Автоматика и телемеханика, № 7, 2020

Управление в социально-экономических системах

© 2020 г. **Г.И. АЛГАЗИН, д-р физ.-мат. наук (algaz46@yandex.ru),**
Д.Г. АЛГАЗИНА, канд. техн. наук (darya.algazina@mail.ru)
(Алтайский государственный университет, Барнаул)

ПРОЦЕССЫ РЕФЛЕКСИИ И РАВНОВЕСИЕ В МОДЕЛИ ОЛИГОПОЛИИ С ЛИДЕРОМ

Проводится аналитическое исследование динамических процессов рефлексивного поведения в модели олигополии с лидером в классе линейных функций спроса и издержек агентов. Обосновываются динамические процессы принятия решений при неточных представлениях агентов о выборе конкурентов, осуществляемые не путем оптимальных ответов на их ожидаемые действия, а как повторяемые статические игры на диапазоне допустимых ответов. Агенты от игры к игре, наблюдая сложившееся состояние рынка и учитывая текущие условия по конкурентоспособности и прибыли, в рамках своей информированности уточняют объемы выпуска, делая шаги в направлении текущего положения цели. Получены достаточные условия на величины шагов, выбираемые лидером по Штакельбергу и независимо друг от друга агентами с реакцией по Курно, для сходимости динамик к равновесию.

Ключевые слова: равновесие Штакельберга, рефлексивное коллективное поведение, конкурентоспособность, валовая прибыль, уточнение объемов выпуска, условия сходимости.

DOI: 10.31857/S0005231020070077

1. Введение

В «классической» теоретико-игровой модели Штакельберга [1] фирма, выступившая в роли единоличного лидера рынка, в точности знает реакцию на его действия ведомых агентов, конкурирующих по Курно [2] объемами выпуска однородной продукции. Это позволяет фирме выбрать равновесное по Нэшу [3] действие, которое при наличии общего знания максимизирует ее прибыль. Однако исследования и опыт применения теоретико-игровых моделей свидетельствует о том, что имеет место фундаментальная проблема априорной неосведомленности агентов о выборе действий другими агентами (см., например, [4–9]). Если лидер не располагает достоверной информацией для построения функции реакции, а ведомые агенты, делая свой выбор, не располагают точными и полными представлениями о выборе конкурентов, их реакция на действия лидера не будет для него ожидаемой, а сам лидер может не получить ожидаемой прибыли. В этих условиях лидер и другие фирмы-агенты вынуждены делать прогнозы действий своих конкурентов (осуществлять рефлексию).

В последнее время исследователи обращают внимание на модели рефлексивного коллективного поведения [10, 11], которые при достаточно слабых предположениях об информированности агентов и достаточно неадекватных предсказаниях действий конкурентов дают возможность строить процессы, приводящие к равновесию (см., например, [4, 7, 12–15]). Используемые до этого в модели с лидером по Штакельбергу различные численные методы достижения равновесия, в частности метод однопараметрической прогонки [16], аппроксимация функции реакции лидера с решением задач математического программирования с одним ограничением, зависящим от параметра [17], двухуровневая оптимизация на многогранном множестве с помощью метода штрафных функций с использованием алгоритма симплициального разбиения [18] и др., не совсем адекватно отражали процессы принятия решений.

Основные результаты по исследованию равновесия Штакельберга с применением моделей рефлексивного коллективного поведения относятся к выявлению условий существования равновесия, его единственности и сходимости процессов рефлексии. Аналитические решения, в основном, получены для самой распространенной и простейшей модели коллективного поведения — модели индикаторного поведения [7, 10, 12, 13, 15], в которой не учитываются экономические ограничения; для более сложных моделей [6, 8, 9, 11, 14] явно преобладают качественные и численные методы.

В данной статье предложены динамические процессы принятия решений при неточных представлениях агентов о выборе конкурентов. Решается задача аналитического оценивания диапазонов допустимых ответов, выбираемых лидером по Штакельбергу и независимо друг от друга агентами с реакцией по Курно, таких что динамики сходятся к истинному равновесию. Во внимание принимается начальное состояние олигополии, а в условиях допустимости текущих решений учитываются такие экономические категории, как конкурентоспособность и убыточность агентов.

2. Базовая модель олигополии и информированность агентов

Пусть $i \in N = \{1, \ldots, n\}$ — агенты, конкурирующие на рынке объемами выпуска однородной продукции. Агенты продают произведенный ими выпуск q_i по единой рыночной цене $p(Q)$, которая определяется суммарным объемом выпуска $Q = \sum_{i \in N} q_i$. Действия агентов направлены на максимизацию прибыли:

$$\Pi_i(p(Q), q_i) = p(Q)q_i - \phi_i(q_i) \to \max_{q_i}, \quad i \in N. \tag{1}$$

Цена $p(Q)$ и полные издержки агентов $\phi_i(q_i)$ заданы линейными функциями:

$$p(Q) = a - bQ, \quad \phi_i(q_i) = c_i q_i + d_i, \quad i \in N, \tag{2}$$

где a, b — параметры спроса; c_i, d_i — предельные и постоянные издержки агентов.

Предпосылки базовой модели: 1) дискретность процесса; 2) однородность продукции; 3) конкуренция объемами выпусков, весь выпуск реализуется; 4) единая рыночная цена; 5) произвольное число агентов на рынке; 6) линейность функций спроса и полных затрат агентов, имеющих различные предельные издержки; 7) отсутствие ограничений мощности и коалиций; 8) рациональное поведение агентов, направленное на максимизацию собственной прибыли; 9) первый агент ($i = 1$) занимает лидирующее положение среди остальных агентов за счет того, что «предсказывает» их ответ на его выбор объема выпуска; 10) остальные агенты выбирают свои действия по Курно, считая, что все другие агенты не меняют свои объемы выпуска; 11) одновременный порядок ходов.

Поясним предпосылки 9)–11) и информированность агентов. Здесь выбор реальных действий всеми агентами осуществляется синхронно (одновременно). Подобный прием упрощает реальный процесс последовательных реакций. Он использован, например, в [7, 8, 12] и, как отмечается в [8], адекватен в случае, когда достигнутое равновесие стабильно. В отличие от классической игры Штакельберга, когда лидер делает первым ход, который становится известен другим агентам, здесь агенты с реакцией по Курно не знают ход лидера, синхронный своему ходу. Более того, они не знают, что у них есть лидер, полагая, что он, как и другие агенты, оставит свой объем выпуска неизменным (например, считая остальных агентов менее «интеллектуальными», чем они сами, либо что оппоненты достигли равновесия и им не выгодно от него отклониться). Полагаем, что агенты, действующие по Курно, не знают, что другие такие же агенты действуют так же.

Также полагаем, что в базовой модели все агенты точно знают собственные затраты и целевую функцию, собственную функцию реакции, включающую параметры спроса a и b, а также уже произведенный выпуск (достаточно только суммарный) другими агентами. Лидер также знает общее число агентов на рынке. При необходимости, зная формулу (2), агенты могут оценить сложившуюся на рынке цену. Полагаем также, что агенты не располагают достоверной априорной информацией относительно множеств допустимых действий, функций затрат и целевых функций конкурентов, а также об ожидаемых объемах их выпуска.

