_k) = m(S_k) - \frac{1}{2} (r_{k_1}^2 \varphi_{k_1} + r_{k_2}^2 \varphi_{k_2} + r_{k_3}^2 \varphi_{k_3}),$$

где  $r_{k_1}$ ,  $r_{k_2}$  и  $r_{k_3}$  — радиусы препятствий с центрами в соответствующих вершинах  $p_{k_1}$ ,  $p_{k_2}$  и  $p_{k_3}$  треугольника  $S_k$ , а  $\varphi_{k_1}$ ,  $\varphi_{k_2}$  и  $\varphi_{k_3}$  — внутренние углы при этих вершинах.

Формула упрощается, если радиусы всех препятствий равны, т.е.  $r_1 = \dots = r_n = r$ . Тогда для всех треугольных областей и для четырехугольных граничных областей разбиения  $\tilde{m}(S_k) = m(S_k) - \frac{\pi r^2}{2}$ . Для угловых областей выражения для площадей будут иметь вид:

$$\text{для угловой области, содержащей начало координат: } \tilde{m}(S_k) = m(S_k) - \frac{\pi r^2}{4},$$

$$\text{для остальных угловых областей: } \tilde{m}(S_k) = m(S_k) - \frac{3\pi r^2}{8}.$$

Если количество препятствий достаточно велико, то, допуская некоторую неточность, можно считать, что площади всех областей разбиения определяются одинаковой формулой  $\tilde{m}(S_k) = m(S_k) - \frac{\pi r^2}{2}$ . В этом случае получаем, что

$$\Delta(S, r) = \sum_{k=1}^N \frac{m(S_k) - \frac{1}{2}\pi r^2}{H^2 - n\pi r^2} e^{-\alpha r_{1k}}.$$

Покажем, что при сравнительно небольших значениях радиусов  $r$  вместо этой формулы можно приближенно пользоваться более простой формулой для точечных препятствий. Для этого оценим относительную погрешность такой замены. Перепишем выражение для  $\Delta(S, r)$  так:

$$\Delta(S, r) = \frac{1}{1 - n\pi \left(\frac{r}{H}\right)^2} \left( \sum_{k=1}^N \frac{m(S_k)}{H^2} e^{-\alpha r_{1k}} - \frac{1}{2}\pi \left(\frac{r}{H}\right)^2 \sum_{k=1}^N e^{-\alpha r_{1k}} \right).$$

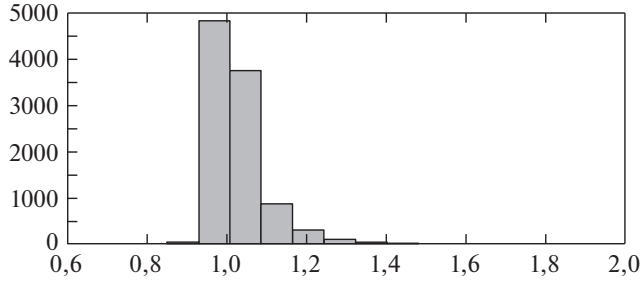


Рис. 7. Гистограмма отношений средней сложности к интегральной сложности.

Заметим, что первое слагаемое в скобках — интегральная мера сложности  $\Delta(S)$  для точечных препятствий. Обозначим

$$A = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N e^{-\alpha r_{1k}} \quad \text{и} \quad \tau = \frac{r}{H}.$$

Величину  $A$  можно интерпретировать как среднюю сложность сцены. Тогда

$$\Delta(S, r) = \frac{1}{1 - n\pi\tau^2} \left( \Delta(S) - \frac{N}{2}\pi A\tau^2 \right).$$

