

© 2023 г. В.В. ЕВСТАФЬЕВА, канд. физ.-мат. наук
(v.evstafieva@spbu.ru)
(Санкт-Петербургский государственный университет)

СИНТЕЗ УПРАВЛЕНИЯ ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМОЙ С НЕОДНОЗНАЧНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Объектом изучения является n -мерная система обыкновенных дифференциальных уравнений с неоднозначной нелинейностью релейного типа при непрерывном периодическом возмущении. Рассматриваются непрерывные, периодические решения системы, траектория которых в фазовом пространстве состоит из двух кусков, соединяющихся в точках переключения, соответствующих переключению реле. Разработан алгоритм выбора параметров нелинейности, при которых в системе существует единственное асимптотически орбитально устойчивое периодическое решение с заданными колебательными свойствами, в том числе с заданным периодом и двумя точками переключения за период.

Ключевые слова: автоматические системы управления, канонические преобразования, синтез управления, релейная нелинейность, вынужденные периодические колебания, точки переключения, устойчивые решения.

DOI: 10.31857/S0005231023030030, EDN: ZYPBFM

1. Введение

Теория релейных автоматических систем активно развивается на протяжении нескольких десятилетий [1–25]. Несмотря на то, что накоплен значительный опыт и получены интересные научные результаты [14], все еще остаются открытыми вопросы, связанные с существованием и свойствами решений даже для дифференциальных уравнений 2-го порядка [13], которые требуют теоретического анализа периодических и других колебательных решений для полного понимания динамики систем с релейными характеристиками. В системах с релейной обратной связью решения могут иметь достаточно сложные режимы [14], например, скользящий режим и многократные быстрые или медленные переключения [5]. К многомерным системам затруднительно применять методы, разработанные для двухмерных систем, поэтому при их исследовании используются методы декомпозиции [10, 15]. Системы с разрывным управлением широко используются в практике автоматического регулирования. Методы припасовывания, неподвижных точек и точечных отображений до сих пор используются активно для исследования кусочно-интегрируемых (в том числе релейных) систем [17, 19, 24]. В приложениях часто

требуется регулировать поведение автоматической системы с релейной обратной связью и переводить различные типы ее движений в периодические колебания, а также управлять периодом и характером возникающих колебательных движений. Нелинейность гистерезисного (в том числе релейного) типа часто используют в прикладных задачах [6, 10, 14].

2. Постановка задачи

В данной статье в качестве объекта управления рассматривается в евклидовом пространстве n -мерная система обыкновенных дифференциальных уравнений с разрывной нелинейностью и внешней возмущающей силой в правой части следующего вида:

$$(1) \quad \dot{Y} = AY + Bu(\sigma) + Kf(t), \quad \sigma = (C, Y).$$

Здесь собственная матрица системы A и векторы $B = (b_1, \dots, b_n)^*$, $K = (k_1, \dots, k_n)^*$ являются вещественными и не зависят от времени t ; символ $*$ означает транспонирование; Y — вектор состояний системы. В роли нелинейности рассматривается релейная характеристика $u(\sigma)$ неидеального двухпозиционного релейного элемента, которая имеет зону гистерезиса (неоднозначности) с обходом на плоскости (σ, u) против хода часовой стрелки с пороговыми числами ℓ_1, ℓ_2 и выходными числами m_1, m_2 (ℓ_1, ℓ_2, m_1, m_2 — вещественные числа). Полагаем для определенности, что $\ell_1 < \ell_2$ и $m_1 < m_2$. Вектор $C = (c_1, \dots, c_n)^*$ определяет обратную связь в системе, является вещественным и постоянным. Рассматриваемую в статье релейную характеристику с гистерезисом широко используют в системах автоматического управления, к примеру, в моделях авторулевых. Внешнее возмущающее воздействие описывается функцией $f(t)$ из класса непрерывных, T -периодических функций.

Ввиду сложности исследования аналитическими методами систем с релейной обратной связью, особенно систем высокой размерности, все чаще используют приближенные методы с компьютерной реализацией. В этой статье нелинейная многомерная система исследуется аналитическими методами. Несмотря на громоздкость формул, полученные результаты дают возможность теоретического обоснования различных способов проектирования конкретных систем управления. Предлагается подход к решению вопроса синтеза управления, обеспечивающего существование периодических колебаний с определенными свойствами в системах с релейной обратной связью. Применяемый в статье подход подробно изложен в [7]. Суть подхода заключается в следующем: при определенных соотношениях между параметрами системы, а именно, элементами матрицы A и векторов B, C , исходная система n -го порядка неособым линейным преобразованием приводится к канонической системе специального вида, удобного для аналитического исследования и анализа пространства параметров. Данный подход позволяет определить

в пространстве параметров системы (1) области, отвечающие периодическим решениям с заданными свойствами.

Решение системы рассматриваем в классе непрерывных, T_B -периодических функций с двумя точками переключения, лежащими на гиперплоскостях вида $\sigma(t) = \ell_\eta$ ($\eta = 1, 2$), и периодом, равным или кратным периоду функции внешнего воздействия. Другими словами, период искомого решения системы задаем соотношением $T_B = kT$, связывающим период T функции $f(t)$ и некоторое натуральное число k . Гиперплоскости указанного вида далее будем называть гиперплоскостями переключения. Под точкой переключения подразумеваем такое состояние системы, при котором σ достигает одно из пороговых чисел, а нелинейная характеристика $u(\sigma)$ при этом меняет значение выходного числа. В точках переключения происходит “сшивание” кусков траектории изображающей точки решения в фазовом пространстве в силу линейных систем следующего вида:

$$(2) \quad \dot{Y} = AY + Bm_\alpha + Kf(t), \quad \alpha = 1, 2.$$

Исследования системы (1) проводились автором ранее [7–9, 15, 19–21]. В [7] получено необходимое условие существования периодического решения системы (1) с рассматриваемыми свойствами для случая, когда собственные числа матрицы системы являются простыми, вещественными, ненулевыми, и по крайней мере одно из них положительное. Кроме того, получены формулы для определения точек переключения. В [8] установлено достаточное условие существования искомых периодических решений, и доказана единственность решения с фиксированным периодом для случая простых, вещественных и ненулевых собственных чисел матрицы системы. На основе результатов, полученных А.В. Покровским [3], сформулирована теорема существования единственного асимптотически устойчивого решения с периодом, совпадающим с периодом функции внешнего возмущения. В [9] рассмотрена гурвицева матрица системы, получены условия существования и единственности периодического решения, а также проведено исследование решения на достижимость гиперплоскостей переключения и устойчивость. В [15] исследована система, матрица которой имеет нулевое собственное число. Статьи [19–21] посвящены исследованию периодических и непериодических колебательных решений с периодами, соизмеримыми с периодом функции внешнего возмущения, вида $T_B = T/k$. В [19, 20] рассмотрен вопрос существования гармонических колебаний специального типа для разных случаев, а именно, с положительным и кратным ненулевым собственным числом матрицы соответственно. В [20] матрица системы приводится к жордановой форме. В статье [21] рассмотрена вещественная симметрическая матрица с кратным ненулевым собственным числом, и исследованы непериодические колебательные решения. Матрица системы приводится к диагональному виду.

В данной статье дополнены и обобщены результаты исследования периодических решений системы (1) с периодами, кратными периоду функции $f(t)$,

когда матрица системы имеет простые ненулевые собственные числа, т.е. результаты, полученные в [7–9]. В отличие от [7–9] в настоящей статье условия достижимости гиперплоскостей переключения без касания и условия асимптотически орбитальной устойчивости решения исходной системы сформулированы в виде теорем, обобщающих случай ненулевых собственных чисел матрицы (теорема 3 и теорема 4 соответственно). Основным результатом исследования является алгоритм синтеза управления системы (1) для существования единственного асимптотически орбитально устойчивого периодического решения с заданным периодом и двумя точками переключения за период.