Формально предположения лидера и остальных агентов в условиях указанных предпосылок можно записать в виде следующих соотношений для предположительных вариаций [1, 2]:

$$\frac{\partial q_j}{\partial q_1} = -\frac{1}{n}, \quad j \neq 1 \quad \text{и} \quad \frac{\partial q_j}{\partial q_i} = 0, \quad i \neq 1, \quad i \neq j \quad (i, j \in N).$$

Отсюда

$$\frac{\partial Q_{-1}}{\partial q_1} = -\frac{n-1}{n}; \tag{3}$$

$$\frac{\partial Q_{-i}}{\partial q_i} = 0, \quad i \neq 1, \quad i \in N. \tag{4}$$

Здесь обозначено

$$Q_{-i} = \sum_{j \neq i} q_j, \quad i, j \in N. \tag{5}$$

Следуя определениям рангов рефлексии в общей модели рефлексивного коллективного поведения [4, 19], можно полагать, что агенты, выбирающие действия по Курно, обладают низким («нулевым») рангом рефлексии. Первый агент обладает более высоким («первым») рангом рефлексии, считая всех остальных нерефлексирующими (агентами с нулевым рангом рефлексии), и в соответствии с этим предсказывает их выбор. Его выбор будет ориентирован на наилучший ответ на ту обстановку, которая, по его мнению, должна сложиться. Предполагается, что все агенты не допускают существование агентов, имеющих такой же или более высокий ранг рефлексии, чем они сами.

3. Анализ и постановка проблемы

Традиционный процесс пошаговой рефлексии предполагает, что агенты выбирают оптимальный отклик в соответствии со своей функции реакции.

Оптимальный отклик i-го агента находится из условия $\partial \Pi_i / \partial q_i = 0$ с учетом (2):

$$q_i = \frac{h_i - Q_{-i}}{2 + \partial Q_{-i} / \partial q_i} \quad (i \in N), \tag{6}$$

где обозначено

$$h_i = \frac{a - c_i}{b}. \tag{7}$$

Если система условий (3)–(7) имеет решение, то соответствующее ему состояние рынка определяется как равновесие Штакельберга [1].

Тогда из (3), (4), (6) имеем выражения для оптимального отклика (см., например, [7, 12]):

$$q_1 = \frac{n(h_1 - Q_{-1})}{1 + n}, \tag{8}$$

$$q_i = \frac{h_i - Q_{-i}}{2}, \quad i \in N \setminus \{1\}. \tag{9}$$

Приведем соответствующий динамический процесс рефлексивного коллективного поведения:

1. Первый агент, используя наблюдаемые выпуски остальных агентов q_i^t и полагая, что в текущем $(t+1)$-м моменте времени они будут действовать по Курно, на основе (8) рассчитывает свой текущий оптимальный выпуск (оптимальный отклик) x_1^t:

$$x_1^t = \frac{n(h_1 - Q_{-1}^t)}{1 + n}. \tag{10}$$

Каждый из остальных агентов, используя наблюдаемые выпуски конкурентов q_i^t и полагая, что в текущем $(t+1)$-м моменте времени все они, включая первого, выберут те же выпуски, какие выбрали в предыдущем t-м моменте, на основе (9) рассчитывает свой текущий оптимальный выпуск (оптимальный отклик на действия конкурентов) x_i^t:

$$x_i^t = \frac{h_i - Q_{-i}^t}{2}, \quad i \in N \setminus \{1\}\,. \tag{11}$$

Начальный вектор выпусков $q^0 = (q_1^0, \ldots, q_n^0)$ считается заданным. Остальные правила процесса рефлексии определяются условиями базовой модели олигополии 1)–9) в разделе 2.

2. Каждый агент рассчитывает свой выпуск в текущем $(t+1)$-м моменте времени по формуле

$$q_i^{t+1} = x_i^t \quad (i \in N;\ t = 0, 1, 2, \ldots). \tag{12}$$

Затем процесс повторяется с п.1.

Определим (10)–(12) как процесс 1. Его можно рассматривать как имитацию автоматов, формально осуществляющих выбор действия.

К достоинствам процесса можно отнести его выраженную целевую направленность, так как агент в каждый момент выбирает наилучший ответ. К основным недостатком процесса относятся: отсутствие сходимости при $n \geq 3$ (соответствующее утверждение приведено в разделе 5 и доказано в Приложении), для него не гарантируются текущие неотрицательные выпуски, положительная валовая прибыль агентов, положительная цена товара.

4. Адаптивная динамика в модели олигополии с лидером

Приведем (1) с учетом (2) и (7) к виду $\Pi_i = b(h_i - Q_{-i} - q_i)q_i - d_i$. Рациональный агент при ожиданиях $h_i - Q_{-i} > 0$ выбирает положительный выпуск, который определяется выражениями (8) и (9). При ожиданиях $h_i - Q_{-i} \leq 0$ положительный выпуск дает отрицательную валовую прибыль (т.е. прибыль без учета постоянных издержек d_i), и, чтобы минимизировать потери, агент выбирает нулевой выпуск.

Принимая во внимание эти положения, достоинства и недостатки процесса (10)–(12), рассмотрим следующий динамический процесс рефлексивного коллективного поведения (процесс 2):

1. Агенты рассчитывают текущее положение своей цели так же, как в процессе 1: лидер по формуле (10), агенты с реакцией по Курно по (11).

2. Каждый агент рассчитывает свой выпуск в текущем $(t+1)$-м моменте времени, делая шаг от выпуска за предыдущий t-й момент времени по направлению к текущему оптимальному выпуску x_i^t по формуле

$$q_i^{t+1} = \begin{cases} q_i^t + \gamma_i^{t+1}(x_i^t - q_i^t), & x_i^t > 0; \\ 0, & x_i^t \leq 0 \end{cases} \quad (i \in N;\ t = 0, 1, 2, \ldots). \tag{13}$$

Здесь: $\gamma_i^{t+1} \in [0;1]$ — параметры, определяющие величины шагов. В этом процессе в отличие от процесса 1 допускается «неполный» шаг.

Затем процесс повторяется с п. 1.

Достоинства такого процесса: его целевая направленность, поскольку агент в каждый момент выбирает шаг в направлении текущей цели; экономическая содержательность процесса, выраженная в том, что условиями (13) гарантируются неотрицательный текущий выпуск (конкурентоспособность) и неотрицательная текущая валовая прибыль агентов.

В теории коллективного поведения формула (13) без условия на x_i^t описывает динамику выбора решений, основанную на аксиоме индикаторного поведения [10].

5. Основные результаты

Приведем основные, доказанные в Приложении, утверждения для процессов (10)–(12) и (10), (11), (13).