Поскольку  $\tau$  значительно меньше единицы и положительно, то разложим последнее выражение по формуле Маклорена, удержав три члена:  $\Delta(S, r) \approx \Delta(S) + \pi \left( n\Delta(S) - \frac{N}{2}A \right) \tau^2$  (линейный член отсутствует, поскольку первая производная  $\Delta(S, r)$  в точке ноль равна нулю). Учитывая, что в силу приведенного ранее утверждения  $N = 2n + 1$ , получаем выражение для относительной погрешности:

$$\begin{aligned} \frac{|\Delta(S, r) - \Delta(S)|}{\Delta(S)} &\approx \pi \left| n - \frac{2n+1}{2} \frac{A}{\Delta(S)} \right| \tau^2 = \\ &= \frac{\pi(2n+1)}{2} \left| \frac{2n}{2n+1} - \frac{A}{\Delta(S)} \right| \tau^2. \end{aligned}$$

Исследуем статистически дробь  $\frac{A}{\Delta(S)}$ , которая представляет собой отношение средней сложности к интегральной сложности сцены. Далее, на рис. 7 приведена гистограмма распределения значений этой дроби, полученная по 10 000 реализаций. Из нее видно, что  $0,85 \leq \frac{A}{\Delta(S)} \leq 1,5$ . Поэтому при любых значениях  $n = 1, 2, \dots$  выполняется неравенство

$$0 \leq \left| \frac{2n}{2n+1} - \frac{A}{\Delta(S)} \right| \leq 1.$$

Следовательно,

$$\frac{|\Delta(S, r) - \Delta(S)|}{\Delta(S)} \leq \frac{\pi(2n+1)}{2} \tau^2.$$

Это соотношение показывает, что относительная ошибка вычислений интегральной сложности по формулам для точечных препятствий пропорциональна количеству препятствий и их радиусу.

Таким образом, чтобы относительная ошибка не превышала заданную погрешность  $\varepsilon$ , количество препятствий  $n$  и их радиус  $r$  должны удовлетворять неравенству  $r \leq H \sqrt{\frac{2\varepsilon}{\pi(2n+1)}}$ . Например, для  $\varepsilon = 0,05$ ,  $H = 100$  и  $n = 10$  получаем  $r \leq 12$ .

## 9. Моделирование

Приведем примеры расчетов локального и интегрального показателей сложности для двух типовых сцен [1], представленные на рис. 8 и 9. Для каждой из сцен приведены графики изменения локального  $\delta$  и интегрального  $\Delta$  показателей сложности и их производных  $\dot{\delta}$ ,  $\dot{\Delta}$  по времени в функции пройденного пути. На всех сценах положение цели фиксировано и имеет координаты  $(x, y) = (20, 20)$ . Размер подвижного объекта  $\rho = 3$ . На рис. 8 случаи  $a$ – $г$  соответствуют:  $a$  — локальная сложность 0,04, интегральная сложность 0,07;  $б$  — локальная сложность 0,35, интегральная сложность 0,35;  $в$  — локальная сложность 0,22, интегральная сложность 0,16;  $г$  — локальная сложность 1,00, интегральная сложность 1,00.

На рис. 9 случаи  $a$ – $г$  соответствуют:  $a$  — локальная сложность 0,10, интегральная сложность 0,07;  $б$  — локальная сложность 0,10, интегральная сложность 0,14;  $в$  — локальная сложность 0,75, интегральная сложность 0,55;  $г$  — локальная сложность 1,00, интегральная сложность 1,00.

## 10. Заключение

В статье рассмотрена задача формального определения количественных оценок сложности среды функционирования подвижного объекта, перемещающегося на плоскости. На основе физически интерпретируемой величины, характеризующей возможность прохождения среды с препятствиями, построена нормированная локальная мера сложности в секторе обзора системы технического зрения, зависящая от расположения цели, к которой должно осуществляться движение. Введена интегральная мера сложности сцены, не зависящая от положения цели, но характеризующая сложность среды. Приведены результаты моделирования, подтверждающие эффективность предложенных процедур.

Поскольку задача вычисления мер сложности решается достаточно быстро, рассмотренный метод может быть использован в одном контуре с алгоритмами планирования движения подвижного объекта в реальном времени в условиях динамически изменяющихся сред, т.е. с подвижными препятствиями, что делает предложенный метод более реалистичным. Другими словами, в меняющихся сценах можно постоянно вычислять сложность или ее производные и выбирать алгоритм управления подвижным объектом в зависимости от изменяющихся условий в среде, в которой функционирует объект.

