

## Нелинейные системы

© 2023 г. В.А. АЛЕКСАНДРОВ, канд. техн. наук  
(va.alexandrov@yandex.ru)

(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва),

Е.Ю. ЗЫБИН, д-р техн. наук (zybin@mail.ru),

В.В. КОСЬЯНЧУК, д-р техн. наук (kos.vl.v@gmail.com),

Н.И. СЕЛЬВЕСЮК, д-р техн. наук (nis@gosniias.ru)

(ФАУ Государственный научно-исследовательский институт  
авиационных систем, Москва),

Е.А. СТЕФАНЮК (stefa@ipu.ru),

А.А. ТРЕМБА, канд. физ.-мат. наук (atremba@ipu.ru),

М.В. ХЛЕБНИКОВ, д-р физ.-мат. наук (khlebnik@ipu.ru)

(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва;

Национальный исследовательский университет

“Московский физико-технический институт”)

### ОПТИМИЗАЦИЯ ВЫСОТНО-СКОРОСТНОГО ПРОФИЛЯ КРЕЙСЕРСКОГО ПОЛЕТА ВОЗДУШНОГО СУДНА В РЕАЛЬНОЙ АТМОСФЕРЕ<sup>1</sup>

Задача минимизации расхода топлива дозвукового турбореактивного самолета на этапе крейсерского полета с фиксированным временем прибытия рассматривается с учетом данных о состоянии реальной атмосферы. Используются значения на протяжении маршрута полета попутной составляющей скорости ветра на различных эшелонах, температуры воздуха на различных высотах и атмосферного давления. Оптимизация высотно-скоростного профиля полета осуществляется методом покоординатного спуска с ограничениями. Рассмотрена оптимизация расхода топлива крейсерского полета среднемагистрального самолета с использованием примера данных температуры, давления и скорости ветра. Получено снижение расхода топлива на 1,2% при оптимизации с учетом реальной атмосферы.

*Ключевые слова:* оптимизация, дозвуковой турбореактивный самолет, расход топлива, температура воздуха, скорость ветра, моделирование полета.

DOI: 10.31857/S0005231023040013, EDN: QHPVML

## 1. Введение

Актуальность проблемы минимизации расхода топлива повышается не только в связи с ростом требований к экономичности полетов, но и важностью сокращения выбросов  $CO_2$ . Поэтому решения, обеспечивающие снижение

---

<sup>1</sup> Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 21-71-30005, <https://rscf.ru/project/21-71-30005/>

расхода хотя бы на доли процента, представляют явный практический интерес. В [1] рассматривалась задача оптимизации высотно-скоростного профиля крейсерского полета воздушного судна для условий стандартной атмосферы и при отсутствии ветра. На примере полета на расстояние 5000 км среднемагистрального самолета показана возможность снижения расхода топлива на 0,4%. Это, с одной стороны, подтверждает вывод статьи [2] о том, что при полете на расстояние менее 5000 км маневрирование по скорости и высоте не дает заметной экономии топлива. С другой стороны, экономию топлива 0,4% можно считать значимым результатом.

Рассматривая задачу прибытия в точку назначения в заданное время, очевидно, что ее содержательное решение невозможно без учета скорости ветра на маршруте полета [3, 4]. Преобладающие значения скорости ветра на типовых эшелонах полета даже могут учитываться в расписании полетов. Но для каждого полета необходимо анализировать текущие прогнозные данные. Среди недавних публикаций по этой тематике отметим [5–7]. В [5] ищется оптимальный профиль скорости с учетом попутной/встречной составляющей ветра при полете на постоянной заданной высоте, и предполагается, что известна аппроксимирующая функция зависимости расхода топлива от массы воздушного судна и скорости полета. В [6] анализируется влияние профиля ветра на оптимальный высотно-скоростной профиль полета. Оптимизация прямых эксплуатационных расходов, объединяющих расход топлива и время полета, в условиях изменения ветра вдоль маршрута рассмотрена в [7].

В [8] показано значительное влияние температуры атмосферного воздуха на результаты оптимизации программы полета. При этом рассматриваются отличные от стандартной атмосферы, но типовые распределения температуры, характерные для различных климатических зон. Расчет значений параметров атмосферы в текущей точке полета из прогнозных значений для отдельных точек маршрута рассмотрен в [9], где подчеркнута важность использования данных атмосферы для расчета траектории полета.

В настоящей статье исследуется задача оптимизации высотно-скоростного профиля крейсерского полета, используя данные температуры атмосферного воздуха и скорости попутной/встречной составляющей ветра на различных высотах на протяжении маршрута полета. Необходимые данные могут быть получены от метеорологических служб. Так, в [9] используются данные глобальной системы прогноза погоды с шагом  $0.25^\circ \times 0.25^\circ$  по широте и долготе для 27 фиксированных изобарических уровней по высоте. Такие прогнозы выпускаются каждые 12 ч с интервалом прогноза 3 ч. В [10] использованы аналогичные данные глобальной спектральной модели, которые обновляются каждые 6 ч. В настоящей статье описан набор необходимых данных без привязки к какой-то определенной структуре данных метеорологической службы. Статья содержит 7 разделов, считая введение. В разделе 2 описана структура данных о температуре воздуха и скорости ветра, используемая в настоящей статье, а также приведены формулы расчета других параметров атмосферы. В разделе 3 сформулирована решаемая задача оптимизации рас-

хода топлива. Значение целевой функции оптимизации — расхода топлива на этапе крейсерского полета — находится путем численного решения системы нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих движение центра масс воздушного судна. Эта система рассмотрена в разделе 4. Раздел 5 посвящен разработанной процедуре оптимизации. Пример оптимизации расхода топлива дозвукового турбореактивного пассажирского самолета представлен в разделе 6. Заключительные выводы приведены в разделе 7.