Утверждение 1. Процесс (10)–(12)

а) *сходится при* $n = 2$;

б) *сходится при* $n \geq 3$, *если* $x_1 = \frac{y_1}{y_0}$, $y_0 \neq 0$. *Здесь:* x_1 *— больший корень уравнения* $x^2 - px - g = 0$ *при* $p = \frac{2-n}{2}$ *и* $g = \frac{n(n-1)}{2(1+n)}$, *а* y_0, y_1 *— начальные значения последовательности* $y_t = q_1^{t+1} - q_1^t$;

в) *в остальных случаях при* $n \geq 3$ *расходится.*

Утверждение 2. Процесс (10), (11), (13), *в котором допустимые ответы агентов учитывают сложившиеся текущие условия по их конкурентоспособности и прибыли, сходится к истинному равновесию при* $\gamma_i^{t+1} \in \left(0; \frac{2}{1+n}\right]$ *для агентов с реакцией по Курно и при* $\gamma_1^{t+1} \in \left(0; \frac{1}{n}\right]$ *для лидера по Штакельбергу* $(t = 0, 1, 2, \ldots)$ *и любых начальных выпусках* $\left\{q_i^0,\ i \in N\right\}$.

В Приложении также формулируются и доказываются леммы, используемые для доказательства утверждений 1 и 2.

Следует также отметить, что некоторые результаты, полученные в Приложении при доказательстве утверждения 2, отчасти повторяют результаты авторов статьи для олигополии Курно [20], но сами доказательства этих результатов имеют специфику, обусловленную различием моделей рынка и процессов рефлексии.

6. Заключение

На конкурентных рынках агенты, как правило, не раскрывают друг другу свои истинные возможности и намерения. В представленной в статье теоретико-игровой модели олигополии агенты, не располагая достоверной информацией о выборе действий конкурентами, разыгрывают повторяющуюся игру с лидером по Штакельбергу. В классе линейных функций спроса и издержек агентов проведено аналитическое исследование двух моделей рефлексивного принятия решений:

— в первой модели агенты выбирают оптимальные ответы на ожидаемые действия окружения в соответствии со своей функцией реакции. Аналитически доказано, что такой процесс рефлексии сходится при $n = 2$, а при $n \geq 3$ расходится. Ранее этот факт подтверждался численным моделированием;

— во второй модели рефлексивного коллективного поведения допускаются неоптимальные ответы, осуществляемые агентами в направлении их текущих целей. Условия допустимости ответов учитывают не только величину «шага» движения в направлении текущей цели, но и сложившиеся текущие условия по конкурентоспособности и прибыли агентов. Для такого процесса в статье получены аналитические оценки для диапазонов ответов, при которых процесс сходятся к равновесию.

Результаты численного моделирования указывают на перспективность аналитических исследований в направлении расширения диапазонов «шагов», гарантирующих сходимость процессов рефлексии. Так, эксперименты показали [21], что, в частности, при $n = 3$ правая граница диапазона сходимости может быть доведена до $0{,}8 \div 0{,}9$, при $n = 4$ — до $0{,}6 \div 0{,}7$, при $n = 5$ — до $0{,}5 \div 0{,}6, \ldots$, при $n = 9$ — до $0{,}3 \div 0{,}4$. Это превышает почти в 2 раза границы по утверждению 2 и говорит о потенциале к развитию аналитических методов. Также актуален и перспективен поиск аналитических решений для нелинейных моделей рынка.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения 1. Из (5), (11) и (12) для агентов, действующих по Курно, имеем

$$q_i^{t+1} = \frac{1}{2}\left(h_i - Q^t + q_i^t\right). \tag{П.1}$$

По двум соседним периодам имеем разность

$$q_i^{t+1} - q_i^t = \frac{1}{2}\left(q_i^t - q_i^{t-1}\right) - \frac{1}{2}\left(Q^t - Q^{t-1}\right).$$

Суммируя по индексу i ($i = 2, \ldots, n$) полученное выражение, приходим к равенству

$$Q_{-1}^{t+1} - Q_{-1}^t = -\frac{n-2}{2}\left(Q_{-1}^t - Q_{-1}^{t-1}\right) - \frac{n-1}{2}\left(q_1^t - q_1^{t-1}\right). \tag{П.2}$$

Для лидера по Штакельбергу из (10) и (12) получаем

$$q_1^{t+1} = \frac{n}{1+n}\left(h_1 - Q_{-1}^t\right). \tag{П.3}$$

Из (П.3) следуют равенства

$$Q_{-1}^t - Q_{-1}^{t-1} = -\frac{1+n}{2}(q_1^{t+1} - q_1^t), \quad Q_{-1}^{t+1} - Q_{-1}^t = -\frac{1+n}{2}(q_1^{t+2} - q_1^{t+1}). \tag{П.4}$$

Подставляя полученные выражения в (П.2), получим

$$q_1^{t+2} - q_1^{t+1} = \frac{2-n}{2}\left(q_1^{t+1} - q_1^{t}\right) + \frac{n(n-1)}{2(1+n)}\left(q_1^{t} - q_1^{t-1}\right). \tag{П.5}$$

Введем обозначения

$$p = \frac{2-n}{2}, \tag{П.6}$$

$$g = \frac{n(n-1)}{2(1+n)}, \tag{П.7}$$

$$y_t = q_1^{t+1} - q_1^{t}. \tag{П.8}$$

Тогда (П.5) представляет собой линейную рекуррентную последовательность с постоянными коэффициентами и начальными значениями $y_0 = q_1^1 - q_1^0$, $y_1 = q_1^2 - q_1^1$, имеющую вид

$$y_{t+2} = py_{t+1} + gy_t \quad (t \geq 0). \tag{П.9}$$

Известно [22], что для линейной рекуррентной последовательности с постоянными коэффициентами имеет место соотношение

$$y_t = s_1(x_1)^t + s_2(x_2)^t. \tag{П.10}$$

В (П.10) индекс “t” обозначает временной период и является показателем степени для корней x_1 и x_2 характеристического уравнения $x^2 - px - g = 0$, а значения s_1 и s_2 находятся из решения системы линейных уравнений

$$\begin{cases} y_0 = s_1x_1 + s_2x_2, \\ y_1 = s_1\left(x_1\right)^2 + s_2\left(x_2\right)^2. \end{cases} \tag{П.11}$$

Далее будут полезны записи этих корней:

$$x_1 = \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + g}, \quad x_2 = \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} + g}. \tag{П.12}$$

Лемма П.1. *Корни x_1 и x_2 характеристического уравнения $x^2 - px - g = 0$* а) *различны,* б) *действительные,* в) *не равны нулю,* г) *имеют разные знаки,* д) *при $n = 2$ больший корень $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, меньший $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$,* е) *при $n \geq 3$ большим по модулю является отрицательный корень и его модуль больше единицы,* ж) *положительный корень меньше единицы.*

Доказательство леммы П.1. Подкоренное выражение $\frac{(2-n)^2}{16} + \frac{n(n-1)}{2(1+n)}$ в (П.12) положительно, т.е. корни уравнения простые и действительные. Допустим, есть равные нулю корни. Тогда из $x^2 - px - g = 0$ следует, что $g = 0$. Но по (П.7) такое возможно только при $n = 1$. Положения а), б) и в) доказаны.