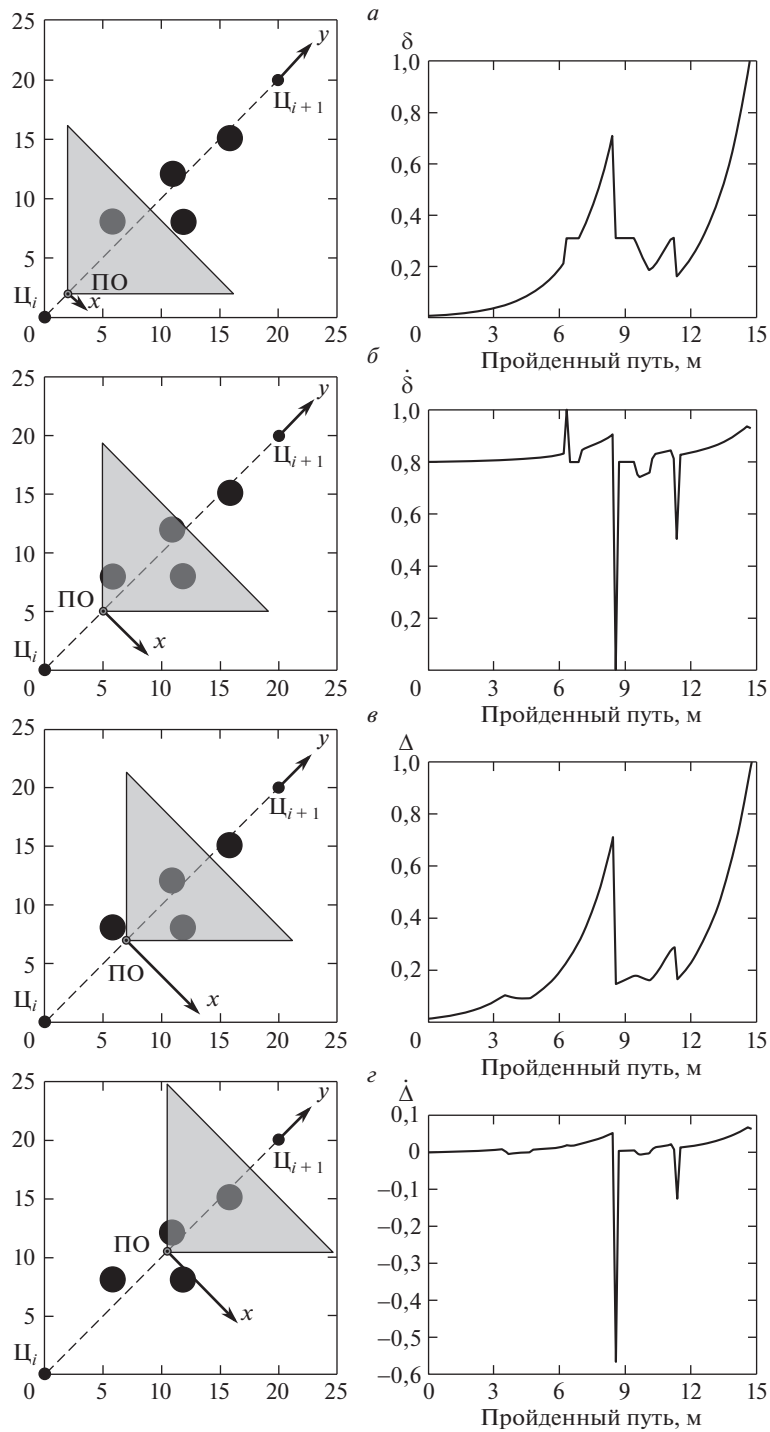


Рис. 8. Оценка сложности среды с выпуклыми препятствиями.



