Автоматика и телемеханика, № 4, 2023

Нелинейные системы

© 2023 г. **Э.М. СОЛНЕЧНЫЙ, д-р физ.-мат. наук (solnechn@ipu.ru)**
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С УЧЕТОМ ВНУТРЕННЕЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ. II

Исследуются динамические свойства реакции одномерной упругой механической системы на внешнее механическое воздействие. Вычисляются передаточные функции каналов от силового воздействия на одной из границ к перемещению сечений среды и к температуре. Устанавливается асимптотика поведения передаточной функции по каждому из этих каналов в окрестности нуля комплексной плоскости. Отдельно рассматривается случай отсутствия теплообмена системы с внешней средой.

Ключевые слова: распределенный термомеханический объект, динамические свойства, передаточные функции, асимптотика.

DOI: 10.31857/S0005231023040037, **EDN:** QHTUJG

1. Введение

Термомеханические системы, в которых происходят процессы механических колебаний и процессы теплопередачи, широко используются в современной технике, в связи с чем возникает необходимость математического исследования динамических свойств таких систем и отыскания методов управления ими.

Литература по изучению явления термоупругости достаточно обширна. После ранних работ [1–3] по изучению этого явления появилась [4], где исследовалась термоупругость как часть общего явления упругости. В современной литературе появились работы [5–7], посвященные изучению различных свойств термоупругих сред. В [8] развита современная теория термомеханики упругопластического деформирования. В [9] изложена постановка связанной динамической задачи термоупругости в одномерной среде.

В настоящей работе исследуются динамические свойства одномерной распределенной упругой термомеханической системы. В качестве исходной основы для составления математической модели процессов в такой системе была принята классическая работа [4], но в отличие от [10] исследуемая система считается подверженной не тепловому, а механическому (силовому) воздействию на одной из границ. Уравнения динамики системы в данной работе приняты в виде

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \beta\frac{\partial\theta}{\partial x},\\
&\beta_{\text{т}}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial x} + \frac{\partial\theta}{\partial t} = a\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2},
\end{aligned}
\right. \tag{1.1}
$$

где $t \geq 0,\ 0 \leq x \leq l;\ a, c, \beta, \beta_{\text{т}}$ — положительные константы (см., например, [4]).

Здесь $\varphi(x)(t)$ — перемещение сечения, находящегося на расстоянии $l - x$ от места приложения силового воздействия, $\theta(x)(t)$ — температура среды в сечении x.

Принимаются нулевые начальные условия по времени и граничные условия:

а) на функцию φ

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial\varphi}{\partial x}(0) = 0,\\
&\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}(l) = u,
\end{aligned}
\right. \tag{1.2}
$$

где u — управляющее воздействие, имеющее физический смысл механического (силового) воздействия на систему,

б) на функцию θ

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\left(-\lambda\frac{\partial\theta}{\partial x} + \alpha\theta\right)(0) = 0,\\
&\left(\lambda\frac{\partial\theta}{\partial x} + \alpha\theta\right)(l) = 0,
\end{aligned}
\right. \tag{1.3}
$$

где $\alpha,\ \lambda$ — положительные константы.

2. Вычисление векторной передаточной функции $u \to (\varphi(x), \theta(x))$

Выполнив преобразование Лапласа уравнений (1.1) и граничных условий ((1.2), (1.3)) по времени, получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно пары функций $(\overline{\varphi}(x), \overline{\theta}(x))$ — изображения по Лапласу пары функций $(\varphi(x)(t), \theta(x)(t))$,

$$
\left\{
\begin{aligned}
&c^2\frac{\partial^2\overline{\varphi}}{\partial x^2}(x)(p) - p^2\overline{\varphi}(x)(p) - \beta\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial x}(x)(p) = 0,\\
&a\frac{\partial^2\overline{\theta}}{\partial x^2}(x)(p) - p\overline{\theta}(x)(p) - \beta_{\text{т}}p\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial x}(x)(p) = 0,
\end{aligned}
\right. \tag{2.1}
$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial x}(0) = 0,\\
&p^2\overline{\varphi}(l) = \overline{u},
\end{aligned}
\right. \tag{2.2}
$$

$$
\begin{cases} \dfrac{\partial\overline{\theta}}{\partial x}(0) = \kappa\overline{\theta}(0), \\ \dfrac{\partial\overline{\theta}}{\partial x}(l) = -\kappa\overline{\theta}(l), \end{cases} \tag{2.3}
$$

где $\kappa = \frac{\propto}{\lambda}$.