Имеем $x_1x_2=-g=-\frac{n(n-1)}{2(1+n)}$. Поэтому следует г). При $n=2$ имеем $x=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, если $n=3$, то $x=\left(\frac{\sqrt{11}-1}{4},\frac{-\sqrt{11}-1}{4}\right)$. При $n\geq 4$ будет $x_1x_2<-1$. Поэтому справедливы положения д) и е). Докажем ж). По (П.12) $x_1=\frac{2-n}{4}+\sqrt{\frac{(2-n)^2}{16}+\frac{n(n-1)}{2(1+n)}}$. Имеем $x_1<1$, так как $\sqrt{\frac{(2-n)^2}{16}+\frac{n(n-1)}{2(1+n)}}<$ $<1-\frac{2-n}{4}$ или $\frac{n(n-1)}{2(1+n)}<1-\frac{2-n}{2}=\frac{n}{2}$.

Лемма П.1 доказана.

Лемма П.2. Если больший простой корень x_1 характеристического уравнения последовательности $y_{t+2}=py_{t+1}+gy_t$ равен $\frac{y_1}{y_0}$ $(y_0\neq 0)$, то последовательность сходится к нулю.

Доказательство леммы П.2. Пусть $x_1=\frac{y_1}{y_0}$ $(y_0\neq 0)$. По лемме 1 $x_1\neq 0$. Из системы уравнений (П.11) имеем $s_2x_2(x_1-x_2)=0$. Поскольку корни различны и $x_2\neq 0$, то $s_2=0$. Тогда по (П.10) будет $y_t=s_1(x_1)^t$. По лемме П.1 $x_1<1$, поэтому $\{y_t\}$ сходится к нулю.

Лемма П.2 доказана.

Ниже верхним индексом "(s)" обозначим показатели в статическом равновесии Штакельберга для базовой модели (1), (2).

Лемма П.3. Если $y_t=q_1^{t+1}-q_1^t\to 0$ при $t\to\infty$, то а) $q_1^t\to q_1^{(s)}$, б) $q_i^t\to q_i^{(s)}$ $\forall i\in N\setminus\{1\}$.

Доказательство леммы П.3. По (П.4) следует $Q_{-1}^t-Q_{-1}^{t-1}\to 0$. Покажем, что $q_1^t\to q_1^{(s)}$. Преобразуем (П.1) к виду $q_i^{t+1}-q_i^t=\frac{1}{2}\left(h_i-Q^t-q_i^t\right)$. Суммируя это выражение по i $(i=2,\ldots,n)$, получим

$$Q_{-1}^{t+1}-Q_{-1}^t=\frac{1}{2}\left(\sum_{i=2}^{n}h_i-nQ^t+q_1^t\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(nh_1-nQ^t-q_1^t+\sum_{i=2}^{n}h_i-nh_1+2q_1^t\right).$$

По (П.3) $q_1^{t+1}-q_1^t=\frac{1}{n+1}\left(nh_1-nQ^t-q_1^t\right)$. Поэтому $nh_1-nQ^t-q_1^t\to 0$ и $q_1^t\to\frac{1}{2}\left(nh_1-\sum\limits_{i=2}^{n}h_i\right)=q_1^{(s)}$. Итак, $q_1^t\to q_1^{(s)}$ и $Q^t\to h_1-\frac{q_1^{(s)}}{n}=Q^{(s)}$. Часть а) доказана.

Из (П.1) и $Q^t\to Q^{(s)}$ следует, что $q_i^{t+1}-\frac{1}{2}q_i^t=\frac{1}{2}\left(h_i-Q^t\right)$ и $q_i^{t+1}-\frac{1}{2}q_i^t\to$ $\to\frac{1}{2}\left(h_i-Q^{(s)}\right)$. Поэтому сходятся последовательности $\left\{\frac{1}{2}q_i^t-\frac{1}{4}q_i^{t-‘1}\right\}$, а также $\left\{q_i^{t+1}-\frac{1}{4}q_i^{t-1}\right\}$ как суммы сходящихся последовательностей. По той же причине сходятся $\left\{\frac{1}{4}q_i^{t-1}-\frac{1}{8}q_i^{t-2}\right\}$ и $\left\{q_i^{t+1}-\frac{1}{8}q_i^{t-2}\right\}$ и т.д. Приходим к тому, что сходятся $\left\{q_i^{t+1}-\frac{1}{2^{t+1}}q_i^0\right\}$ и $\left\{q_i^{t+1}\right\}$. Тогда из (П.1) следует, что $q_i^t\to q_i^{(s)}=h_i-Q^{(s)}\quad(i\in N\setminus\{1\})$.

Лемма П.3 доказана.

Теперь вернемся непосредственно к доказательству утверждения 1.

При $n = 2$ из (П.10) и положения д) леммы П.1 следует $y_t = q_1^{t+1} - q_1^t \to 0$. Тогда по лемме П.3 $q_1^t \to q_1^{(s)}$ и $q_2^t \to q_2^{(s)}$. При $n \geq 3$ и $x_1 = \frac{y_1}{y_0}$, $y_0 \neq 0$ по лемме П.2 $y_t = q_1^{t+1} - q_1^t \to 0$, и по лемме П.3 $q_i^t \to q_i^{(s)}$ $\forall i \in N$. Части а) и б) утверждения доказаны.

При $n \geq 3$ и $x_1 \neq \frac{y_1}{y_0}$ в (П.10) $s_2 \neq 0$. По лемме П.1 $0 < x_1 < 1$ и $x_2 < -1$. Поэтому $y_t = q_1^{t+1} - q_1^t$ не сходится к нулю.

Утверждение 1 доказано.

Примечание. Если $y_0 = 0$ и $s_2 = 0$, то из системы уравнений (П.11) *имеем $s_1 = 0$ и $y_t \equiv 0$. Процесс будет «стоять на месте» и сходиться не может.*

Доказательство утверждения 2. Введем функции-индикаторы [11], характеризующие отклонения текущих выпусков от текущих оптимумов, $\alpha_i^t = 2(x_i^t - q_i^t)$ для агентов с реакцией по Курно и $\alpha_1^t = \frac{1+n}{n}(x_1^t - q_1^t)$ для лидера. Коэффициенты «2» и «$\frac{1+n}{n}$» введены для последующих удобств. Используя (7) и что по (10), (11) $h_i = Q^{(s)} + q_i^{(s)}$ $(i \in N \setminus \{1\})$ и $h_1 = Q^{(s)} + \frac{q_1^{(s)}}{n}$, имеем

$$\alpha_i^t = Q^{(s)} + q_i^{(s)} - Q^t - q_i^t, \quad i \in N \setminus \{1\}, \tag{П.13}$$

$$\alpha_1^t = Q^{(s)} + \frac{1}{n} q_1^{(s)} - Q^t - \frac{1}{n} q_1^t. \tag{П.14}$$

Решением однородной системы уравнений (П.13), (П.14) является равновесный выпуск $q_i^t = q_i^{(s)}$ $(i \in N)$. Будет показано, что наряду с функциями-индикаторами важную роль в исследовании и доказательстве сходимости процесса (10), (11), (13) играет выражение $\max\limits_{i,j \in N} \left\{ \alpha_i^t - \alpha_j^t \right\}$.