3. Построение систем трансцендентных уравнений

Решение системы (1) рассматриваем в форме Коши

$$(3) \quad Y(t) = e^{A(t-t_0)}Y(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-A(\tau-t)} (Bm_\alpha + Kf(\tau)) d\tau \quad (\alpha = 1, 2),$$

где t_0 — начальный момент времени. Точки переключения Y^1, Y^2 периодического решения системы обладают следующим свойством:

$$Y^\beta = Y(t_0, m_\alpha, t_0) = Y(t_0, m_\alpha, t_0 + T_B), \quad (C, Y^\beta) = \ell_\eta, \quad \forall \alpha, \beta, \eta = 1, 2.$$

Полагаем, что изображающая точка периодического решения системы (1) начинает свое движение в точке Y^1 на гиперплоскости $\sigma = \ell_1$ в момент времени $t_0 = 0$ и достигает гиперплоскость $\sigma = \ell_2$ в точке Y^2 в момент времени $t = t_1$ (момент первой встречи с $\sigma = \ell_2$, см. определение 1 в [19]) в силу системы (2) при условии, что $m_\alpha = m_1$. Затем она возвращается на гиперплоскость $\sigma = \ell_1$ в точку Y^1 в момент времени $t = T_B$ (момент первой встречи с $\sigma = \ell_1$) в силу системы (2) при условии, что $m_\alpha = m_2$. Таким образом, согласно предписанной последовательности движения изображающей точки решения системы (1) имеем $Y(0) = Y(T_B) = Y^1, Y(t_1) = Y^2$.

Рассмотрим модель внешнего T -периодического возмущения вида

$$(4) \quad f(t) = f_0 + f_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + f_2 \sin(2\omega t + \varphi_2),$$

где $f_0, f_1, f_2, \varphi_1, \varphi_2, \omega$ — вещественные постоянные, $T = 2\pi/\omega, \omega > 0$.

Предположим, что система (1) имеет хотя бы одно периодическое решение с периодом T_B , и изображающая точка этого решения движется по траектории в предписанной выше ей последовательности. Приведем систему трансцендентных уравнений в общем виде относительно двух моментов времени переключения (при этом второй момент времени совпадает с периодом искомого решения системы) и отвечающих им точек переключения в фазовом пространстве [7]. Имеем

$$(5) \quad \ell_1 = (C, Y^1), \quad \ell_2 = (C, Y^2),$$

где

$$Y^2 = e^{At_1}Y^1 + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)}(Bm_1 + Kf(\tau))d\tau,$$

$$Y^1 = e^{A(T_B-t_1)}Y^2 + \int_{t_1}^{T_B} e^{A(T_B-\tau)}(Bm_2 + Kf(\tau))d\tau.$$

Заметим, что полученную систему из четырех уравнений можно решать относительно t_1, T_B, Y^1, Y^2 численными методами, но цель данного исследования состоит в том, чтобы решить точными методами. Поэтому для разрешимости системы (5) в аналитическом виде далее преобразуем исходную систему к каноническому виду.

Условия обратимости. Будем считать элементы матрицы A и вектора B параметрами. Пусть выполняются следующие условия на параметры системы (1): 1) матрица A имеет только простые собственные числа, 2) векторы $B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B$ являются линейно независимыми.

Данные условия гарантируют обратимость преобразования исходной системы в канонический вид, позволяющий провести аналитическое исследование. Исходная и каноническая системы в процессе исследования являются взаимозаменяемыми. Ради простоты выкладок рассмотрим только вещественные собственные числа.

Выпишем системы трансцендентных уравнений для различных случаев ненулевых собственных чисел матрицы системы. Пусть матрица A имеет простые, вещественные и ненулевые собственные числа λ_i ($i = \overline{1, n}$). Далее кратко опишем рассмотренный в [7] общий подход к преобразованию исходной системы и приведению системы трансцендентных уравнений (5) к упрощенному виду, разделяющего моменты времени и точки переключения. В этом случае систему (1) приводим неособым преобразованием $Y = SX$ к каноническому виду

$$(6) \quad \dot{X} = A_0X + B_0u(\sigma) + K_0f(t), \quad \sigma = (\Gamma, X),$$

где

$$A_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad B_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad K_0 = \begin{pmatrix} k_0^1 \\ \dots \\ k_0^n \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \dots \\ \gamma_n \end{pmatrix}.$$

Элементы γ_i ($i = \overline{1, n}$) вычисляются по формуле

$$(7) \quad \gamma_i = \frac{-1}{D'(\lambda_i)} \sum_{h=1}^n c_h N_h(\lambda_i),$$

где

$$D'(\lambda_i) = \left. \frac{dD(p)}{dp} \right|_{p=\lambda_i}, \quad D(p) = |A - pE|, \quad N_h(p) = \sum_{i=1}^n b_i D_{ih}(p).$$

Здесь λ_i — корни характеристического уравнения $D(p) = 0$, E — единичная матрица, $D_{ih}(p)$ — алгебраическое дополнение элемента a_{ih} определителя $D(p)$, стоящего на пересечении i -й строки и h -го столбца, b_i — элементы вектора B , c_h — элементы вектора обратной связи C , p — некоторый вещественный параметр.

Матрица преобразования S имеет следующий вид:

$$(8) \quad S = - \begin{pmatrix} \frac{N_1(\lambda_1)}{D'(\lambda_1)} & \cdots & \frac{N_1(\lambda_n)}{D'(\lambda_n)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{N_n(\lambda_1)}{D'(\lambda_1)} & \cdots & \frac{N_n(\lambda_n)}{D'(\lambda_n)} \end{pmatrix}.$$

Дополнительно в качестве параметров исходной (и, как следствие, канонической) системы рассмотрим элементы вектора обратной связи. Выбираем параметры вектора Γ таким образом, что все элементы, кроме одного, равны нулю. Индекс при ненулевом элементе вектора Γ обозначим через s . Иными словами, полагаем $\gamma_s \neq 0$ и $\gamma_j = 0$, где $j = 1, \dots, s-1, s+1, \dots, n$. В соответствии с (7) параметры c_h ($h = \overline{1, n}$) выбираем из следующей системы:

$$(9) \quad \sum_{h=1}^n c_h N_h(\lambda_j) = 0, \quad \sum_{h=1}^n c_h N_h(\lambda_s) \neq 0.$$

Предположение относительно параметров вектора обратной связи позволяет расщепить систему n -го порядка на системы 1-го порядка, которые могут быть последовательно проинтегрированы и до конца исследованы аналитическими методами, а также упростить систему трансцендентных уравнений (5).

Функция $\sigma(t)$ определяется из системы дифференциальных уравнений

$$(10) \quad \sigma(t) = \gamma_s x_s, \quad \dot{x}_s = \lambda_s x_s + u(\sigma) + k_s^0 f(t),$$

остальные переменные x_j ($j \neq s$) определяются из неоднородных линейных уравнений 1-го порядка

$$(11) \quad \dot{x}_j = \lambda_j x_j + u(\sigma) + k_j^0 f(t), \quad j = 1, \dots, s-1, s+1, \dots, n.$$

Отметим, что в условиях указанного выбора параметров вектора обратной связи, когда один параметр полагаем ненулевым (с индексом s), а все остальные параметры вектора нулевыми, обе гиперплоскости переключения в координатах x_i ($i = \overline{1, n}$) ориентируются ортогонально оси x_s . С помощью (10)

можно найти время перехода изображающей точки решения от одной гиперплоскости переключения к другой как постоянную величину, не зависящую от начального положения этой точки на исходной гиперплоскости переключения. Далее, если подставить найденное значение времени перехода в решения уравнений (11), то зависящие от времени выражения становятся постоянными величинами. Таким образом, решение систем уравнений (10), (11) определяет точечное отображение одной гиперплоскости переключения в другую гиперплоскость.