Исследование краевой задачи (2.1)–(2.3) приводит к следующим выражениям для передаточных функций по каналам $u \to \varphi(x)$ и $u \to \theta(x)$:

Теорема 1. Передаточная функция системы по каналу $u \to \varphi(x)$ имеет вид

$$
W_{u\to\varphi(x)} = \frac{a_{22}}{\Delta_A}\left[ac^2 D_3(x) - b_1 p D_1(x)\right] - \beta\frac{a_{21}}{\Delta_A}\left[\kappa a D_1(x) + pD_0(x)\right], \tag{2.4}
$$

а передаточная функция по каналу $u \to \theta(x)$ имеет вид

$$
W_{u\to\theta(x)} = \frac{a_{22}}{\Delta_A}\beta_{\text{т}} p^3 D_0(x) + \tag{2.5}
$$

$$
+ \frac{a_{21}}{\Delta_A}\left[-ac^2 D_3(x) - \kappa ac^2 D_2(x) + b_2 p D_1(x) + \kappa a p^2 D_0(x)\right].
$$

Здесь обозначено: $\Delta_A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$,

$$
a_{11} = p^2\left(ac^2 D_3(l) - b_1 p D_1(l)\right),
$$

$$
a_{12} = \beta p^2\left(\kappa a D_1(l) + pD_0(l)\right),
$$

$$
a_{21} = \beta_{\text{т}} p^3\left(D_1(l) + \kappa D_0(l)\right),
$$

$$
a_{22} = ac^2 D_4(l) + 2\kappa ac^2 D_3(l) + \left(\kappa^2 ac^2 - b_2 p\right) D_2(l) -
$$

$$
- \kappa p\left(2ap + \beta\beta_{\text{т}}\right) D_1(l) - \kappa^2 a p^2 D_0(l),
$$

$$
D_j(x) = \frac{1}{R}\left(\rho_1^{(j-1)/2}\sinh\left(x\sqrt{\rho_1}\right) - \rho_2^{(j-1)/2}\sinh\left(x\sqrt{\rho_2}\right)\right) \quad (j = 0; 2; 4),
$$

$$
D_j(x) = \frac{1}{R}\left(\rho_1^{(j-1)/2}\cosh\left(x\sqrt{\rho_1}\right) - \rho_2^{(j-1)/2}\cosh\left(x\sqrt{\rho_2}\right)\right) \quad (j = 1; 3),
$$

$$
\rho_{1,2} = \frac{p\left(ap + b_1\right) \pm R}{2ac^2}, \quad R = ap\sqrt{\left(p+\mu\right)^2 + y^2}, \quad \mu = \frac{\beta\beta_{\text{т}} - c^2}{a}, \quad y = 2\frac{c}{a}\sqrt{\beta\beta_{\text{т}}},
$$

$$
b_1 = \beta\beta_{\text{т}} + c^2, \quad b_2 = \beta\beta_{\text{т}} + ap.
$$

3. Асимптотика поведения передаточных функций системы при $p \to 0$

Изучение динамических свойств исследуемой системы начнем с исследования поведения ее передаточных функций в окрестности нуля комплексной плоскости $\mathbf{C}$.

Т е о р е м а 2. *В окрестности нуля плоскости* $\mathbf{C}$ *передаточная функция* $W_{u\to\varphi(x)}$ *может быть представлена в виде*

$$W_{u\to\varphi(x)} = \frac{1}{p^2}\left(1 + O\left(p\right)\right), \tag{3.1}$$

а передаточная функция $W_{u\to\theta(x)}$ *может быть представлена в виде*

$$W_{u\to\theta(x)} = \frac{\beta_{\text{т}}}{6ac^2}p\left[x^3 - l^2\frac{3+\kappa l}{2+\kappa l}\left(x + \frac{1}{\kappa}\right) + O\left(p\right)\right]. \tag{3.2}$$

Здесь под $O\left(p\right)$ *понимается функция* $f\left(p\right)$ $\left(p \in \mathbf{C}\right)$, *для которой отношение* $\frac{f(p)}{\boldsymbol{p}}$ *остается ограниченным при* $p \to 0$.