Введем обозначения: $N_1^t = \left\{ i \left| x_i^t > 0,\, i \in N \right. \right\}$, $N_2^t = \left\{ i \right| x_i^t \leq 0,\, i \in N \left. \right\}$. Тогда $N_1^t \bigcap N_2^t = \otimes$ и $N_1^t \bigcup N_2^t = N$.

С учетом введенных обозначений, а также (7), (10), (11), (П.13) и (П.14) запишем (14) как

$$q_i^{t+1} = \begin{cases} q_i^t + \dfrac{\gamma_i^{t+1}}{2} \alpha_i^t, & i \in N_1^t \setminus \{1\}, \quad \gamma_i^{t+1} \in [0; 1], \\ 0, & i \in N_2^t \setminus \{1\}; \end{cases} \tag{П.15}$$

$$q_1^{t+1} = \begin{cases} q_1^t + \dfrac{\gamma_1^{t+1} n}{1+n} \alpha_1^t, & 1 \in N_1^t, \quad \gamma_1^{t+1} \in [0;\ 1], \\ 0, & 1 \in N_2^t. \end{cases} \tag{П.16}$$

Для последующих преобразований удобно переопределить параметры γ следующим образом: $\lambda_i^{t+1} = \gamma_i^{t+1}$, $i \in N \setminus \{1\}$; $\lambda_1^{t+1} = \frac{\gamma_1^{t+1} 2n}{1+n}$ $(t = 0, 1, 2, \ldots)$.

Тогда:

$$Q^{t+1}=Q^t+\sum_{j\in N_1^t}\frac{\lambda_j^{t+1}}{2}\alpha_j^t-\sum_{j\in N_2^t}q_j^t; \tag{П.17}$$

$$Q^{(s)}+q_i^{(s)}-Q^{t+1}-q_i^{t+1}=$$
$$=Q^{(s)}+q_i^{(s)}-Q^t-q_i^t-\frac{\lambda_i^{t+1}}{2}\alpha_i^t-Q^{t+1}+Q^t,\quad i\in N_1^t\setminus\{1\};$$

$$Q^{(s)}+\frac{1}{n}q_1^{(s)}-Q^{t+1}-\frac{1}{n}q_1^{t+1}=Q^{(s)}+\frac{1}{n}q_1^{(s)}-Q^t-\frac{1}{n}q_1^t-\frac{1}{n}\frac{\lambda_1^{t+1}}{2}\alpha_1^t-Q^{t+1}+Q^t;$$

$$\alpha_i^{t+1}=\left(1-\frac{\lambda_i^{t+1}}{2}\right)\alpha_i^t-Q^{t+1}+Q^t= \tag{П.18}$$
$$=\left(1-\frac{\lambda_i^{t+1}}{2}\right)\alpha_i^t-\sum_{j\in N_1^t}\frac{\lambda_j^{t+1}}{2}\alpha_j^t+\sum_{j\in N_2^t}q_j^t,\quad i\in N_1^t\setminus\{1\};$$

$$\alpha_1^{t+1}=\left(1-\frac{\lambda_1^{t+1}}{2n}\right)\alpha_1^t-Q^{t+1}+Q^t= \tag{П.19}$$
$$=\left(1-\frac{\lambda_1^{t+1}}{2n}\right)\alpha_1^t-\sum_{j\in N_1^t}\frac{\lambda_j^{t+1}}{2}\alpha_j^t+\sum_{j\in N_2^t}q_j^t,\quad 1\in N_1^t;$$

$$Q^{(s)}+q_i^{(s)}-Q^{t+1}-q_i^{t+1}=Q^{(s)}+q_i^{(s)}-Q^t-q_i^t+q_i^t-Q^{t+1}+Q^t,\quad i\in N_2^t\setminus\{1\};$$

$$Q^{(s)}+\frac{1}{n}q_1^{(s)}-Q^{t+1}-\frac{1}{n}q_1^{t+1}=Q^{(s)}+\frac{1}{n}q_1^{(s)}-Q^t-\frac{1}{n}q_1^t+\frac{1}{n}q_1^t-Q^{t+1}+Q^t;$$

$$\alpha_i^{t+1}=\alpha_i^t+q_i^t-Q^{t+1}+Q^t=\alpha_i^t+q_i^t-\sum_{j\in N_1^t}\frac{\lambda_j^{t+1}}{2}\alpha_j^t+\sum_{j\in N_2^t}q_j^t,\quad i\in N_2^t\setminus\{1\}; \tag{П.20}$$

$$\alpha_1^{t+1}=\alpha_1^t+\frac{1}{n}q_1^t-Q^{t+1}+Q^t=\alpha_1^t+\frac{1}{n}q_1^t-\sum_{j\in N_1^t}\frac{\lambda_j^{t+1}}{2}\alpha_j^t+\sum_{j\in N_2^t}q_j^t,\quad 1\in N_2^t. \tag{П.21}$$

Лемма П.4. Если для процесса (10), (11), (13) *в последовательности* $\left\{\alpha_i^t,\ i\in N\right\}$ *есть не только положительные члены, то*

$$\max_{i,j\in N}\left\{\alpha_i^{t+1}-\alpha_j^{t+1}\right\}<\max_{i,j\in N}\left\{\alpha_i^t-\alpha_j^t\right\}.$$

Доказательство леммы П.4. Возможны 4 случая для агентов i и j, на которых достигается $\max\limits_{i,j\in N}\left\{\alpha_i^{t+1}-\alpha_j^{t+1}\right\}$: 1) $i,j\in N_1^t$; 2) $i\in N_1^t,\ j\in N_2^t$; 3) $i\in N_2^t,\ j\in N_1^t$; 4) $i,j\in N_2^t$.

Рассмотрим первый случай. Пусть $i,j\in N_1^t$. Для определенности положим, что $i,j\in N_1^t\setminus\{1\}$. Когда $i\in N_1^t\setminus\{1\},\ j=1$ или $i=1,\ j\in N_1^t\setminus\{1\}$, доказательства аналогичны. Обозначим: $\alpha_{M_1^{t+1}}^{t+1}=\max\limits_i\left\{\alpha_i^{t+1},i\in N_1^t\right\}$ и

$\alpha^{t+1}_{m_1^{t+1}} = \min\limits_i \left\{\alpha_i^{t+1}, i \in N_1^t\right\}$. По (П.18)

$$\alpha^{t+1}_{M_1^{t+1}} - \alpha^{t+1}_{m_1^{t+1}} = \left(1 - \frac{\lambda^{t+1}_{M_1^{t+1}}}{2}\right)\alpha^t_{M_1^{t+1}} - \left(1 - \frac{\lambda^{t+1}_{m_1^{t+1}}}{2}\right)\alpha^t_{m_1^{t+1}}.$$