Решая систему уравнений (10) относительно функции $\sigma(t)$ с начальными и граничными условиями $\ell_1 = \sigma(\ell_1, 0, m_1, 0)$, $\ell_2 = \sigma(\ell_1, 0, m_1, t_1)$, $\ell_1 = \sigma(\ell_2, t_1, m_2, T_B)$, получаем систему трансцендентных уравнений относительно моментов времени переключения t_1 , T_B и формулы для нахождения точек переключения X^1 , X^2 . Система трансцендентных уравнений при условии $\lambda_s > 0$ (случай рассмотрен в [7]) принимает вид

$$\begin{aligned}
 \ell_2 = & \left(\ell_1 + \frac{\gamma_s}{\lambda_s} (m_1 + k_s^0 f_0) + \frac{\gamma_s k_s^0 f_1}{\sqrt{\lambda_s^2 + \omega^2}} \sin(\varphi_1 + \delta_1) + \right. \\
 & \left. + \frac{\gamma_s k_s^0 f_2}{\sqrt{\lambda_s^2 + 4\omega^2}} \sin(\varphi_2 + \delta_2) \right) e^{\lambda_s t_1} - \frac{\gamma_s}{\lambda_s} (m_1 + k_s^0 f_0) - \\
 & - \frac{\gamma_s k_s^0 f_1}{\sqrt{\lambda_s^2 + \omega^2}} \sin(\omega t_1 + \varphi_1 + \delta_1) - \frac{\gamma_s k_s^0 f_2}{\sqrt{\lambda_s^2 + 4\omega^2}} \sin(2\omega t_1 + \varphi_2 + \delta_2), \\
 \ell_1 = & \left(\ell_2 + \frac{\gamma_s}{\lambda_s} (m_2 + k_s^0 f_0) + \frac{\gamma_s k_s^0 f_1}{\sqrt{\lambda_s^2 + \omega^2}} \sin(\omega t_1 + \varphi_1 + \delta_1) + \right. \\
 & \left. + \frac{\gamma_s k_s^0 f_2}{\sqrt{\lambda_s^2 + 4\omega^2}} \sin(2\omega t_1 + \varphi_2 + \delta_2) \right) e^{\lambda_s (T_B - t_1)} - \frac{\gamma_s}{\lambda_s} (m_2 + k_s^0 f_0) - \\
 (12) \quad & - \frac{\gamma_s k_s^0 f_1}{\sqrt{\lambda_s^2 + \omega^2}} \sin(\omega T_B + \varphi_1 + \delta_1) - \frac{\gamma_s k_s^0 f_2}{\sqrt{\lambda_s^2 + 4\omega^2}} \sin(2\omega T_B + \varphi_2 + \delta_2),
 \end{aligned}$$

а при условии $\lambda_s < 0$ (случай рассмотрен в [9]) имеет вид

$$\begin{aligned}
 \ell_2 = & \left(\ell_1 + \frac{\gamma_s}{\lambda_s} (m_1 + k_s^0 f_0) - \frac{\gamma_s k_s^0 f_1}{\sqrt{\lambda_s^2 + \omega^2}} \sin(\varphi_1 + \delta_1) - \right. \\
 & \left. - \frac{\gamma_s k_s^0 f_2}{\sqrt{\lambda_s^2 + 4\omega^2}} \sin(\varphi_2 + \delta_2) \right) e^{\lambda_s t_1} - \frac{\gamma_s}{\lambda_s} (m_1 + k_s^0 f_0) + \\
 & + \frac{\gamma_s k_s^0 f_1}{\sqrt{\lambda_s^2 + \omega^2}} \sin(\omega t_1 + \varphi_1 + \delta_1) + \frac{\gamma_s k_s^0 f_2}{\sqrt{\lambda_s^2 + 4\omega^2}} \sin(2\omega t_1 + \varphi_2 + \delta_2),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ell_1 = & \left(\ell_2 + \frac{\gamma_s}{\lambda_s} (m_2 + k_s^0 f_0) - \frac{\gamma_s k_s^0 f_1 \sin(\omega t_1 + \varphi_1 + \delta_1)}{\sqrt{\lambda_s^2 + \omega^2}} - \right. \\
& \left. - \frac{\gamma_s k_s^0 f_2 \sin(2\omega t_1 + \varphi_2 + \delta_2)}{\sqrt{\lambda_s^2 + 4\omega^2}} \right) e^{\lambda_s(T_B - t_1)} - \frac{\gamma_s}{\lambda_s} (m_2 + k_s^0 f_0) + \\
(13) \quad & + \frac{\gamma_s k_s^0 f_1}{\sqrt{\lambda_s^2 + \omega^2}} \sin(\omega T_B + \varphi_1 + \delta_1) + \frac{\gamma_s k_s^0 f_2}{\sqrt{\lambda_s^2 + 4\omega^2}} \sin(2\omega T_B + \varphi_2 + \delta_2).
\end{aligned}$$

Здесь и далее $\delta_1 = \arctg(\omega/\lambda_s)$, $\delta_2 = \arctg(2\omega/\lambda_s)$.

Точки переключения $X^1 = (x_1^1, \dots, x_n^1)^*$, $X^2 = (x_1^2, \dots, x_n^2)^*$ преобразованной системы (6) принадлежат гиперплоскостям переключения $\sigma = \ell_\eta$ ($\eta = 1, 2$) и определяются по следующим формулам: $x_s^1 = \ell_1/\gamma_s$, $x_s^2 = \ell_2/\gamma_s$,

$$\begin{aligned}
x_j^1 = & \left(1 - e^{\lambda_j T_B} \right)^{-1} \left(e^{\lambda_j T_B} \left[m_1 \int_0^{t_1} e^{-\lambda_j \tau} d\tau + m_2 \int_{t_1}^{T_B} e^{-\lambda_j \tau} d\tau + \right. \right. \\
& + k_j^0 f_0 \int_0^{T_B} e^{-\lambda_j \tau} d\tau + k_j^0 f_1 \int_0^{T_B} e^{-\lambda_j \tau} \sin(\omega \tau + \varphi_1) d\tau + \\
& \left. \left. + k_j^0 f_2 \int_0^{T_B} e^{-\lambda_j \tau} \sin(2\omega \tau + \varphi_2) d\tau \right] \right), \\
(14) \quad & \\
x_j^2 = & \left(1 - e^{\lambda_j T_B} \right)^{-1} e^{\lambda_j t_1} \left(\int_{t_1}^{T_B} e^{-\lambda_j (T_B - \tau)} \left[m_2 + \right. \right. \\
& \left. \left. + k_j^0 (f_0 + f_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + f_2 \sin(2\omega t + \varphi_2)) \right] d\tau + \right. \\
& \left. + \int_0^{t_1} e^{-\lambda_j \tau} \left[m_1 + k_j^0 (f_0 + f_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + f_2 \sin(2\omega t + \varphi_2)) \right] d\tau \right), \\
& j = 1, \dots, s-1, s+1, \dots, n.
\end{aligned}$$

4. Синтез управления. Условия разрешимости систем трансцендентных уравнений

Рассмотрим вопрос выбора параметров ℓ_1 , ℓ_2 , m_1 , m_2 и c_h ($h = \overline{1, n}$) нелинейной характеристики $u(\sigma)$ для существования устойчивых периодических решений системы (1), (4) с заданными колебательными свойствами

при условии, что параметры матрицы A и вектора B обеспечивают обратимость канонического преобразования, а все остальные коэффициенты системы (1), (4) фиксированы. Синтезируем управление для системы с периодическим возмущением так, чтобы вынужденные колебания системы (1), (4) имели период T_B , равный или кратный периоду T функции $f(t)$, т.е. $T_B = kT$, где $k \in \mathbb{N}$.