Таким образом, по каналу $u \to \varphi(x)$ *исследуемая система обладает двойным интегрирующим свойством, а по каналу* $u \to \theta(x)$ *— дифференцирующим свойством.*

З а м е ч а н и е. Как видно из (3.2), в выражение для асимптотики передаточной функции $W_{u\to\theta(x)}$ при $p \to 0$ входит отношение $\frac{1}{\kappa} = \frac{\lambda}{\propto}$. Поэтому случай $\kappa = 0$, т.е. случай отсутствия у исследуемой системы теплообмена с внешней средой, требует отдельного рассмотрения. Оно проводится в следующем разделе.

4. Случай $\boldsymbol{\kappa = 0}$

$$W_{u\to\varphi(x)} = \frac{a_{22}}{\Delta_A}\left(ac^2D_3(x) - b_1pD_1(x)\right) - \beta\frac{a_{21}}{\Delta_A}pD_0(x), \tag{4.1}$$

$$W_{u\to\theta(x)} = \frac{a_{22}}{\Delta_A}\beta_{\text{т}}p^3D_0(x) + \frac{a_{21}}{\Delta_A}\left(-ac^2D_3(x) + b_2pD_1(x)\right). \tag{4.2}$$

Функции a_{jk} $(j,\, k = 1, 2)$ в данном случае имеют вид

$$a_{11} = p^2\left(ac^2D_3(l) - b_1pD_1(l)\right), \quad a_{12} = \beta p^3D_0(l), \quad a_{21} = \beta_{\text{т}}p^3D_1(l), \tag{4.3}$$

$$a_{22} = ac^2D_4(l) - b_2pD_2(l). \tag{4.4}$$

Т е о р е м а 3. *В случае* $\kappa = 0$ *передаточная функция* $W_{u\to\varphi(x)}$ *в окрестности нуля комплексной плоскости* $\mathbf{C}$ *может быть представлена в том же виде* (3.1), *что и в общем случае (см. теорему 2); передаточная же функция* $W_{u\to\theta(x)}$ *в этой окрестности может быть представлена в виде*

$$W_{u\to\theta(x)} = -\beta_{\text{т}}\frac{l}{2c^2}\left(1 + O\left(p\right)\right). \tag{4.5}$$

Таким образом, в случае $\kappa = 0$ *передаточная функция исследуемой системы по каналу* $u \to \theta(x)$ *имеет при* $p \to 0$ *конечный отличный от нуля предел. Такое свойство можно назвать статическим.*

Доказательства теорем 1–3 см. в Приложениях П.1–П.3.

5. Заключение

Проведенное в работе исследование динамических свойств термомеханического объекта управления при механическом (силовом) внешнем воздействии показывает наличие у объекта свойства двойного интегрирования по каналу воздействие $\to$ перемещение сечений одномерной среды и (но только при наличии теплообмена с внешней средой) свойства дифференцирования по каналу воздействие $\to$ температура.

Полученные выводы должны учитываться при проектировании системы управления термомеханическими объектами, для которых приемлемо принятое здесь математическое описание (1.1)–(1.3) их динамических свойств.

Проведенное в [10] и в данной работе исследование показывает, что учет внутренней обратной связи в объекте — от перемещения сечений к температуре — весьма осложняет задачу описания динамических свойств объекта по сравнению с исследованным ранее случаем неучета этой обратной связи (см. [11]).

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Доказательство теоремы 1.

1. Выполним преобразование Лапласа уравнений (2.1) по пространственной координате x (см. [12, п. 80, формулы 6 и 7]) с учетом первого из граничных условий (2.2):

$$\text{(П.1.1)}\qquad \begin{cases} \left(c^2q^2-p^2\right)\overline{\overline{\varphi}}(q)-\beta q\overline{\overline{\theta}}(q)=z_1(q),\\ -\beta_{\text{т}}qp\overline{\overline{\varphi}}(q)+\left(aq^2-p\right)\overline{\overline{\theta}}(q)=z_2(q), \end{cases}$$

где $z_1(q)=c^2q\overline{\varphi}(0)-\beta\overline{\theta}(0)$, $z_2(q)=aq\overline{\theta}(0)+a\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial x}(0)-\beta_{\text{т}}p\overline{\varphi}(0)$.