Но $\alpha^t_{M_1^{t+1}} \le \alpha^t_{M^t} > 0$ и $\alpha^t_{m_1^{t+1}} \ge \alpha^t_{m^t} \le 0$. Поэтому

$$\max_{i,j \in N_1^t}\left\{\alpha_i^{t+1} - \alpha_j^{t+1}\right\} < \alpha^t_{M_1^{t+1}} - \alpha^t_{m^t} < \alpha^t_{M^t} - \alpha^t_{m^t} = \max_{i,j\in N}\left\{\alpha_i^t - \alpha_j^t\right\}.$$

Рассмотрим второй случай, когда $i \in N_1^t$, $j \in N_2^t$. Пусть для определенности $i \in N_1^t \setminus \{1\}$, $j = 1$. Когда $i = 1$, $j \in N_2^t \setminus \{1\}$ или $i \in N_1^t \setminus \{1\}$, $j \in N_2^t \setminus \{1\}$, доказательства аналогичны. По (П.18) и (П.21) имеем, что

$$\alpha^{t+1}_{M_1^{t+1}} - \alpha^{t+1}_{m_2^{t+1}} = \left(1 - \frac{\lambda^{t+1}_{M_1^{t+1}}}{2}\right)\alpha^t_{M_1^{t+1}} - \left(\alpha^t_{m_2^{t+1}} + \frac{1}{n}q^t_{m_2^{t+1}}\right).$$

Здесь $\alpha^{t+1}_{m_2^{t+1}} = \min\limits_i\left\{\alpha_i^{t+1}, i \in N_2^t\right\}$, $m_2^{t+1} = 1$ и $\alpha^t_{M_1^{t+1}} \le \alpha^t_{M^t} > 0$. Тогда

$$\max_{i \in N_1^t, j \in N_2^t}\left\{\alpha_i^{t+1} - \alpha_j^{t+1}\right\} < \alpha^t_{M^t} - \alpha^t_{m_2^{t+1}} \le \alpha^t_{M^t} - \alpha^t_{m^t} = \max_{i,j\in N}\left\{\alpha_i^t - \alpha_j^t\right\}.$$

Рассмотрим случай $i \in N_2^t$, $j \in N_1^t$. Пусть для определенности $i = 1$, $j \in N_1^t \setminus \{1\}$. Когда $i \in N_2^t \setminus \{1\}$, $j = 1$ или $i \in N_2^t \setminus \{1\}$, $j \in N_1^t \setminus \{1\}$, доказательства аналогичны. Тогда $M_2^{t+1} = 1$. Ввиду (10) и $x_1^t \le 0$, (П.14) и $h_1 = Q^{(s)} + \frac{q_1^{(s)}}{n}$ имеем $\alpha_1^t + \frac{1}{n}q_1^t = h_1 - Q^t_{-1} - q_1^t < 0 < \alpha^t_{M^t}$. Тогда по (П.21) и (П.18) получим

$$\alpha^{t+1}_{M_2^{t+1}} - \alpha^{t+1}_{m_1^{t+1}} = \left(\alpha^t_{M_2^{t+1}} + \frac{1}{n}q^t_{M_2^{t+1}}\right) - \left(1 - \frac{\lambda^{t+1}_{m_1^{t+1}}}{2}\right)\alpha^t_{m_1^{t+1}} <$$

$$< \alpha^t_{M^t} - \left(1 - \frac{\lambda^{t+1}_{m_1^{t+1}}}{2}\right)\alpha^t_{m^t} < \alpha^t_{M^t} - \alpha^t_{m^t} = \max_{i,j\in N}\left\{\alpha_i^t - \alpha_j^t\right\}.$$

Пусть теперь $i, j \in N_2^t$. Возьмем для определенности $i = 1$, $j \in N_2^t \setminus \{1\}$. Когда $i \in N_2^t \setminus \{1\}$, $j = 1$ или $i \in N_2^t \setminus \{1\}$, $j \in N_2^t \setminus \{1\}$, доказательства аналогичны. По (П.20) и (П.21) $\alpha_i^{t+1} - \alpha_j^{t+1} = (\alpha_i^t + \frac{1}{n}q_i^t) - (\alpha_j^t + q_j^t)$. Имеем $\max\limits_{i,j\in N_2^t}\left\{\alpha_i^{t+1} - \alpha_j^{t+1}\right\} < \max\limits_{i\in N_1^t, j\in N_2^t}\left\{\alpha_i^{t+1} - \alpha_j^{t+1}\right\}$, так как $i = M_2^{t+1} = 1$ и $\alpha_1^t + \frac{1}{n}q_1^t < \alpha^t_{M^t}$. Обобщая все случаи, получаем

$$\max_{i,j\in N}\left\{\alpha_i^{t+1} - \alpha_j^{t+1}\right\} = \max\left\{\max_{i,j\in N_1^t}\left\{\alpha_i^{t+1} - \alpha_j^{t+1}\right\}, \max_{i\in N_1^t, j\in N_2^t}\left\{\alpha_i^{t+1} - \alpha_j^{t+1}\right\},\right.$$

$$\left.\max_{i\in N_2^t, j\in N_1^t}\left\{\alpha_i^{t+1} - \alpha_j^{t+1}\right\}, \max_{i,j\in N_2^t}\left\{\alpha_i^{t+1} - \alpha_j^{t+1}\right\}\right\} < \max_{i,j\in N}\left\{\alpha_i^t - \alpha_j^t\right\}.$$

Лемма П.4 доказана.

Лемма П.5. Пусть для процесса (10), (11), (13) $\gamma_i^{t+1} \in \left(0; \frac{2}{1+n}\right]$ *для агентов с реакцией по Курно и* $\gamma_1^{t+1} \in \left(0; \frac{1}{n}\right]$ *для лидера по Штакельбергу. Тогда* а) *если в последовательности* $\left\{\alpha_i^t, i \in N\right\}$ *есть положительные члены, то в последовательности* $\left\{\alpha_i^{t+1}, i \in N\right\}$ *также будут положительные члены,* б) *если в последовательности* $\left\{\alpha_i^t, i \in N\right\}$ *есть отрицательные или нулевые члены и* $N_1^t = N$, *то в* $\left\{\alpha_i^{t+1}, i \in N\right\}$ *будут отрицательные члены.*

Доказательство леммы П.5. Докажем часть а). Имеем $\alpha_{M^t}^t > 0$ и $M^t \in N_1^t$. По (П.18) и (П.19)

$$\alpha_{M^t}^{t+1} > \left(1 - \frac{\lambda_{M^t}^{t+1}}{2}\right)\alpha_{M^t}^t - \alpha_{M^t}^t \sum_{j \in N_1^t} \frac{\lambda_j^{t+1}}{2} = \alpha_{M^t}^t \left(1 - \frac{\lambda_{M^t}^{t+1}}{2} - \sum_{j \in N_1^t} \frac{\lambda_j^{t+1}}{2}\right),$$

если $M^t \in N_1^t \setminus \{1\}$, или

$$\alpha_{M^t}^{t+1} > \left(1 - \frac{\lambda_{M^t}^{t+1}}{2n}\right)\alpha_{M^t}^t - \alpha_{M^t}^t \sum_{j \in N_1^t} \frac{\lambda_j^{t+1}}{2} = \alpha_{M^t}^t \left(1 - \frac{\lambda_{M^t}^{t+1}}{2n} - \sum_{j \in N_1^t} \frac{\lambda_j^{t+1}}{2}\right),$$

если $M^t = 1 \in N_1^t$. Если $1 - \frac{\lambda_{M^t}^{t+1}}{2} - \sum\limits_{j \in N_1^t} \frac{\lambda_j^{t+1}}{2} > 0$, что имеет место с учетом введенного ранее переопределения параметров, то $\alpha_{M^t}^{t+1} > 0$ при $\lambda_i^{t+1} = \gamma_i^{t+1} \in \left(0; \frac{2}{1+n}\right]$ $(i \in N \setminus \{1\})$ и $\lambda_1^{t+1} = \frac{\gamma_1^{t+1} 2n}{1+n} \in \left(0; \frac{2}{1+n}\right]$.