Далее разделяем на два подслучая в зависимости от знака собственного числа, соответствующего ненулевому элементу вектора обратной связи, поскольку именно знак одного собственного числа влияет на вид системы трансцендентных уравнений, которая подлежит изучению и решению аналитическими методами. В случае, если полагать ненулевыми два элемента вектора обратной связи, следует рассматривать все комбинации знаков двух соответствующих собственных чисел, и количество подслучаев увеличивается до четырех.

Случай 1 (положительное собственное число). Обратимся к условиям теоремы, которые гарантируют существование единственного решения $t_1 \in (0, kT)$ системы уравнений (12) для заданного натурального k .

Теорема 1 [7]. Пусть функция $f(t)$ имеет вид (4). Пусть система (1) имеет периодическое решение с периодом $T_B = kT$, где $k \in \mathbb{N}$, $T = 2\pi/\omega$, $\omega > 0$. Пусть собственные числа матрицы A являются простыми, вещественными, ненулевыми, и по крайней мере одно из них положительное ($\lambda_s > 0$), причем элемент γ_s преобразованного вектора обратной связи Γ отличен от нуля. Пусть, наконец, имеют место неравенства

1)

$$m_2 - m_1 e^{\lambda_s k T} + \lambda_s (1 - e^{\lambda_s k T}) (\ell_1 / \gamma_s + k_s^0 L) > 0,$$

(15)

$$m_1 < -\lambda_s \left(\frac{\ell_1}{\gamma_s} + k_s^0 L \right) < m_2,$$

где

(16)

$$L = \frac{f_0}{\lambda_s} + \frac{f_1 \sin(\varphi_1 + \delta_1)}{\sqrt{\lambda_s^2 + \omega^2}} + \frac{f_2 \sin(\varphi_2 + \delta_2)}{\sqrt{\lambda_s^2 + 4\omega^2}};$$

$$\delta_1 = \arctg(\omega/\lambda_s), \quad \delta_2 = \arctg(2\omega/\lambda_s);$$

2)

$$\begin{aligned} & \left(\ell_1 + \frac{\gamma_s}{\lambda_s} (m_1 + k_s^0 f_0) \right) (e^{\lambda_s k T} H - 1) + \\ & + \frac{\gamma_s k_s^0 f_1}{\sqrt{\lambda_s^2 + \omega^2}} \left(\sin(\varphi_1 + \delta_1) e^{\lambda_s k T} H - \sin \left(\frac{\omega}{\lambda_s} \ln H + \varphi_1 + \delta_1 \right) \right) + \\ (17) \quad & + \frac{\gamma_s k_s^0 f_2}{\sqrt{\lambda_s^2 + 4\omega^2}} \left(\sin(\varphi_2 + \delta_2) e^{\lambda_s k T} H - \sin \left(\frac{2\omega}{\lambda_s} \ln H + \varphi_2 + \delta_2 \right) \right) > 0, \end{aligned}$$

где

$$(18) \quad H = \frac{m_2 - m_1}{\lambda_s(1 - e^{\lambda_s k T})(\ell_1/\gamma_s + k_s^0 L) + m_2 - m_1 e^{\lambda_s k T}};$$

и равенство

3)

$$(19) \quad \begin{aligned} \ell_2 = & \ell_1 e^{\lambda_s k T} H + \frac{\gamma_s}{\lambda_s} (m_1 + k_s^0 f_0) \left(e^{\lambda_s k T} H - 1 \right) + \\ & + \frac{\gamma_s k_s^0 f_1}{\sqrt{\lambda_s^2 + \omega^2}} \left(\sin(\varphi_1 + \delta_1) e^{\lambda_s k T} H - \sin \left(\frac{\omega}{\lambda_s} \ln H + \varphi_1 + \delta_1 \right) \right) + \\ & + \frac{\gamma_s k_s^0 f_2}{\sqrt{\lambda_s^2 + 4\omega^2}} \left(\sin(\varphi_2 + \delta_2) e^{\lambda_s k T} H - \sin \left(\frac{2\omega}{\lambda_s} \ln H + \varphi_2 + \delta_2 \right) \right). \end{aligned}$$

Тогда система (12) при заданном натуральном k имеет единственное решение $t_1 \in (0, kT)$, которое определяется по формуле

$$(20) \quad t_1 = kT + \frac{1}{\lambda_s} \ln H.$$

Случай 2 (отрицательные собственные числа). Обратимся к условиям разрешимости системы (13), сформулированные в виде теоремы в [9].

Теорема 2 [9]. Пусть функция $f(t)$ имеет вид (4). Пусть система (1) имеет периодическое решение с периодом $T_B = kT$, где $k \in \mathbb{N}$, $T = 2\pi/\omega$, $\omega > 0$. Пусть собственные числа матрицы A являются простыми, вещественными и отрицательными. Пусть один из элементов преобразованного вектора обратной связи отличен от нуля (например, $\gamma_s \neq 0$). Пусть, наконец, имеют место следующие условия:

1) выполняется система неравенств (15), где

$$(21) \quad L = \frac{f_0}{\lambda_s} - \frac{f_1 \sin(\varphi_1 + \delta_1)}{\sqrt{\lambda_s^2 + \omega^2}} - \frac{f_2 \sin(\varphi_2 + \delta_2)}{\sqrt{\lambda_s^2 + 4\omega^2}};$$

2) справедливо неравенство

$$(22) \quad \begin{aligned} & \left(\ell_1 + \frac{\gamma_s}{\lambda_s} (m_1 + k_s^0 f_0) \right) (e^{\lambda_s k T} H - 1) - \\ & - \frac{\gamma_s k_s^0 f_1}{\sqrt{\lambda_s^2 + \omega^2}} \left(\sin(\varphi_1 + \delta_1) e^{\lambda_s k T} H - \sin \left(\frac{\omega}{\lambda_s} \ln H + \varphi_1 + \delta_1 \right) \right) - \\ & - \frac{\gamma_s k_s^0 f_2}{\sqrt{\lambda_s^2 + 4\omega^2}} \left(\sin(\varphi_2 + \delta_2) e^{\lambda_s k T} H - \sin \left(\frac{2\omega}{\lambda_s} \ln H + \varphi_2 + \delta_2 \right) \right) > 0, \end{aligned}$$

где H определяется по формуле (18);

3) выполняется равенство

$$(23) \quad \begin{aligned} \ell_2 = & \ell_1 e^{\lambda_s k T} H + \frac{\gamma_s}{\lambda_s} (m_1 + k_s^0 f_0) \left(e^{\lambda_s k T} H - 1 \right) - \\ & - \frac{\gamma_s k_s^0 f_1}{\sqrt{\lambda_s^2 + \omega^2}} \left(\sin(\varphi_1 + \delta_1) e^{\lambda_s k T} H - \sin \left(\frac{\omega}{\lambda_s} \ln H + \varphi_1 + \delta_1 \right) \right) - \\ & - \frac{\gamma_s k_s^0 f_2}{\sqrt{\lambda_s^2 + 4\omega^2}} \left(\sin(\varphi_2 + \delta_2) e^{\lambda_s k T} H - \sin \left(\frac{2\omega}{\lambda_s} \ln H + \varphi_2 + \delta_2 \right) \right). \end{aligned}$$

Тогда система (13) при заданном натуральном k имеет единственное решение $t_1 \in (0, kT)$, которое определяется по формуле (20).

Пусть найдено решение t_1 системы трансцендентных уравнений, параметры которой удовлетворяют условиям выше при заданном $k \in \mathbb{N}$. Теорему о существовании и единственности периодического решения рассматриваемого класса для случая ненулевых собственных чисел матрицы системы, приведенной и доказанной в [8], дополним следующим условием: t_1 является наименьшим решением первого уравнения трансцендентной системы и kT — наименьшим решением второго уравнения системы при фиксированном t_1 , поскольку t_1, kT — моменты времени переключения (моменты первой встречи с гиперплоскостями).