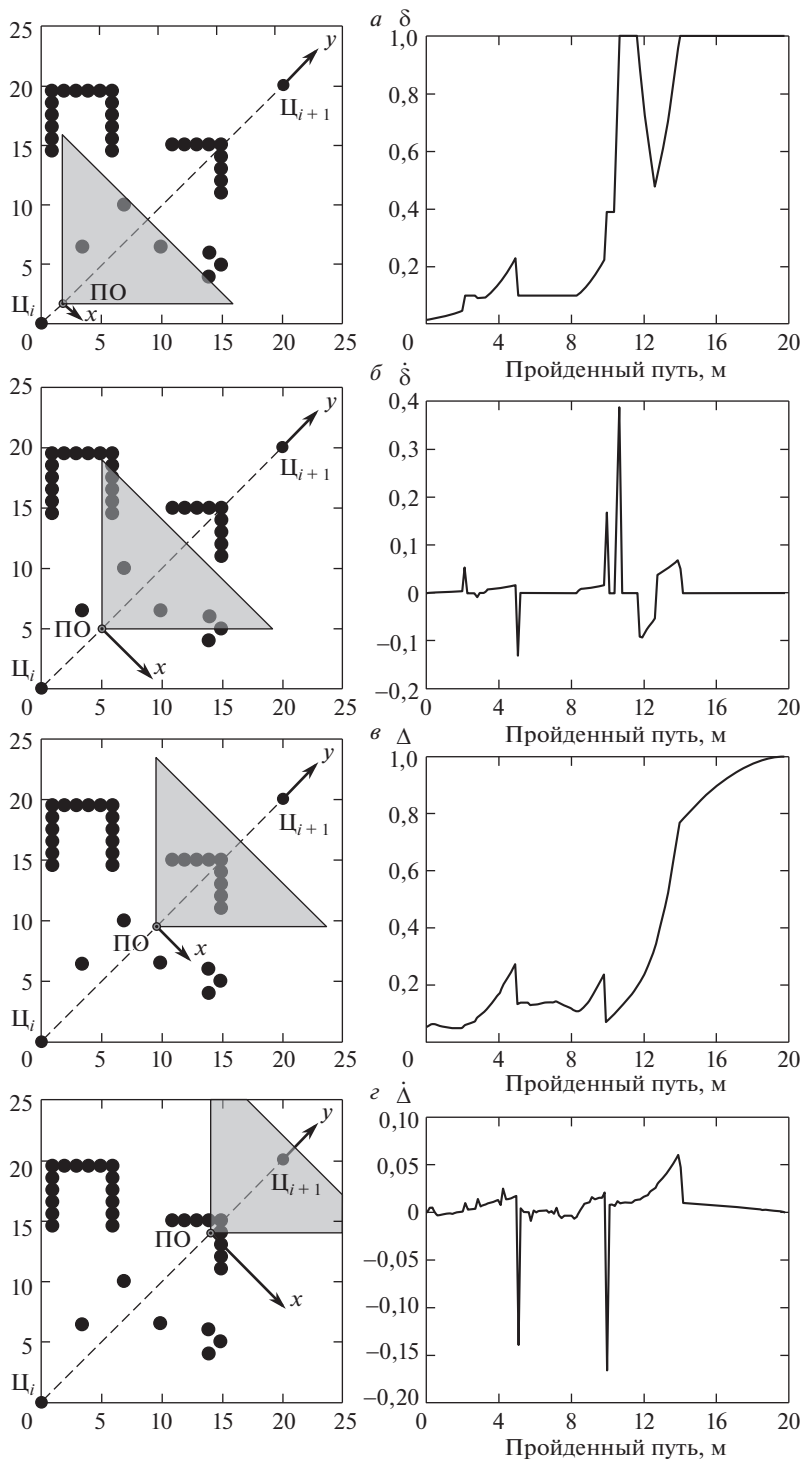


Рис. 9. Оценка сложности среды с невыпуклыми и выпуклыми препятствиями.