Часть б) леммы доказывается аналогичным образом на основе формул (П.18) и (П.19).

Лемма П.5 доказана.

Лемма П.6. Для процесса (10), (11), (13) *справедливы неравенства:* а) $Q^{(s)} - Q^t > Q^{(s)} - Q^{t+1} > 0$, *если* $\alpha_i^t, \alpha_i^{t+1} \geq 0$ $(\forall i \in N)$ *и есть отличные от нуля* α_i^t *и* α_i^{t+1}; б) $Q^t - Q^{(s)} > Q^{t+1} - Q^{(s)} > 0$, *если* $\alpha_i^t, \alpha_i^{t+1} \leq 0$ $(\forall i \in N)$ *и есть отличные от нуля* α_i^t *и* α_i^{t+1}.

Доказательство леммы П.6. По (П.17) $Q^{(s)} - Q^{t+1} = Q^{(s)} - Q^t - \sum\limits_{j \in N_1^t} \frac{\lambda_j^{t+1}}{2}\alpha_j^t + \sum\limits_{j \in N_2^t} q_j^t$. При условиях на α_i^t в части а) леммы N_2^t будет пусто и $Q^{(s)} - Q^t > Q^{(s)} - Q^{t+1}$. Если также $\alpha_i^{t+1} \geq 0$ и не все равны нулю, то с учетом (П.13), (П.14) $\sum\limits_{i \in N \setminus \{1\}} \alpha_i^{t+1} + n\alpha_1^{t+1} = 2n(Q^{(s)} - Q^{t+1}) > 0$ и поэтому $Q^{(s)} - Q^t > Q^{(s)} - Q^{t+1} > 0$. Часть б) леммы доказывается аналогичным образом.

Лемма П.6 доказана.

В следующей лемме доказываются результаты относительно смены знаков в $\left\{\alpha_i^t, i \in N\right\}$ при переходе из t-го в $(t+1)$-й момент времени.

Лемма П.7. Если в процессе (10), (11), (13) а) *некоторый отрицательный член последовательности* $\{\alpha_i^t, i \in N\}$ *в* $\{\alpha_i^{t+1}, i \in N\}$ *станет положительным, то все положительные члены* $\{\alpha_i^t, i \in N\}$ *сохранят свои знаки в* $\{\alpha_i^{t+1}, i \in N\}$; б) *некоторый положительный член последовательности* $\{\alpha_i^t, i \in N\}$ *в* $\{\alpha_i^{t+1}, i \in N\}$ *станет отрицательным, то все отрицательные члены* $\{\alpha_i^t, i \in N\}$ *сохранят свои знаки в* $\{\alpha_i^{t+1}, i \in N\}$.

Доказательство леммы П.7. Докажем часть а). Пусть k — индекс отрицательного члена, переходящего в положительный, и $k \in N_1^t$. Тогда по (П.18) и (П.19) знаки положительных α_i^t не изменятся. Пусть $k \in N_2^t$. Учитывая, что $2x_k^t = \alpha_k^t + 2q_k^t \le 0$ $(k \ne 1)$ или $\frac{1+n}{n}x_1^t = \alpha_1^t + \frac{1+n}{n}q_1^t \le 0$ $(k = 1)$, по (П.20) и (П.21) знаки положительных α_i^t $(i \in N_2^t)$, а по (П.18) и (П.19) знаки положительных α_i^t $(i \in N_1^t)$ не изменятся. Часть а) доказана. Часть б) доказывается аналогичным образом.

Лемма П.7 доказана.

После доказательства вспомогательных лемм вернемся непосредственно к доказательству утверждения 2.

Вначале обратим внимание на последовательности только с отрицательными и нулевыми членами. Такая последовательность может в очередной момент времени перейти в последовательности: 1) имеющие положительные члены, 2) не имеющие положительных членов.

Если имеет место первый случай, то последовательность только с отрицательными и нулевыми членами далее не встретится, так как согласно лемме П.5 последовательность с хотя бы одним положительным членом не может при $\gamma_i^{t+1} \in \left(0; \frac{2}{1+n}\right]$ $(i \in N \setminus \{1\})$ и $\gamma_1^{t+1} \in \left(0; \frac{1}{n}\right]$ перейти в последовательность только с отрицательными и нулевыми членами. Поэтому во всех последующих последовательностях будут положительные члены.

Если реализуется второй случай, то согласно лемме П.6 будет $0 < Q^{t+1} - Q^{(s)} < Q^t - Q^{(s)}$. Опять возможно, что в $(t+2)$-й момент времени окажутся только отрицательные и нулевые члены. Таким образом, последовательности только с отрицательными и нулевыми членами могут быть либо в начальной стадии процесса, либо на протяжении всего процесса. Последнее рассмотрим подробнее. Последовательное применение леммы П.6 дает цепочку неравенств $Q^0 - Q^{(s)} > Q^1 - Q^{(s)} > \ldots > Q^t - Q^{(s)} > Q^{t+1} - Q^{(s)} > \ldots > 0$ $(t > 1)$, из которой следует $Q^t \to Q^{(s)}$ и $\sum_{i \in N \setminus \{1\}} \alpha_i^t + n\alpha_1^t = 2n(Q^{(s)} - Q^t) \to 0$. Поэтому $\alpha_i^t \to 0$, а по (П.13) и (П.14) $q_i^t \to q_i^{(s)}$ $(i \in N)$. Процесс сходится.

Пусть теперь $\alpha_i^t > 0$ $(\forall i \in N)$. Поскольку $\alpha_i^t = 2(x_i^t - q_i^t)$, то $x_i^t > 0\, \forall (i \in N)$ и все агенты рассчитывают свой текущий выпуск по формуле (13). Тогда из леммы П.6 следует неравенство $Q^{(s)} - Q^{t+1} < Q^{(s)} - Q^t$. Если и в последующие моменты знаки всех членов останутся положительными, то из цепочки неравенств $Q^{(s)} - Q^t > Q^{(s)} - Q^{t+1} > \ldots > Q^{(s)} - Q^{t+k} > Q^{(s)} - Q^{t+k+1} > \ldots \ldots > 0$ $(k > 1)$ следует последовательное приближение суммарного объема выпуска к равновесному, т.е. $Q^t \to Q^{(s)}$. Тогда $\alpha_i^t \to 0$ и $q_i^t \to q_i^{(s)}$ $(i \in N)$.