5. Условия достижимости гиперплоскостей переключения

Качество переходных процессов связано с выполнением двух задач: 1) обеспечением требуемого режима, в том числе с заданным периодом; 2) предотвращением типичного для релейных систем скользящего режима.

Пусть изображающая точка искомого решения системы (1) движется в предписанной ей последовательности. Будем рассматривать только такие соотношения между параметрами системы, для которых каноническое преобразование остается неособым, т.е. выполняется условие обратимости. В силу неособого преобразования результаты исследования канонической системы переносятся на исходную систему. Рассмотрим условия достижимости изображающей точкой решения канонической системы гиперплоскостей переключения, причем без касания во избежание режима скольжения.

Теорема 3. Пусть выполняются условия теоремы 1, причем собственные числа λ_j ($j \neq s$) являются отрицательными, или условия теоремы 2. Пусть система (1) неособым преобразованием приведена к каноническому виду (6). Пусть имеют место следующие условия:

- 1) $n - 1$ элементов γ_j ($j \neq s$) вектора Γ равны нулю;
- 2) при $\gamma_s \lambda_s > 0$, $m_1 < m_2$, $\ell_1 < \ell_2$ выполняются неравенства $-\gamma_s m_2 / \lambda_s < \ell_1$ и $-\gamma_s m_1 / \lambda_s > \ell_2$;
- 3) $\lambda_s \ell_1 + \gamma_s m_2 + \gamma_s k_s^0 f(t_\beta) \neq 0$ и $\lambda_s \ell_2 + \gamma_s m_1 + \gamma_s k_s^0 f(t_\beta) \neq 0$ ($\beta = 1, 2$), где t_1 — момент времени первого переключения, $t_2 = 0$;

4) множество Q описывается системой неравенств

$$\begin{cases} \|\bar{X}\| \leq \frac{1}{\min_j |\lambda_j|} \left[\max_{\alpha=1,2} |m_\alpha| \cdot \|\bar{B}_0\| + M \cdot \|\bar{K}_0\| \right], j = \overline{1, n}, j \neq s, \\ \ell_1 \leq x_s \gamma_s \leq \ell_2, \end{cases}$$

где векторы \bar{X} , \bar{B}_0 , \bar{K}_0 размерности $(n-1)$ отличаются от векторов канонической системы X , B_0 , K_0 тем, что в них исключен s -й элемент, константа M определяется из неравенства $|f(t)| \leq |f_0| + |f_1| + |f_2| = M$, справедливого для любого t , при этом f_0, f_1, f_2 являются постоянными коэффициентами функции $f(t)$.

Тогда в фазовом пространстве изображающая точка периодического решения канонической системы, начав свое движение в $X_0 \in Q$ на одной из гиперплоскостей вида $\sigma(t) = \ell_\eta$ ($\eta = 1, 2$), достигает вторую гиперплоскость без касания в силу системы (6).

Доказательство теоремы 3 приведено в Приложении.

В реальных системах начальные условия задаются с определенной точностью. Поэтому возникает вопрос, как малые изменения начальных условий влияют на поведение решения при $t \rightarrow \infty$.

Теорема 4. Пусть каноническая система (6) для $\lambda_s \neq 0$ имеет kT -периодическое решение рассматриваемого класса, и выполняются условия теоремы 3. Тогда решение системы (6) является асимптотически устойчивым, а в силу неособого преобразования решение исходной системы (1) является асимптотически орбитально устойчивым.

Доказательство теоремы 4. В работе [9] после формулировки теоремы 3.3 проведено исследование периодического решения на устойчивость, в результате которого доказано существование асимптотически устойчивого kT -периодического решения системы (6) и установлена асимптотически орбитальная устойчивость решения системы (1) для $\lambda_j < 0, j \neq s$, независимо от знака λ_s . Условия следствия (к теореме 3.3) включены в условия теоремы 3 настоящей статьи. Таким образом, теорема 4 обобщает результаты, установленные в [9].

6. Алгоритм синтеза управления

В релейных системах при внешнем бигармоническом воздействии, имеющем период T , могут существовать вынужденные колебания с периодом, кратным периоду внешнего воздействия, т.е. kT , где $k \in \mathbb{N}, k > 1$. Такие колебания реализуются только в нелинейных системах и называются субгармоническими порядка k . Гармонические вынужденные колебания с периодом T также могут существовать в системах рассматриваемого класса наряду с субгармоническими колебаниями. Такое явление называют захватыванием основной частоты и ее доли [1].

В данном исследовании разработан алгоритм, позволяющий в пространстве параметров системы (1) локализовать такие области, которые соответствуют kT -периодическим решениям с определенными свойствами, а также выявить области, не отвечающие искомым решениям. Следует отметить, что k задается из множества натуральных чисел в зависимости от того, какое вынужденное колебание (гармоническое или субгармоническое) представляет интерес для исследования. Алгоритм предназначен для выбора значений параметров $\ell_1, \ell_2, m_1, m_2, c_h$ ($h = \overline{1, n}$) релейной характеристики $u(\sigma)$, при которых существует асимптотически орбитально устойчивое kT -периодическое решение системы (1) с двумя точками переключения за период на гиперплоскостях вида $\sigma = \ell_\eta$ ($\eta = 1, 2$). Заметим, что все остальные параметры системы (1) фиксированы и удовлетворяют условиям обратимости системы (1).

Ниже приведем алгоритм.

1. Рассчитываем период функции $f(t)$ вида (4) по формуле $T = 2\pi/\omega$. Задаем любое $k \in \mathbb{N}$, и тем самым задаем период искомого решения $T_B = kT$.

2. Строим характеристическое уравнение $D(p) = |A - pE| = 0$.

3. Находим собственные числа λ_i ($i = \overline{1, n}$) матрицы A , согласно предположениям они простые, ненулевые и вещественные. Применимость алгоритма возможна в двух случаях: 1) одно собственное число является положительным, остальные — отрицательными, 2) все собственные числа являются отрицательными.

3.1. Если среди λ_i есть положительное число, то обозначим его λ_s . Если все λ_i являются отрицательными, то положим $\lambda_s = \max_i \lambda_i$. Теперь $\lambda_s > 0$ или $\lambda_s < 0$, остальные $(n - 1)$ собственных чисел λ_j отрицательные.

3.1.1. Строим матрицу неособого преобразования S по формуле (8).

3.1.2. Находим обратную матрицу S^{-1} .

3.1.3. Вычисляем вектор K_0 по формуле $K_0 = S^{-1}K$, где K — вещественный вектор, стоящий перед функцией $f(t)$ в системе (1).

3.1.4. Положим $\gamma_s = \text{sgn}(\lambda_s)$, при этом необходимое условие для достижимости гиперплоскостей переключения выполняется.

3.1.5. Положим $\sum_{h=1}^n c_h N_h(\lambda_s) = -D'(\lambda_s)\gamma_s$, исходя из (7), (9). Тогда система (9) принимает следующий вид:

$$\sum_{h=1}^n c_h N_h(\lambda_j) = 0, \quad \sum_{h=1}^n c_h N_h(\lambda_s) = -D'(\lambda_s)\gamma_s.$$

Решаем полученную неоднородную (поскольку $D'(\lambda_s)\gamma_s \neq 0$) систему n линейных алгебраических уравнений. Находим ее решение c_h ($h = \overline{1, n}$).

3.1.6. Рассчитываем значения $\delta_1 = \arctg(\omega/\lambda_s)$, $\delta_2 = \arctg(2\omega/\lambda_s)$.

3.1.7. Положим $\ell_1 = 10\text{sgn}(\lambda_s)$.

3.1.8. Если собственное число $\lambda_s > 0$, то переходим к шагу 3.1.9, если $\lambda_s < 0$ — к шагу 3.2.9.

3.1.9. Рассчитываем значение L по формуле (16).