## 2. Параметры атмосферы

Известно, что атмосферное давление  $P$  на высоте  $h_t$  определяется как

$$(1) \quad P = P_0 \exp \left( - \int_{h_0}^{h_t} \frac{g}{RK(h)} dh \right),$$

где  $P_0$  — значение атмосферного давления на известной высоте  $h_0$ ,  $g$  — ускорение свободного падения,  $R$  — газовая постоянная воздуха,  $K(h)$  — температура в Кельвинах, зависящая от высоты.

Будем считать, что состояние реальной атмосферы описано набором прогнозных данных для нескольких точек маршрута  $[L_0, L_1, \dots, L_{n_L}]$ , где  $L_i$  — это расстояние от начала оптимизируемого маршрута крейсерского полета, и для удобства изложения принимаем, что прогнозные данные есть в том числе для начальной и конечной точек маршрута, т.е.  $L_0 = 0$  и  $L_{n_L} = r_{cr}$ , где  $r_{cr}$  — заданное расстояние крейсерского полета. Для каждой точки  $L_i$ , ( $i = 0, \dots, n_L$ ) должны быть данные о температуре  $K(h)$  для различных высот  $[h_{K_0}, h_{K_1}, \dots, h_{K_{n_h}}]$ , где  $h_{K_{n_h}}$  не меньше максимальной высоты крейсерского полета, и значение давления  $P_0$  на высоте  $h_{K_0}$ . Для простоты будем считать, что значения этих высот одинаковы для всех точек маршрута  $L_i$ . Количество и значения высот должны быть достаточными для численной оценки с приемлемой точностью интеграла в (1) для  $h_{K_i} \leq h_t < h_{K_{i+1}}$  через сумму

$$(2) \quad \int_{h_{K_0}}^{h_t} \frac{g}{RK(h, L)} dh \approx \sum_{j=1}^i \frac{g(h_{K_j} - h_{K_{j-1}})}{R \frac{K(h_{K_{j-1}}, L) + K(h_{K_j}, L)}{2}} + \frac{g(h_t - h_{K_i})}{R \frac{K(h_t, L) + K(h_{K_i}, L)}{2}},$$

где значения  $K(h_t, L)$  для высоты  $h_t \neq h_i$  и  $K(h, L)$  для произвольной точки маршрута  $L \neq L_i$  определяются методом линейной интерполяции. Следует отметить, что при выборе высот с данными температуры должна учитываться тропопауза.

Таким образом, по этим данным можно вычислять оценку значения давления  $P(h, L)$  в каждой точке полета. Эта оценка является весьма важной, поскольку крейсерский полет осуществляется на барометрической высоте, т.е. полет на заданном эшелоне — это полет на заданном значении атмосферного давления. Кроме того, по этим данным можно получить оценки значений

скорости звука  $a$  и плотности воздуха  $\rho$  для любой точки полета, используя стандартные формулы

$$(3) \quad a(h, L) = \sqrt{\kappa R K(h, L)},$$

$$(4) \quad \rho(h, L) = \frac{P(h, L)}{R K(h, L)},$$

где  $\kappa = 1,4$  — показатель адиабаты воздуха.

Аналогично должна быть задана таблица скорости встречного/попутного ветра для нескольких точек маршрута  $[L_{\text{wind}_0}, L_{\text{wind}_1}, \dots, L_{\text{wind}_{n_w}}]$ , которые могут не совпадать с точками маршрута, для которых есть данные температуры. Скорость ветра должна быть задана для всех возможных эшелонов крейсерского полета, а для текущей точки полета определяться также методом линейной интерполяции. Таким образом, параметры атмосферы представляют собой следующий набор значений и прогнозных данных:

$$(5) \quad \begin{aligned} L_K &= [L_0, L_1, \dots, L_{n_L}], h_K = [h_{K_0}, h_{K_1}, \dots, h_{K_{n_h}}], \\ K_{\text{data}} &= \begin{bmatrix} K(h_{K_{n_h}}, L_0) & \dots & K(h_{K_{n_h}}, L_{n_L}) \\ \dots & \dots & \dots \\ K(h_{K_0}, L_0) & \dots & K(h_{K_0}, L_{n_L}) \end{bmatrix}, P_{0\text{data}} = [P_0(L_0), \dots, P_0(L_{n_L})], \\ L_{\text{wind}} &= [L_{\text{wind}_0}, L_{\text{wind}_1}, \dots, L_{\text{wind}_{n_w}}], h_{\text{wind}} = [h_{\text{wind}_1}, \dots, h_{\text{wind}_{n_{FL}}}], \\ V_{\text{wind}_{\text{data}}} &= \begin{bmatrix} V_{\text{wind}}(h_{\text{wind}_{n_{FL}}}, L_{\text{wind}_0}) & \dots & V_{\text{wind}}(h_{\text{wind}_{n_{FL}}}, L_{\text{wind}_{n_w}}) \\ \dots & \dots & \dots \\ V_{\text{wind}}(h_{\text{wind}_1}, L_{\text{wind}_0}) & \dots & V_{\text{wind}}(h_{\text{wind}_1}, L_{\text{wind}_{n_w}}) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Эти данные позволяют моделировать полет с учетом прогнозных данных реальной атмосферы. Следует учитывать, что так как значения скорости ветра и параметров атмосферы для текущей точки полета находятся методом линейной интерполяции из данных (5), то точность моделирования зависит от того, насколько эти данные отражают все изменения значений скорости ветра и параметров атмосферы по маршруту полета.