Очевидным обобщением полученных результатов является решение аналогичных задач в пространственном случае, т.е. для объектов и их групп, перемещающихся в трехмерном пространстве. Особый интерес представляет также построение мер сложности для сред, информация о которых характеризуется неполнотой и/или неопределенностью.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

*Доказательство утверждения.* Поскольку получаемое разбиение является плоским графом, то оно удовлетворяет формуле Эйлера  $V - M + N = 2$ , где  $V$  — общее количество вершин триангуляции, включая виртуальные. В этой формуле учитывается также и внешняя грань. Если ее не принимать во внимание, то  $V - M + N = 1$ . В рассматриваемом случае  $V = n + 3$ , поэтому  $n - M + N = -2$ . Заметим теперь, что количество граней и количество ребер связаны очевидным равенством  $M = \frac{3N+J}{2}$ , где  $J$  — количество ребер, лежащих на внешнем контуре триангуляции Делоне. По описанному построению такими являются ребра, соединяющие виртуальные препятствия, т.е.  $J = 3$ , следовательно,  $M = \frac{3N+3}{2}$ . Таким образом,  $n - \frac{3N+3}{2} + N = -2$ , откуда следует первое доказываемое равенство. Второе получается подстановкой найденного равенства в выражение для  $M$ . Утверждение доказано.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Интеллектуальное планирование траекторий подвижных объектов в средах с препятствиями / Под ред. В.Х. Пшихопова. М.: Физматлит, 2014.
2. Path Planning for Vehicles Operating in Uncertain 2D Environments / Ed. V. Pshikhopov. Elsevier, Butterworth-Heinemann, 2017.
3. Интеллектуальные технологии планирования перемещений подвижных объектов в трехмерных недетерминированных средах / Под ред. В.Х. Пшихопова. М.: Наука, 2017.
4. *Li W.* On the Relationship Between Complexity and Entropy for Markov Chains and Regular Languages // *Complex Syst.* 1991. V. 5. P. 381–399.
5. *Feixas M., del Acebo E., Bekaert Ph., Sbert M.* An information Theory Framework for the Analysis of Scene Complexity // *EUROGRAPHICS'99.* 1999. V. 18. No. 3.
6. *Niepel L., Martinka J., Ferko A., Elias P.* On Scene Complexity Definition for Rendering // *WSCG'95, Plzen.* 1995. P. 209–217.
7. *Plemenos D., Sbert M., Feixas M.* On Viewpoint Complexity of 3D Scenes // *Int. Conf. Graphicon.* 2004. Moscow, Russia. <http://www.graphicon.ru/>
8. *Rigau J., Feixas M., Sbert M.* Visibility Complexity of a Region in Flatland // *EUROGRAPHICS.* 2000.
9. *Скворцов А.В.* Триангуляция Делоне и ее применение. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 2002.
10. *Qu Yaohong, Zhang Yintao, Zhang Youmin.* A Global Path Planning Algorithm for Fixed-wing UAVs // *Intell. Robot Syst.* Springer Science+Business Media. 2018 V. 91. No. 3–4. P. 691–707.
11. *Kim D., Sugihara K.* Voronoi Diagram of a Circle Set from Voronoi Diagram of a Point Set: I. Topology // *Comput. Aided Geom. Des.* 2001. V. 18. No. 6. P. 541–562.

12. *Choset H., Burdick J.* Sensor-based Exploration: The Hierarchical Generalized Voronoi Graph // *Int. J. Robot. Res.* 2000. V. 19. No. 2. P. 96–125.
13. *Merino L., Wiklund J., Caballero F.* Vision-based Multi-UAV Position Estimation // *IEEE Robot. Autom. Mag.* 2006. V. 13. No. 3. P. 53–62.
14. *Yu X., Zhang Y.M.* Sense and Avoid Technologies with Application to Unmanned Aircraft Systems: Review and Prospects // *Progress Aeros. Sci.* 2015. V. 74. P. 152–166.
15. *Borouchaki H., Lo S.* Fast Delaunay Triangulation in Three Dimensions / *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 1995. V. 128. No. 1–2. P. 153–167.
16. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта / Под ред. Д.А. Поспелова. М.: Наука, 1986.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии О.Н. Граничиным.*

Поступила в редакцию 09.07.2018

После доработки 06.11.2018

Принята к публикации 08.11.2018