3.1.10. Обозначим через P выражение, стоящее во втором неравенстве системы (15), т.е. $P = -\lambda_s (\ell_1/\gamma_s + k_s^0 L)$. Вычисляем P . Далее задаем любое вещественное значение m_1 такое, что $m_1 < P$ согласно (15). Задаем любое вещественное значение m_2 такое, что $m_2 > P$ согласно (15) и $m_2 > -\lambda_s \ell_1/\gamma_s$ согласно условию 2) теоремы 3. Проверяем условие 3) теоремы 3 при $t_\beta = 0$, а именно, $\lambda_s \ell_1 + \gamma_s m_2 + \gamma_s k_s^0 f(0) \neq 0$: если выполняется, то переходим к шагу 3.2.11, в противном случае нарушается условие достижимости гиперплоскостей переключения без касания и переходим к шагу 8.

3.1.11. Рассчитываем значение H по формуле (18).

3.1.12. Проверяем условие (17): если выполняется, то переходим к шагу 3.1.13, в противном случае нарушается одно из условий теоремы 1 и переходим к шагу 8.

3.1.13. Находим значение параметра ℓ_2 по формуле (19), и если оно удовлетворяет условиям 2) и 3) теоремы 3 при $t_\beta = 0$, а именно, $m_1 < -\lambda_s \ell_2/\gamma_s$ и $\lambda_s \ell_2 + \gamma_s m_1 + \gamma_s k_s^0 f(0) \neq 0$, то переходим к шагу 3.1.14, в противном случае — к шагу 8.

3.1.14. Вычисляем значение t_1 по формуле (20); если t_1, kT являются наименьшими решениями первого и второго уравнений трансцендентной системы соответственно, и условие 3) теоремы 3 при $t_\beta = t_1$ выполняется, то переходим к шагу 4, в противном случае — к шагу 8.

3.2.9. Рассчитываем значение L по формуле (21).

3.2.10. Обозначим через P выражение, стоящее во втором неравенстве системы (15). Вычисляем P . Далее задаем любое вещественное значение m_1 такое, что $m_1 < P$ согласно (15). Задаем любое вещественное значение m_2 такое, что $m_2 > P$ согласно (15) и $m_2 > -\lambda_s \ell_1/\gamma_s$ согласно условию 2) теоремы 3. Проверяем условие 3) теоремы 3 при $t_\beta = 0$, а именно, $\lambda_s \ell_1 + \gamma_s m_2 + \gamma_s k_s^0 f(0) \neq 0$: если выполняется, то переходим к шагу 3.2.11, в противном случае переходим к шагу 8.

3.2.11. Рассчитываем значение H по формуле (18).

3.2.12. Проверяем условие (22): если выполняется, то переходим к шагу 3.2.13, в противном случае нарушается одно из условий теоремы 2 и переходим к шагу 8.

3.2.13. Вычисляем значение ℓ_2 по формуле (23), и если оно удовлетворяет условиям 2) и 3) теоремы 3 при $t_\beta = 0$, то переходим к шагу 3.2.14, в противном случае — к шагу 8.

3.2.14. Вычисляем значение t_1 по формуле (20), и если условие 3) теоремы 3 при $t_\beta = t_1$ выполняется, то переходим к шагу 4, в противном случае — к шагу 8.

4. Находим координаты точек переключения X^1, X^2 канонической системы (6): $x_s^1 = \ell_1/\gamma_s$, $x_s^2 = \ell_2/\gamma_s$, остальные — по формулам (14), полученные

точки принадлежат траектории асимптотически устойчивого kT -периодического решения системы (6).

5. Вычисляем точки переключения Y^1, Y^2 обратным преобразованием $Y^\beta = SX^\beta$ ($\beta = 1, 2$).

6. Строим по формуле (3) траекторию искомого асимптотически орбитально устойчивого периодического решения системы (1) с начальным значением Y^1 или по формуле $X(t) = S^{-1}Y(t)$ траекторию асимптотически устойчивого периодического решения системы (6) с начальным значением X^1 .

7. Завершаем алгоритм. Определены параметры c_h ($h = \overline{1, n}$), ℓ_1, ℓ_2, m_1, m_2 , которые удовлетворяют условиям теоремы 1 из [8], теоремы 3 и теоремы 4. Таким образом, при этих значениях параметров в рассматриваемой системе существует единственное асимптотически орбитально устойчивое kT -периодическое решение с точками переключения Y^1, Y^2 за период, причем изображающая точка решения достигает гиперплоскостей вида $\sigma(t) = \ell_\eta$ ($\eta = 1, 2$) в точках переключения без касания. Построена траектория решения.

8. Завершаем алгоритм. При нарушении хотя бы одного из условий теоремы 1 или теоремы 2 не выполняются необходимые условия существования решения периода kT с двумя точками переключения за период, которые принадлежат гиперплоскостям переключения вида $\sigma(t) = \ell_\eta$ ($\eta = 1, 2$). При нарушении условий 2) и 3) теоремы 3 не выполняется условие достижимости гиперплоскостей переключения без касания (решение может перейти в положение равновесия при его наличии или скользящий режим). Следовательно, выбранные значения параметров c_h ($h = \overline{1, n}$), ℓ_1, m_1, m_2 релейной характеристики $u(\sigma)$ не гарантируют, что в системе (1) существует орбитально устойчивое kT -периодическое решение с двумя точками переключения за период, которые лежат на гиперплоскостях переключения. В этом случае следует выбрать другие значения параметров.

7. Пример реализации алгоритма

Пусть $n = 3$, $A = \begin{pmatrix} -12 & -11 & -37 \\ 4,6 & 3,6 & 15,4 \\ 1,8 & 1,8 & 5,2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 12,5 \\ -4,5 \\ -2,5 \end{pmatrix}$. Векторы B, AB, A^2B являются линейно независимыми, т.к.

$$\begin{vmatrix} 1 & -12 & 26,8 \\ 0 & 4,6 & -10,92 \\ 0 & 1,8 & -3,96 \end{vmatrix} = 1,44 \neq 0.$$

Пусть внешнее воздействие описывает T -периодическая функция

$$f(t) = 1 + 2 \sin(t + \pi/3) + 5 \sin(2t).$$

1. Рассчитываем период $T = 2\pi$ и задаем $k = 2$.
2. Выписываем характеристическое уравнение

$$D(p) = \begin{vmatrix} -12 - p & -11 & -37 \\ 4,6 & 3,6 - p & 15,4 \\ 1,8 & 1,8 & 5,2 - p \end{vmatrix} = 0.$$

3. Находим корни характеристического уравнения — собственные числа матрицы A : $\lambda_1 = -0,2$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = -2$.

3.1. Все собственные числа отрицательные. Положим $\lambda_s = \lambda_1$, т.к. λ_1 является наибольшим собственным числом.

3.1.1. Строим неособую матрицу преобразования $S = \begin{pmatrix} -5 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

3.1.2. Находим обратную матрицу $S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

3.1.3. Находим вектор $K_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0,5 \end{pmatrix}$.

3.1.4. Положим $\gamma_s = -1$, условие $\gamma_s \lambda_s > 0$ выполняется.

3.1.5. Вычисляем $-D'(\lambda_s)\gamma_s = -1,44$. Из неоднородной системы линейных алгебраических уравнений имеем следующие значения параметров вектора обратной связи: $c_1 = -1$, $c_2 = -1$, $c_3 = -4$.

3.1.6. Рассчитываем $\delta_1 \approx -1,373401$, $\delta_2 \approx -1,471128$ (здесь и далее расчеты проведены с точностью 10^{-6}).

3.1.7. Положим $\ell_1 = -10$.

3.1.8. Имеем $\lambda_s < 0$, переходим к шагу 3.2.9.

3.2.9. Рассчитываем $L \approx -1,896301$.