### 3. Постановка задачи

Задача прохождения заданного расстояния  $r_{\text{cr}}$  за заданное время  $t_{\text{cr}}$  для крейсерского полета с учетом данных о скорости ветра и температуры в самом простом варианте может быть решена как полет на выбранном эшелоне с постоянным числом Маха, которое можно вычислить как

$$(6) \quad M = \left( \frac{r_{\text{cr}}}{t_{\text{cr}}} - V_{\text{wind}_{\text{av}}} \right) / a_{\text{av}},$$

где  $V_{\text{wind}_{\text{av}}}$  — средняя скорость ветра и  $a_{\text{av}}$  — среднее значение скорости звука на выбранном эшелоне. Но выбор эшелона должен осуществляться исходя из минимизации расхода топлива, учитывая не только плотность воздуха,

определяющую подъемную силу и силу лобового сопротивления, но и расход топлива, необходимый для набора дополнительной высоты, а также разную скорость ветра на разных эшелонах.

Если расстояние крейсерского полета велико настолько, что может быть разрешена смена эшелона, то можно усложнить задачу, формируя высотный профиль полета следующим образом: для заданного количества  $N$  участков по высоте и заданного минимального времени полета без смены эшелона  $t_{FL_{\min}}$  найти оптимальные значения эшелона  $h_{FL_i}$  из множества разрешенных эшелонов

$$(7) \quad h_{FL_i} \in \{h_1, \dots, h_{n_{FL}}\}$$

на каждом из  $N$  участков и времени  $t_{FL_i}$  каждого участка при условиях

$$(8) \quad t_{FL_i} \geq t_{FL_{\min}},$$

$$(9) \quad \sum_{i=1}^N t_{FL_i} = t_{cr}.$$

Уменьшение массы воздушного судна по мере расходования топлива, разная плотность воздуха на различных участках полета, определяемая прогнозом температуры и давления, и разная скорость ветра могут приводить к тому, что изменение скорости полета на различных участках даже при выполнении условия прилета в заданное время может давать экономию топлива. Поэтому в настоящей работе, как и в [1], предлагается формировать скоростной профиль этапа крейсерского полета следующим образом: разделить этап крейсерского полета на  $n$  участков равного размера  $r = r_{cr}/n$ , для каждого из которых искать оптимальные значения времени  $t_{V_i}$ , затраченного на каждый участок, соблюдая условие

$$(10) \quad \sum_{i=1}^n t_{V_i} = t_{cr}.$$

На каждом таком участке по скорости полет будет проходить с числом Маха, определяемым аналогично (5):

$$(11) \quad M_i = \left( \frac{r}{t_{V_i}} - V_{\text{wind}_{av_i}} \right) / a_{av_i},$$

где  $V_{\text{wind}_{av_i}}$  и  $a_{av_i}$  — средние значения скорости ветра и звука на  $i$ -м участке.

Тогда сформулируем задачу оптимизации.

*Задача 1.* Для этапа крейсерского полета для заданных параметров воздушного судна, начальных условий полета, расстояния  $r_{cr}$  и времени  $t_{cr}$  крейсерского полета, числа участков  $n$  по скорости и  $N$  по высоте, разрешенных эшелонов полета и прогнозных значений параметров атмосферы (5) найти значения вектора

$$(12) \quad x = [t_{V_1}, \dots, t_{V_n}, h_{FL_1}, \dots, h_{FL_N}, t_{FL_1}, \dots, t_{FL_N}],$$

удовлетворяющие ограничениям (7)–(10) и минимизирующие расход топлива

$$(13) \quad q_{cr}(x) = \int_0^{t_{cr}} q_c(t) dt,$$

где  $q_c(t)$  — секундный расход топлива.

Следует помнить, что соотношение заданных расстояния  $r_{cr}$  и времени  $t_{cr}$  крейсерского полета должно быть достижимым для минимального и максимального разрешенного числа Маха с учетом скорости ветра.

#### 4. Моделирование расхода топлива

В (13) значение секундного расхода топлива упрощенно можно выразить как

$$(14) \quad q_c = \eta(M, T, h)T,$$

где  $T$  — текущее значение суммарной тяги двигателей, а  $\eta(M, T, h)$  — удельный расход топлива, зависящий от текущих значений числа Маха, тяги, высоты полета и других параметров. Обычно для получения значения  $\eta(M, T, h)$  используются аппроксимирующие формулы, соответствующие различным режимам работы двигателей исследуемого воздушного судна [11]. Значение тяги можно оценить в зависимости от текущих значений скорости и массы воздушного судна по статической модели, принимая воздушную скорость и высоту полета постоянными значениями [1].

Особенность рассматриваемой задачи с учетом данных реальной атмосферы состоит в том, что переходные процессы возникают не только при нечистых изменениях требуемых значений скорости и высоты в соответствии с выбранным высотно-скоростным профилем полета, но и в связи с изменением температуры воздуха в зависимости от текущей точки маршрута, которое приводит к изменению скорости звука, а следовательно, к изменению воздушной скорости для поддержания заданного числа Маха. Изменение атмосферного давления приводит к маневрированию по геометрической высоте для полета на постоянной барометрической высоте эшелона. Поэтому для более точной оценки значений тяги и удельного расхода топлива предлагается численно моделировать систему дифференциальных и алгебраических уравнений, описывающую движение центра масс воздушного судна. Эту систему логически можно разделить на три части. Первая отражает законы физики [1, 12, 13]:

$$(15) \quad m\dot{V} = T \cos(\alpha + \phi) - \frac{1}{2}c_x \rho S V^2 - mg \sin \Theta + V q_c,$$