Пусть в $\left\{\alpha_i^t, i \in N\right\}$ есть не только положительные члены. По лемме П.4 процесс сделает последовательное приближение к равновесию, так как $\max\limits_{i,j\in N}\left\{\alpha_i^{t+1}-\alpha_j^{t+1}\right\}<\max\limits_{i,j\in N}\left\{\alpha_i^{t}-\alpha_j^{t}\right\}$. По лемме П.5 в $\left\{\alpha_i^{t+1}, i\in N\right\}$ будут положительные члены. Если в ней есть также отрицательные или нулевые члены, то процесс сделает следующее приближение к равновесию $\max\limits_{i,j\in N}\left\{\alpha_i^{t+2}-\alpha_j^{t+2}\right\}<\max\limits_{i,j\in N}\left\{\alpha_i^{t+1}-\alpha_j^{t+1}\right\}$. Если подобная ситуация повторяется на протяжении всего процесса, то имеем $\max\limits_{i,j\in N}\left\{\alpha_i^{t+1}-\alpha_j^{t+1}\right\}<$ $<\max\limits_{i,j\in N}\left\{\alpha_i^{t}-\alpha_j^{t}\right\}<\max\limits_{i,j\in N}\left\{\alpha_i^{t-1}-\alpha_j^{t-1}\right\}<\ldots<\max\limits_{i,j\in N}\left\{\alpha_i^{0}-\alpha_j^{0}\right\}$. Таким образом, $\max\limits_{i,j\in N}\left\{\alpha_i^{t}-\alpha_j^{t}\right\}\to 0$ при $t\to\infty$. Поскольку знаки $\alpha_{m_t}^t$ и $\alpha_{M_t}^t$ не совпадают, то $\forall i\in N$ $\alpha_i^t\to 0$ при $t\to\infty$ и $Q^t\to Q^{(s)}$, $q_i^t\to q_i^{(s)}$. Процесс сходится. В дополнение отметим ряд полезных результатов, связанных со сменой или сохранением знаков членов последовательностей $\left\{\alpha_i^t, i\in N\right\}$, которые приведены в лемме П.7.

Таким образом, показана сходимость процесса (10), (11), (13) при любых начальных выпусках агентов $\left\{q_i^0, i\in N\right\}$.

Утверждение 2 доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Stackelberg H.* Market Structure and Equilibrium: 1st Edition. Translation into English, Basin, Urch&Hill. Springer, 2011. (Original 1934.)
2. *Cournot A.* Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth. London: Hafner, 1960. (Original 1838.)
3. *Nash J.* Non-Cooperative Games // Ann. Math. 1951. No. 54. P. 286–295.
4. *Novikov D.A., Chkhartishvili A.G.* Reflexion and Control: Mathematical Models. Leiden: CRC Press, 2014.
5. *Berger U., de Silva H., Ferner-Rohling G.* Cognitive Hierarchies in the Minimizer Game // J. Econom. Behavior Organizat. 2016. V. 130. P. 337–348.
6. *Айзенберг Н.И., Зоркальцев В.И., Мокрый И.В.* Исследование нестационарных олигопольных рынков // Сиб. журн. индустр. мат. 2017. Т. 20. № 1. С. 11–20.
7. *Алгазин Г.И., Алгазина Д.Г.* Коллективное поведение в модели Штакельберга в условиях неполной информации // АиТ. 2017. № 9. С 91–105.

   Algazin G.I., Algazina D.G. Collective Behavior in the Stackelberg Model under Incomplete Information // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 9. P. 1619–1630.
8. *Гераськин М.И., Чхартишвили А.Г.* Анализ игровых моделей рынка олигополии при ограничениях по мощности и конкурентоспособности агентов // АиТ. 2017. № 11. С. 105–121.

   Geras'kin M.I., Chkhartishvili A.G. Analysis of Game-Theoretic Models of an Oligopoly Market under Constrains on the Capacity and Competitiveness of Agents // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 11. P. 2025–2038.
9. *Гераськин М.И.* Моделирование рефлексии в нелинейной модели трехагентной олигополии Штакельберга для телекоммуникационного рынка России // АиТ. 2018. № 5. С. 83–106.

Geras'kin M.I. Modeling Reflection in the Non-Linear Model of the Stakelberg Three-Agent Oligopoly for the Russian Telecommunication Market // Autom. Remote Control. 2018. V. 79. No. 5. P. 841–859.

10. *Опойцев В.И.* Равновесие и устойчивость в моделях коллективного поведения. М.: Наука, 1977.
11. *Малишевский А.В.* Качественные модели в теории сложных систем. М.: Наука, 1998.
12. *Алгазин Г.И., Алгазина Д.Г.* Информационное равновесие в модели динамики коллективного поведения на конкурентном рынке // Управление большими системами. 2016. № 64. С. 112–136.
13. *Васин А.А., Васина П.А., Рулева П.Ю.* Об организации рынков однородных товаров // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2007. № 1. С. 98–112.
14. *Корепанов В.О., Новиков Д.А.* Метод рефлексивных разбиений в моделях группового поведения и управления // Проблемы управления. 2011. № 1. С. 21–32.
15. *Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г.* Модели рефлексивных игр в задачах управления эколого–экономическими системами // Управление большими системами. 2015. № 55. С. 362–372.
16. *Булавский В.А., Калашников В.В.* Метод однопараметрической прогонки для исследования состояния равновесия // Экономика и мат. методы. 1994. Т. 30. № 4. С. 129–138.
17. *Sherali H., Soyster A., Murphy F.* Stackelberg-Nash-Cournot Equilibria: Characterizations and Computations // Oper. Res. 1983. V. 31(2). P. 253–276.
18. *Harker P., Choi S.-C.* A Penalty Function Approach for Mathematical Programs with Variational Inequality Constraints // Inform. Decision Technolog. 1991. V. 17. P. 41–50.
19. *Новиков Д.А.* Модели стратегической рефлексии // АиТ. 2012. № 1. С. 3–18.

    Novikov D.A. Models of Strategic Behavior // Autom. Remote Control. 2012. V. 73. No. 1. P. 1–19.
20. *Алгазин Г.И., Алгазина Ю.Г.* Рефлексивная динамика в условиях неопределенности олигополии Курно // АиТ. 2020. № 2. С. 115–133.

    Algazin G.I., Algazina Yu.G. Reflexive Dynamics in the Cournot Oligopoly under Uncertainty // Autom. Remote Control. 2020. No. 81(2). P. 345–359.
21. *Алгазин Г.И., Коптевич Е.В.* Возвратные последовательности в исследовании конкурентных рынков // МАК-2019 «Математики – Алтайскому краю»: сб. тр. Всероссийской конф. по математике с междунар. участием. Барнаул, 2019. С. 119–123.
22. *Маркушевич А.А.* Возвратные последовательности. М.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит-ры, 1950.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Д.А. Новиковым.

Поступила в редакцию 14.08.2019

После доработки 18.01.2020

Принята к публикации 30.01.2020