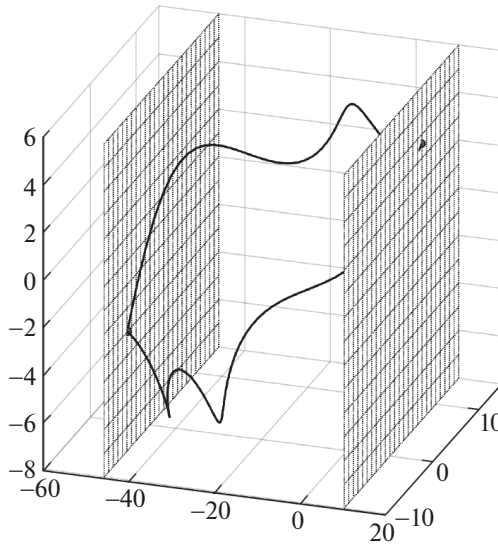
3.2.10. Вычисляем выражение, стоящее во втором неравенстве системы (15), $P \approx 2,7585203$. Далее задаем любое вещественное значение m_1 такое, что $m_1 < P$, положим $m_1 = -9$. Вычисляем $-\lambda_s \ell_1 / \gamma_s = 2$ и задаем любое вещественное значение m_2 такое, что $m_2 > P$ и $m_2 > 2$, положим $m_2 = 7,54$. Проверяем условие 3) теоремы 3 при $t_\beta = 0$, а именно, $\lambda_s \ell_1 + \gamma_s m_2 + \gamma_s k_s^0 f(0) \approx -0,07478 \neq 0$. Переходим к шагу 3.2.11.

3.2.11. Рассчитываем $H \approx 2,884940$.

3.2.12. Значения параметров ℓ_1 , m_1 , m_2 удовлетворяют неравенству (22), согласно которому $43,570427 > 0$. Переходим к шагу 3.2.13.

3.2.13. Находим $\ell_2 \approx 46,050182$. Проверяем условие достижимости без касания при $t_\beta = 0$: $5,254065 \neq 0$ верно. Переходим к шагу 3.2.14.

3.2.14. Рассчитываем момент первого переключения $t_1 \approx 7,268850$ (t_1 , $2T$ являются наименьшими решениями первого и второго уравнения системы (13) соответственно). Проверяем условие 3) теоремы 3 при $t_\beta = t_1$: первое



Решение с периодом 4π и точками переключения X^1, X^2 .

неравенство $9,250182 \neq 0$ и второе неравенство $14,579030 \neq 0$ выполняются. Переходим к шагу 4.

4. Находим точки переключения канонической системы X^1, X^2 :

$$X^1 \approx \begin{pmatrix} 10 \\ 6,822206 \\ 3,640645 \end{pmatrix}, \quad X^2 \approx \begin{pmatrix} -46,050182 \\ -4,946928 \\ -2,983556 \end{pmatrix}.$$

5. Находим точки переключения исходной системы Y^1, Y^2 :

$$Y^1 \approx \begin{pmatrix} -31,337690 \\ 15,900271 \\ 6,359355 \end{pmatrix}, \quad Y^2 \approx \begin{pmatrix} 214,312942 \\ -88,096622 \\ -43,066625 \end{pmatrix}.$$

6. Строим траекторию решения канонической системы. На рисунке представлен график траектории 4π -периодического решения в фазовом пространстве (x_1, x_2, x_3) системы с начальной точкой X^1 . Отмечены точки переключения на соответствующих гиперплоскостях переключения (выделены штриховкой), которые ориентированы ортогонально оси x_1 , поскольку $\gamma_1 \neq 0$, причем $-46,050182 \leq x_1 \leq 10$.

7. Завершаем алгоритм со следующим выводом: при $\ell_1 = -10$, $\ell_2 \approx 46,050182$, $m_1 = -9$, $m_2 = 7,54$ и $\gamma_1 = -1$ в преобразованной системе или $c_1 = -1$, $c_2 = -1$, $c_3 = -4$ в исходной системе существует единственное асимптотически устойчивое или соответственно асимптотически орбитально устойчивое 4π -периодическое решение с двумя точками переключения за период.

8. Заключение

На основе результатов, полученных в [7–9] и данной статье, разработан алгоритм выбора в пространстве параметров системы областей, соответствующих искомому решению, а также поиска в фазовом пространстве точек переключения этого решения. При описании алгоритма применены результаты теорем, которые установлены строгими аналитическими выкладками с использованием равносильных переходов и свойств логарифмической функции. Полученная система условий на параметры представляется непротиворечивой и имеющей решение в виде непустого множества. Для подтверждения корректности и работоспособности алгоритма приведен пример, демонстрирующий расчет параметров нелинейной характеристики и вектора обратной связи, при которых в системе существует асимптотически орбитально устойчивое 4π -периодическое решение (субгармоническое вынужденное колебание 2-го порядка) с двумя точками переключения за период. При реализации алгоритма на примере трехмерной системы использованы стандартные функции Matlab. В случае необходимости полной автоматизации процесса выбора параметров управления и построения траектории решения алгоритм может служить основой (пошаговой инструкцией) для написания программного кода.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 3. Изображающая точка решения канонической системы, начиная свое движение из точки на гиперплоскости, перемещается в предписанной ей последовательности между двумя гиперплоскостями переключения вдоль оси координат x_s при условии 1) теоремы 3, причем гиперплоскости в фазовом пространстве расположены ортогонально оси x_s .

Каноническую систему вида (6) при условии 1) теоремы 3 представим в виде двух следующих систем:

$$\dot{\bar{X}} = \bar{A}_0 \bar{X} + \bar{B}_0 m_\alpha + \bar{K}_0 f(t), \quad \begin{cases} \sigma(t) = \gamma_s x_s, \\ \dot{x}_s = \lambda_s x_s + m_\alpha + k_s^0 f(t), \end{cases}$$

где \bar{A}_0 — матрица, на диагонали которой расположены собственные числа λ_j ($j \neq s$), остальные элементы нулевые, $\bar{X} = (x_1, \dots, x_{s-1}, x_{s+1}, \dots, x_n)^*$, $\bar{B}_0 = (b_1^0, \dots, b_{s-1}^0, b_{s+1}^0, \dots, b_n^0)^*$, $\bar{K}_0 = (k_1^0, \dots, k_{s-1}^0, k_{s+1}^0, \dots, k_n^0)^*$, $\lambda_j < 0$, $b_j^0 = 1$, $j = 1, \dots, s-1, s+1, \dots, n$.

При условии, что вещественные собственные числа λ_j ($j \neq s$) являются отрицательными, с помощью функций Ляпунова в фазовом пространстве системы (6) можно выделить на гиперплоскостях переключения ограниченное, замкнутое, выпуклое множество, которое отображается в себя в силу решения канонической системы. Нулевое решение системы $\dot{\bar{X}} = \bar{A}_0 \bar{X}$ является асимптотически устойчивым, поэтому существует положительно определенная квадратичная форма $V(\bar{X}) = \bar{X}^* V \bar{X}$. Уравнение вида $V(\bar{X}) = C_\nu$

$(C_\nu - \text{постоянные, } \nu \in \mathbb{N})$, описывает цилиндрические поверхности в n -мерном фазовом пространстве канонической системы.

Для пересечения области притяжения $V(\bar{X}) \leq \min_\nu C_\nu$ с гиперплоскостями переключения вида $(\Gamma, X) = \ell_\eta$ ($\eta = 1, 2$) необходимо потребовать выполнение следующих условий:

$$(П.1) \quad -(\Gamma, A_0^{-1}B_0m_2) < \ell_1, \quad -(\Gamma, A_0^{-1}B_0m_1) > \ell_2,$$

которые означают, что при отсутствии внешнего воздействия виртуальные точки устойчивости $X^{(\alpha)} = -A_0^{-1}B_0m_\alpha$ ($\alpha = 1, 2$) канонической системы расположены вне зоны неоднозначности $u(\sigma)$.