$$(16) \quad mV\dot{\Theta} = T \sin(\alpha + \phi) - \frac{1}{2}c_y \rho S V^2 - mg \cos \Theta,$$

$$(17) \quad \dot{h} = V \sin \Theta,$$

$$(18) \quad \dot{L} = V \cos \Theta + V_{wind},$$

$$(19) \quad \dot{m} = -q_c,$$

где  $m$  — масса воздушного судна,  $V$  — воздушная скорость,  $T$  — суммарная тяга двигателей,  $\alpha$  — угол атаки,  $\phi$  — угол установки двигателей,  $c_x, c_y$  — аэродинамические коэффициенты лобового сопротивления и подъемной силы,  $\rho$  — плотность воздуха,  $S$  — площадь крыла,  $g$  — ускорение свободного падения,  $\Theta$  — угол наклона траектории,  $h$  — высота полета,  $L$  — пройденное расстояние,  $V_{\text{wind}}$  — скорость попутной/встречной составляющей ветра.

Вторая часть — это модели динамики тяги и тангажа, которые для целей моделирования расхода топлива можно упростить до дифференциальных уравнений первого порядка. Тангаж — это угол между осью воздушного судна и горизонтом, управляемый рулем высоты. Из значений тангажа и угла наклона траектории находим значение угла атаки:

$$(20) \quad \dot{T} = -k_1 T + k_2 \delta_T,$$

$$(21) \quad \dot{\theta} = -k_3 \theta + k_4 \delta_\theta,$$

$$(22) \quad \alpha = \theta - \Theta,$$

где  $\theta$  — тангаж,  $\delta_T, \delta_\theta$  — значения сигналов управления,  $k_1, k_2, k_3, k_4$  — коэффициенты моделей. К этой же части нужно отнести уравнение (14) вычисления секундного расхода топлива.

Третья часть — это моделирование системы управления. Предполагается, что управление тягой формируется ПИД-регулятором скорости, выраженной числом Маха:

$$(23) \quad \delta_T(t) = \text{PID}(M_i - M(t)),$$

где  $M_i$  — это значение, полученное из (11) для текущего участка по скорости, а значение  $M(t) = V(t)/a(t)$ , где  $V(t)$  получено из (15), а текущее значение скорости звука  $a(t)$  находим по формуле (3), используя данные (5) реальной атмосферы для текущей точки полета. Для целей настоящей работы не требуется точное воспроизводство функционирования системы управления, а достаточно упрощенного моделирования для получения переходных процессов, близких к реальным, для оценки секундного расхода топлива. Поэтому можно в (20) принять  $k_2 = k_1$ , и тогда коэффициент пропорциональности регулятора (23) должен выбираться так, чтобы значение  $\delta_T(t)$  было равно требуемой тяге. В этом случае значение  $\delta_T(t)$  ограничено значениями тяги в режиме малого газа и максимальной доступной тяги на текущих скорости и высоте полета. В крейсерском полете эти значения обычно не достигаются. Управление тангажом можно упрощенно моделировать как ПИ-регулятор барометрической высоты:

$$(24) \quad \delta_\theta(t) = \text{PI}(P_i - P(t)),$$

где  $P_i$  — это значение атмосферного давления, соответствующего выбранному эшелону для текущего участка по высоте, а  $P(t)$  — текущее значение атмосферного давления для высоты  $h(t)$ , полученной из (17), определяемое

по формулам (1), (2), используя данные (5) реальной атмосферы. Здесь также можно в (21) принять  $k_4 = k_3$ , и тогда коэффициент пропорциональности регулятора (24) выбирается так, чтобы значение  $\delta_\theta(t)$  было равно требуемому тангажу. Ограничение для  $\delta_\theta(t)$  — это сумма текущего значения угла атаки и максимального значения угла наклона траектории для крейсерского полета.

Для решения системы (14)–(24) должны быть заданы константы  $\phi$  и  $S$  в (15), (16), коэффициенты уравнений (20), (21), коэффициенты регуляторов (23), (24), таблицы или аппроксимирующие функции для значений аэродинамических коэффициентов  $c_x$  и  $c_y$  в (15), (16), которые зависят от угла атаки и числа Маха, и аппроксимирующая функция для значения удельного расхода топлива  $\eta(M, T, h)$  в (14). Ускорение свободного падения принимаем равным стандартному значению  $g_0 = 9,80665$ . Плотность воздуха  $\rho$  для (15), (16) и скорость ветра  $V_{\text{wind}}$  для (18) получаем из данных реальной атмосферы (5).

Таким образом, для выбранного вектора (12) и заданных начальных условий находим значение целевой функции (13), решая систему уравнений (14)–(24) для заданного времени  $t_{\text{cr}}$ . Для получения приемлемой точности при ограниченной вычислительной сложности предлагается численно решать эту систему методом Эйлера первого порядка с шагом одна секунда. При этом разница результата моделирования по сравнению с методом Рунге–Кутты четвертого порядка пренебрежимо мала [1]. Такой шаг можно считать достаточно малым для моделируемой системы, но увеличение шага может приводить к некорректному моделированию системы управления. Кроме того, при моделировании полета не будут использоваться упрощенные статические уравнения расчета расхода на участках с постоянной воздушной скоростью и высотой полета, предложенные в [1], так как при моделировании реальной атмосферы такие участки малы или могут отсутствовать.