Выбор элементов вектора Γ согласно условию 1) теоремы 3 приводит неравенства (П.1) при $\lambda_s \neq 0$ к упрощенному виду

$$(П.2) \quad -\gamma_s m_2 / \lambda_s < \ell_1, \quad -\gamma_s m_1 / \lambda_s > \ell_2.$$

Очевидно, что система неравенств (П.2) имеет место, если $\gamma_s \lambda_s > 0$ при $m_1 < m_2$ и $\ell_1 < \ell_2$. Заметим, что при $\lambda_s > 0$ имеем $\gamma_s > 0$, а при $\lambda_s < 0$ имеем $\gamma_s < 0$. Таким образом, условие 2) теоремы 3 необходимо потребовать для того, чтобы область притяжения пересекала гиперплоскости переключения.

Пересечение множества, описанного неравенством $V(\bar{X}) \leq \min_\nu C_\nu$, с гиперплоскостями переключения дает выпуклое компактное множество Q , которое задается в соответствии с условием 4) теоремы 3. Если начальные точки X_0 взяты из области, ограниченной поверхностью $V(\bar{X}) = \min_\nu C_\nu$, то траектория изображающей точки решения в силу канонической системы останется в этой области фазового пространства. Отсюда следует утверждение, что изображающая точка решения системы (6), начав свое движение в $X_0 \in Q$ на одной из гиперплоскостей вида $\sigma(t) = \ell_\eta$ ($\eta = 1, 2$), достигает за конечный промежуток времени другую гиперплоскость.

Далее определим условия, при которых не возникнет режим скольжения. Выпишем условие, при котором изображающая точка решения системы (6) достигает гиперплоскости без касания в точках переключения $X = X^\beta$ в соответствующие моменты времени t_β ($\beta = 1, 2$), где t_1 — момент времени первого переключения, $t_2 = kT$ — момент времени второго переключения. Существование и единственность t_1 при заданном $k \in \mathbb{N}$ гарантируют условия теоремы 1 или условия теоремы 2 в зависимости от знака собственного значения λ_s . Итак, имеем неравенство $(\Gamma, \dot{X}) \neq 0$. С учетом условия 1) теоремы 3 последнее неравенство для $\lambda_s \neq 0$ переписывается в виде условия 3) теоремы 3, которое обеспечивает достижимость гиперплоскостей переключения без касания. Заметим, что функция $f(t)$ является T -периодической: ее значение в момент времени второго переключения kT совпадает со значением в нуле, поэтому в условии 3) теоремы 3 для простоты используем $t_2 = 0$. Теорема 3 доказана полностью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Цыпкин Я.З.* Релейные автоматические системы. М.: Наука, 1974.
2. *Красносельский М.А., Покровский А.В.* Системы с гистерезисом. М.: Наука, 1983.
3. *Покровский А.В.* Существование и расчет устойчивых режимов в релейных системах // Автомат. и телемех. 1986. № 4. С. 16–23.
4. *Visintin A.* Differential models of hysteresis. Berlin: Springer, 1994.
5. *Johansson K.H., Rantzer A., Astrom K.J.* Fast switches in relay feedback systems // Automatica. 1999. Vol. 35. No. 4. P. 539–552.
6. *Mayergoyz I.D.* Mathematical models of hysteresis and their applications. Amsterdam: Elsevier, 2003.
7. *Евстафьева В.В.* О необходимых условиях существования периодических решений в динамической системе с разрывной нелинейностью и внешним периодическим воздействием // Уфимск. матем. журн. 2011. Т. 3. № 2. С. 20–27.
8. *Yevstafyeva V.V.* Existence of the unique kT -periodic solution for one class of nonlinear systems // J. Sib. Fed. Univ. Math. & Phys. 2013. Vol. 6. No. 1. P. 136–142.
9. *Евстафьева В.В.* Об условиях существования двухточечно-колебательного периодического решения в неавтономной релейной системе с гурвицевой матрицей // Автомат. и телемех. 2015. № 6. С. 42–56.
10. *Rachinskii D.* Realization of arbitrary hysteresis by a low-dimensional gradient flow // Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B. 2016. Vol. 21. No. 1. P. 227–243.
11. *Kamachkin A.M., Potapov D.K., Yevstafyeva V.V.* Existence of periodic solutions to automatic control system with relay nonlinearity and sinusoidal external influence // Int. J. Robust Nonlinear Control. 2017. Vol. 27. No. 2. P. 204–211.
12. *Kamachkin A.M., Potapov D.K., Yevstafyeva V.V.* Existence of subharmonic solutions to a hysteresis system with sinusoidal external influence // Electron. J. Differ. Equ. 2017. No. 140. P. 1–10.
13. *Kamachkin A.M., Potapov D.K., Yevstafyeva V.V.* On uniqueness and properties of periodic solution of second-order nonautonomous system with discontinuous nonlinearity // J. Dyn. Control Syst. 2017. Vol. 23. No. 4. P. 825–837.
14. *Leonov G.A., Shumafov M.M., Teshev V.A., Aleksandrov K.D.* Differential equations with hysteresis operators. Existence of solutions, stability, and oscillations // Differ. Equ. 2017. Vol. 53. No. 13. P. 1764–1816.
15. *Евстафьева В.В.* Периодические решения системы дифференциальных уравнений с гистерезисной нелинейностью при наличии нулевого собственного числа // Укр. матем. журн. 2018. Т. 70. № 8. С. 1085–1096.
16. *Медведский А.Л., Мелешенко П.А., Нестеров В.А., Решетова О.О., Семенов М.Е., Соловьев А.М.* Неустойчивые колебательные системы с гистерезисом: задачи стабилизации и управления // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2020. № 4. С. 58–82.
17. *Фурсов А.С., Тодоров Т.С., Крылов П.А., Митрев Р.П.* О существовании колебательных режимов в одной нелинейной системе с гистерезисами // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 8. С. 1103–1121.
18. *Kamachkin A.M., Potapov D.K., Yevstafyeva V.V.* Existence of periodic modes in automatic control system with a three-position relay // Int. J. Control. 2020. Vol. 93. No. 4. P. 763–770.

19. *Евстафьева В.В.* О существовании двухточечно-колебательных решений возмущенной релейной системы с гистерезисом // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 2. С. 169–178.
20. *Евстафьева В.В.* Существование T/k -периодических решений нелинейной неавтономной системы с кратным собственным числом матрицы // Матем. заметки. 2021. Т. 109. № 4. С. 529–543.
21. *Євстаф'єва В.В.* Існування двоточково-коливних розв'язків релейної неавтономної системи з кратним власним числом дійсної симетричної матриці // Укр. матем. журн. 2021. Т. 73. № 5. С. 640–650.
22. *Фурсов А.С., Митрев Р.П., Крылов П.А., Тодоров Т.С.* О существовании периодического режима в одной нелинейной системе // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 8. С. 1104–1115.
23. *Vasquez-Beltran M.A., Jayawardhana B., Peletier R.* Recursive algorithm for the control of output remnant of Preisach hysteresis operator // IEEE Control Syst. Lett. 2021. Vol. 5. No. 3. P. 1061–1066.
24. *Камачкин А.М., Потанов Д.К., Евстафьева В.В.* Неподвижные точки отображения, порожденного системой обыкновенных дифференциальных уравнений с релейным гистерезисом // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 4. С. 456–469.
25. *Kamachkin A.M., Potapov D.K., Yevstafyeva V.V.* Continuous dependence on parameters and boundedness of solutions to a hysteresis system // Appl. Math. 2022. Vol. 67. No. 1. P. 65–80.

Стаття представлена к публикации членом редколлегии А.И. Маликовым.

Поступила в редакцию 02.12.2021

После доработки 20.07.2022

Принята к публикации 26.10.2022