Для корректности сравнения значений целевой функции, полученных для вариантов вектора (12) с разной конечной высотой  $h_{FL_N}$ , кроме начальных условий будем дополнительно задавать требуемое значение эшелона в конце этапа крейсерского полета  $h_{FL_{\text{final}}}$  и выделять фиксированное достаточное дополнительное время  $t_{\text{add}}$  для достижения этого эшелона с любого разрешенного эшелона  $h_{FL_N}$ . Тогда моделирование полета в течение времени  $t_{\text{cr}} + t_{\text{add}}$  для выбранного вектора (12) будет давать значение расхода топлива для одной и той же конечной высоты  $h_{FL_{\text{final}}}$ .

## 5. Процедура оптимизации

Решение рассматриваемой здесь задачи минимизации расхода топлива с учетом данных реальной атмосферы не приводит к необходимости изменения процедуры оптимизации, предложенной в [1]. Поэтому еще раз изложим только основную идею.

Так как значение целевой функции (13) находится путем моделирования, то аналитическая функция градиента отсутствует. Поэтому предлагается использовать детерминированный безградиентный поисковый метод оп-

тимизации, основанный на покоординатном спуске [14], с вспомогательными точками-кандидатами и с учетом ограничений.

Вектор варьируемых переменных (12) состоит из трех групп:  $x = [x^1, x^2, x^3]$ , где  $x^1 = [t_{V_1}, \dots, t_{V_n}, h_{FL_1}]$  — значения времени для каждого из  $n$  участков по скорости,  $x^2 = [h_{FL_1}, \dots, h_{FL_N}]$  — значения эшелонов для каждого из  $N$  участков по высоте и  $x^3 = [t_{FL_1}, \dots, t_{FL_N}]$  — длительность каждого из этих  $N$  участков. Особенность второй группы варьируемых переменных  $x^2$  состоит в том, что ее элементы принадлежат заданному конечному множеству разрешенных эшелонов  $h_{FL_i} \in \{h_1, \dots, h_{n_{FL}}\}$ , причем число элементов  $n_{FL}$  этого множества небольшое. Поэтому точками-кандидатами будут все разрешенные эшелоны. Для варьируемых переменных из групп  $x^1$  и  $x^3$  должны выполняться ограничения (10) и (9) соответственно. Это можно обеспечить, например, следующим образом: при увеличении выбранной компоненты все остальные компоненты группы уменьшаются так, чтобы было выполнено соответствующее равенство. Кроме того, для группы  $x^3$  должно выполняться ограничение (8). Отметим, что ограничения на число Маха

$$(25) \quad M_i \in [M_{\min}, M_{\max}]$$

при учете скорости ветра не могут быть точно преобразованы в ограничения для компонент группы  $x^1$ . Поэтому будем использовать максимально широкий интервал

$$t_{V_i} \in \left[ \frac{r}{M_{\max} a_{\max} + V_{\text{wind}_{\max}}}, \frac{r}{M_{\min} a_{\min} + V_{\text{wind}_{\min}}} \right],$$

но проверять, что если в результате получаем значение числа Маха, выходящее за допустимые пределы, то этот вариант вектора варьируемых переменных отбраковывается. Эта проверка реализована в процедуре вычисления значения целевой функции, и при нарушении ограничений (25) вычисление расхода топлива не производится, а значение целевой функции принимается максимальным.

Таким образом, процедура оптимизации организуется как покоординатный поиск минимума целевой функции, пока не будет достигнуто условие, что при прохождении по всем координатам не найден новый минимум целевой функции с учетом выбранного порога. Кроме того, установлено ограничение максимального числа шагов поиска.

## 6. Пример

Для проверки предложенных процедур моделирования расхода топлива и оптимизации разработано программное обеспечение, где заданы необходимые коэффициенты уравнений (20), (21), аппроксимирующие функции для аэродинамических коэффициентов и удельного расхода топлива, и реализована модель системы управления (23), (24) так, чтобы поведение системы

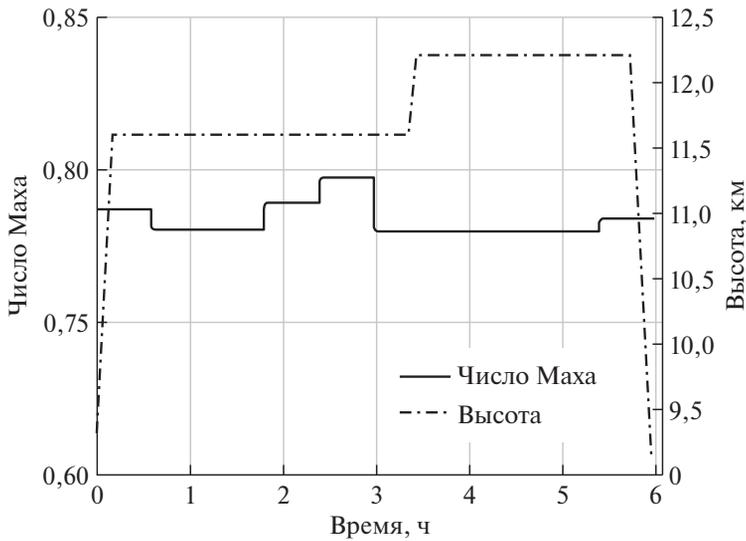


Рис. 1. Скорость, выраженная числом Маха, и высота полета в стандартной атмосфере.

соответствовало реальному воздушному судну. В табл. 1 для моделируемого среднемагистрального пассажирского самолета приведены начальные значения, ограничения и другие параметры.

Полученный для этих данных при помощи описанной выше процедуры оптимизации высотно-скоростной профиль для стандартной атмосферы [15] при отсутствии ветра приведен на рис. 1. Оценка расхода топлива составила 12 385 кг. Полученный профиль полета и расход топлива отличаются от полученных в [1], так как использована более точная аппроксимация аэродинамических коэффициентов, а в системе управления моделируется регулятор числа Маха вместо регулятора истинной воздушной скорости.

Таблица 1. Параметры моделирования

Наименование	Обозначение	Значение	Комментарий
Начальная масса	$m(0)$	75 000 кг	75 т
Начальная высота	$h_{FL_0}$	9144 м	FL300
Требуемая конечная высота	$h_{FL_{final}}$	9144 м	FL300
Начальная скорость	$M_0$	0,77	
Моделируемое расстояние	$r_{cr}$	5 000 000 м	5000 км
Время крейсерского полета	$t_{cr}$	21 600 с	6 ч
Минимальная скорость	$M_{min}$	0,6	
Максимальная скорость	$M_{max}$	0,85	
Максимальный наклон траектории	$\Theta_{max}$	1 град	
Число участков по скорости	$n$	10	
Число участков по высоте	$N$	4	

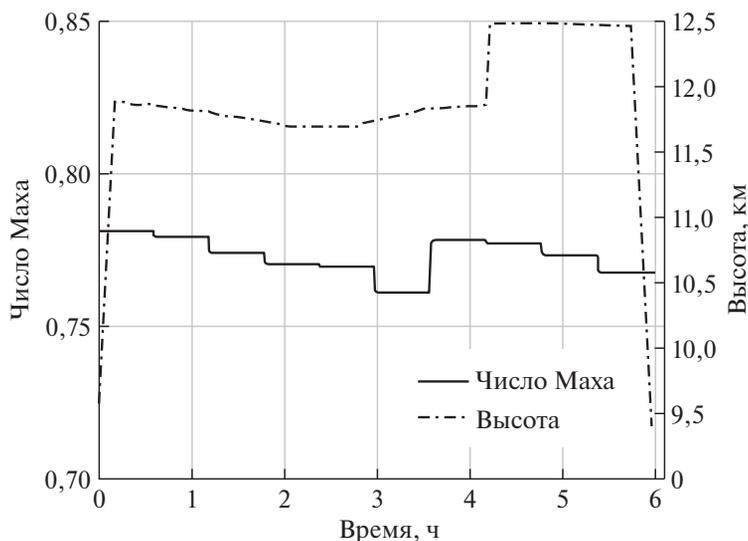


Рис. 2. Скорость, выраженная числом Маха, и высота полета в реальной атмосфере с данными из табл. 2.

В табл. 2 приведен пример данных температуры и давления на протяжении маршрута, отличных от стандартной атмосферы, и для сравнения в крайней правой колонке, обозначенной ISA, приведены соответствующие значения стандартной атмосферы.

Если промоделировать крейсерский полет с высотно-скоростным профилем, полученным для стандартной атмосферы, с использованием данных

**Таблица 2.** Прогнозные данные температуры и атмосферного давления

Точки маршрута, км	0	400	900	1750	2250	3000	4000	5000	ISA
Давление, гПа, (высота 2 м)	1019	1014	1013	1008	1002	997	999	1000	1013
Температура, °С, на высоте: 2 м	30	30	25	14	16	23	32	27	15
500 м	24	24	19	10	12	20	32	30	11,75
1000 м	21	19	14	4	6	16	28	27	8,5
1500 м	15	15	10	2	4	14	23	21	5,25
2000 м	11	12	9	1	1	11	19	17	2
2500 м	10	8	6	-1	-3	10	14	12	-1,25
3000 м	6	5	4	-2	-5	6	9	6	-4,5
3600 м	2	1	-2	-4	-6	1	4	2	-8,4
4200 м	-2	-3	-6	-7	-10	-3	-1	0	-12,3
5500 м	-11	-12	-14	-16	-20	-11	-9	-9	-20,75
9000 м	-42	-42	-42	-44	-40	-38	-37	-38	-43,5
11 000 м	-54	-53	-50	-45	-40	-48	-57	-58	-56,5
12 000 м	-54	-53	-50	-45	-40	-48	-57	-58	-56,5

**Таблица 3.** Скорость попутного ветра, м/с

Точки маршрута, км / Эшелон	0	400	900	1750	2250	3000	4000	5000
FL300	21	31	22	25	48	29	38	33
FL320	20	31	22	26	46	29	40	32
FL340	19	32	23	26	43	30	42	31
FL360	18	30	23	27	39	29	41	32
FL380	17	26	24	29	32	27	40	33
FL400	17	24	24	30	30	26	40	33

табл. 2 и формул параметров атмосферы из раздела 2, то получим расход топлива 12 445 кг, что больше, чем получено для стандартной атмосферы, и время прилета в заданную точку на 4,5 мин меньше, что не соответствует требованию прилета в заданное время.

Теперь проведем поиск оптимального высотного-скоростного профиля для тех же исходных данных полета, но с использованием значений температуры и давления реальной атмосферы из табл. 2. В этом случае достигнут расход топлива 12 296 кг, т.е. экономия составила 1,2% при выполнении требования заданного времени прилета. Полученная в этом примере абсолютная величина снижения расхода 149 кг — это экономически существенный результат. Полученный высотный-скоростной профиль приведен на рис. 2. Заметим, что геометрическая высота  $h$ , показанная на рисунке, не постоянна при полете на одном эшелоне, а меняется в соответствии с изменением атмосферного давления на протяжении маршрута.

Добавим к этому маршруту данные о скорости ветра. В табл. 3 приведены значения скорости попутной составляющей ветра. Обозначение “FL300” подразумевает, что это эшелон (Flight Level), соответствующий высоте полета 30 000 футов при стандартной атмосфере. Отрицательное значение используется, если это скорость встречного ветра. Рассмотрим пример, когда на всем маршруте ветер попутный. Очевидно, что в этом случае, используя профиль, полученный для стандартной атмосферы без учета скорости ветра, фактическое время прибытия будет меньше, чем заданное. В рассматриваемом примере время полета на расстояние 5000 км составило 5 ч 15 мин и расход топлива 11 157 кг. Профиль, показанный на рис. 3, получен при оптимизации с учетом данных табл. 2 реальной атмосферы и скоростей ветра из табл. 3. При этом получен расход топлива 11 112 кг, т.е. дополнительная экономия 0,4% при выполнении требования заданного времени прилета. На рис. 3 видно, что при попутном ветре и получающейся низкой воздушной скорости оказывается неэкономичным полет на высоких эшелонах.

Для примера полета с встречным ветром возьмем данные из табл. 3 с обратным знаком. Заметим, что в этом случае невозможно выполнить ограничение  $M < 0,85$  для заданных расстояния и времени крейсерского полета. Преобладающее направление ветра для данного маршрута обычно учитывается

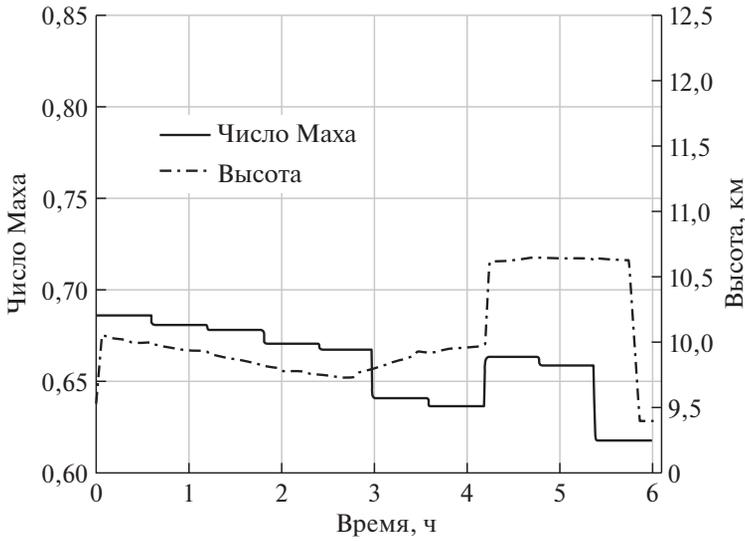


Рис. 3. Скорость, выраженная числом Маха, и высота полета в реальной атмосфере с попутным ветром с данными из табл. 2 и 3.

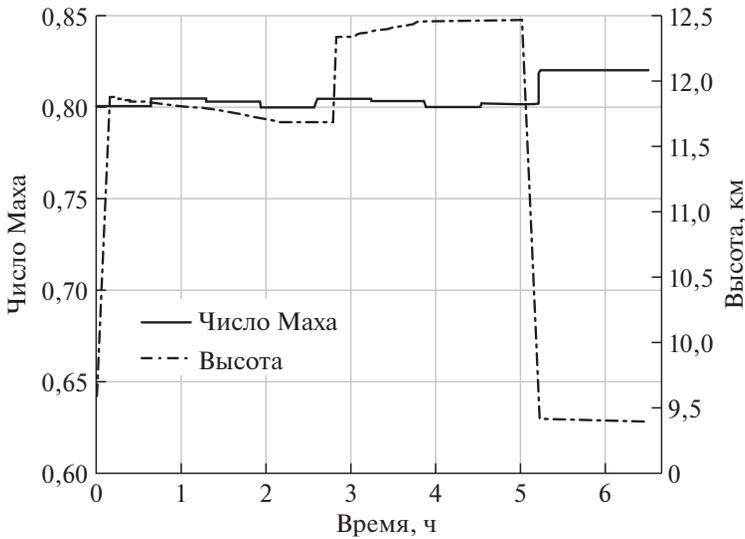


Рис. 4. Скорость, выраженная числом Маха, и высота полета в реальной атмосфере с встречным ветром с данными из табл. 2 и 3.

в расписании. Если это нестандартный прогноз, то очевидно, что выделенное время должно быть увеличено. Проведем оптимизацию для  $t_{cr} = 23\,400$  с (6,5 ч). Получен расход топлива 15 720 кг, высотно-скоростной профиль приведен на рис. 4. Следует отметить, что процедура оптимизации учитывает разницу скорости ветра на разных эшелонах.

В приведенных примерах для вычислений использовался персональный компьютер средней производительности с процессором Intel Core i5 2.8 ГГц. Процедура вычисления целевой функции путем численного решения системы дифференциальных уравнений (14)–(24) методом Эйлера первого порядка с шагом одна секунда при моделировании 6 ч полета выполняется примерно за 1 с. Процедура оптимизации для приведенных в табл. 1 значений  $n = 10$ ,  $N = 4$ , что дает 18 варьируемых переменных в векторе (12), сходится за 100–150 шагов. Так, в одном из примеров число шагов составило 135, и при этом целевая функция вычислялась 703 раза. Таким образом, процедура оптимизации была выполнена примерно за 12 мин, что приемлемо для практической реализации. Следует заметить, что при полете меньшей дальности не только сокращается время вычисления целевой функции, так как моделируется меньшее время полета, но и существенно снижается число шагов процедуры оптимизации, так как для меньшего расстояния выбираются меньшие значения числа участков по скорости  $n$  и высоте  $N$ , уменьшая число варьируемых переменных. Для полетов большой дальности можно реализовать поэтапную оптимизацию, когда первоначально задаются меньшие значения числа участков  $n$  и  $N$ , что позволит быстро получить предварительное решение. Кроме того, на практике и для окончательной оптимизации скорее всего будут выбираться меньшие значения  $n$  и  $N$ , так как, например, для полетов на расстояние 5000 км обычно смена эшелона проводится не более 1 раза, т.е.  $N = 2$ . В статье для примеров выбрано большее значение, чтобы найти возможные оптимальные решения. При этом только в примере, график высоты которого приведен на рис. 4, оптимальное решение имеет 2 смены эшелона, а в остальных примерах при  $N = 4$  были определены одинаковые значения эшелонов для первых двух и последних двух участков, т.е. для  $N = 2$  было бы получено такое же решение.

## 7. Заключение

Значение расхода топлива для заданных исходных данных получается как результат моделирования полета на всем рассматриваемом этапе. При этом важной составляющей модели являются текущие параметры атмосферы — значения атмосферного давления, плотности воздуха и скорости звука в каждой точке полета. Для определения этих значений используются данные об атмосферном давлении на протяжении маршрута и температуре воздуха на некоторой сетке высот от базовой, для которой определено атмосферное давление, до максимально возможной высоты полета. Заметим, что в этих данных температуры учитывается тропопауза. Оптимизация высотно-скоростного профиля крейсерского полета с использованием этих данных реальной атмосферы на протяжении маршрута позволяет получить заметное снижение расхода топлива (более 1%) для дозвукового турбореактивного пассажирского самолета.

Данные о скорости ветра на различных эшелонах на протяжении маршрута полета позволяют не только выбрать скоростной профиль, обеспечи-

вающий прибытие в точку назначения в заданное время, но и получить дополнительную экономию топлива. Учет скорости ветра существенно влияет на выбор экономичного эшелона полета, в том числе учитывая зависимость скорости ветра от высоты.

Таким образом, для оптимизации полета важно иметь максимальное количество и точность текущих и прогнозных данных о состоянии реальной атмосферы: атмосферного давления, температуры воздуха и скорости ветра по всему маршруту.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александров В.А., Зыбин Е.Ю., Косьянчук В.В., Сельвесюк Н.И., Тремба А.А., Хлебников М.В.* Оптимизация высотно-скоростного профиля крейсерского полета воздушного судна при фиксированном времени прибытия // *АиТ.* 2021. № 7. С. 69–85.  
*Alexandrov V.A., Zybin E.Y., Kosyanchuk V.V., Selvesyuk N.I., Tremba A.A., Khlebnikov M.V.* Optimization of the Altitude and Speed Profile of the Aircraft Cruise with Fixed Arrival Time // *Autom. Remote Control.* 2021. V. 82. No. 7. P. 1169–1182.
2. *Губарева Е.А., Мозжорина Т.Ю.* Оптимизация программы полета дозвукового пассажирского самолета на участке крейсерского полета // *Инженерный журнал: наука и инновации.* 2014. Вып. 12(36).
3. *Голубева А.А., Григоров П.Ю., Куланов Н.В.* Современная методология решения задачи вертикальной навигации самолетов гражданской и военно-транспортной авиации // XII мультиконференция по проблемам управления (МКПУ-2019). 2019. С. 32–35.
4. *Сагалаков А.Э., Филатьев А.С.* К оптимизации траекторий летательных аппаратов в реальной атмосфере // *Ученые записки ЦАГИ.* 2019. Т. 50. № 4. С. 31–52.
5. *Saucier A., Maazoun W., Soumis F.* Optimal speed-profile determination for aircraft trajectories // *Aerosp. Sci. Technol.* 2017. V. 67. P. 327–342.
6. *Franco A., Rivas D.* Optimization of Multiphase Aircraft Trajectories Using Hybrid Optimal Control // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics.* 2015. Vol. 38. No. 3. P. 452–467.
7. *Valenzuela A., Rivas D.* Analysis of along-track variable wind effects on optimal aircraft trajectory generation // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics.* 2016. Vol. 39. No. 9. P. 2148–2155.
8. *Мозжорина Т.Ю., Губарева Е.А.* Моделирование влияния атмосферных условий на результаты оптимизации программы полета дозвукового пассажирского самолета // *Математическое моделирование и численные методы.* 2014. № 3. С. 74–88.
9. *Dancila R.I., Botez R.M.* New atmospheric data model for constant altitude accelerated flight performance prediction calculations and flight trajectory optimization algorithms // *Proc. of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering.* 2021. 235(4). P. 405–426.
10. *Takeichi N.* Adaptive prediction of flight time uncertainty for ground-based 4D trajectory management // *Transportation Research Part C: Emerging Technologies.* 2018. Vol. 95. P. 335–345.

11. *Bartel M., Young T.M.* Simplified Thrust and Fuel Consumption Models for Modern Two-Shaft Turbofan Engines // Journal of Aircraft. 2008. No. 45(4). P. 1450–1456.
12. *Григоров П.Ю., Куланов Н.В.* Применение концепции обратных задач динамики в задачах вертикальной навигации // Известия РАН. Теория и системы управления. 2016. № 3. С. 130–140.
13. *Hull D.G.* Fundamentals of Airplane Flight Mechanics. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2007.
14. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. 2-е издание, исправленное и дополненное. М.: ЛЕНАНД, 2014.
15. ГОСТ 4401-81. Атмосфера стандартная. Параметры. М.: Изд-во стандартов, 2004.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Галеевым.*

Поступила в редакцию 03.07.2022

После доработки 11.11.2022

Принята к публикации 30.11.2022