Решение системы (П.1.1) относительно $\left(\overline{\overline{\varphi}}(q),\overline{\overline{\theta}}(q)\right)$ с учетом выражений для $z_i(q)$ имеет вид

$$\text{(П.1.2)}\qquad \overline{\overline{\varphi}}(q)=\frac{ac^2q^3\overline{\varphi}(0)+B_1q+\beta p\overline{\theta}(0)}{\Delta(q)},$$

$$\text{(П.1.3)}\qquad \overline{\overline{\theta}}(q)=\frac{ac^2q^3\overline{\theta}(0)+ac^2q^2\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial x}(0)+B_2p^2-b_2qp\overline{\theta}(0)}{\Delta(q)},$$

где

$$\Delta(q)=ac^2\left(q^2-\rho_1\right)\left(q^2-\rho_2\right),\quad \rho_{1,2}=\frac{p\left(ap+b_1\right)\pm R}{2ac^2},$$

$$R=ap\sqrt{\left(p+\mu\right)^2+y^2},\quad \mu=\frac{\beta\beta_{\text{т}}-c^2}{a},\quad y=2\frac{c}{a}\sqrt{\beta\beta_{\text{т}}},$$

$$b_1=\beta\beta_{\text{т}}+c^2,\quad b_2=\beta\beta_{\text{т}}+ap,$$

$$B_1=\beta a\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial x}(0)-b_1p\overline{\varphi}(0),\quad B_2=\beta_{\text{т}}p\overline{\varphi}(0)-a\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial x}(0).$$

Опираясь на соотношение

$$\text{(П.1.4)}\qquad \frac{1}{\Delta(q)} = \frac{1}{R}\left(\frac{1}{q^2-\rho_1} - \frac{1}{q^2-\rho_2}\right),$$

от (П.1.2) и (П.1.3) переходим к оригиналам по координате x (см. [12, п. 80, формула 4]):

$$\text{(П.1.5)}\qquad \overline{\varphi}(x) = ac^2 D_3(x)\overline{\varphi}(0) + D_1(x)B_1 + \beta p D_0(x)\overline{\theta}(0),$$

$$\text{(П.1.6)}\quad \overline{\theta}(x) = ac^2 D_3(x)\overline{\theta}(0) + ac^2 D_2(x)\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial x}(0) - b_2 p D_1(x)\overline{\theta}(0) + p^2 D_0(x) B_2,$$

где

$$D_j(x) = \frac{1}{R}\left(\rho_1^{(j-1)/2}\sinh\left(x\sqrt{\rho_1}\right) - \rho_2^{(j-1)/2}\sinh\left(x\sqrt{\rho_2}\right)\right) \quad (j=0;2),$$
$$D_j(x) = \frac{1}{R}\left(\rho_1^{(j-1)/2}\cosh\left(x\sqrt{\rho_1}\right) - \rho_2^{(j-1)/2}\cosh\left(x\sqrt{\rho_2}\right)\right) \quad (j=1;3).$$

Второе из граничных условий (2.2) согласно (П.1.5) и первому из условий (2.3) принимает вид

$$\text{(П.1.7)}\qquad p^2\left[\left(ac^2 D_3(l) - b_1 p D_1(l)\right)\overline{\varphi}(0) + \beta\left(pD_0(l) + a\kappa D_1(l)\right)\overline{\theta}(0)\right] = \overline{u}.$$

Второе из условий (2.3) согласно (П.1.6) принимает вид

$$\text{(П.1.8)}\qquad ac^2\left(D_4(l) + \kappa D_3(l)\right)\overline{\theta}(0) + ac^2\kappa\left(D_3(l) + \kappa D_2(l)\right)\overline{\theta}(0) -$$
$$- b_2 p\left(D_2(l) + \kappa D_1(l)\right)\overline{\theta}(0) + p^2\left(D_1(l) + \kappa D_0(l)\right)\left(\beta_{\text{т}} p\overline{\varphi}(0) - \kappa a\overline{\theta}(0)\right) = 0,$$

где

$$D_4(l) = \frac{1}{R}\left(\rho_1^{3/2}\sinh\left(x\sqrt{\rho_1}\right) - \rho_2^{3/2}\sinh\left(x\sqrt{\rho_2}\right)\right).$$

Условия (П.1.7) и (П.1.8) образуют систему уравнений относительно вектора $\begin{pmatrix}\overline{\varphi}(0)\\ \overline{\theta}(0)\end{pmatrix}$:

$$\text{(П.1.9)}\qquad A\begin{pmatrix}\overline{\varphi}(0)\\ \overline{\theta}(0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\overline{u}\\ 0\end{pmatrix},$$

где $A = (a_{jk};\ j,k=1,2)$, $a_{11} = p^2\left(ac^2 D_3(l) - b_1 p D_1(l)\right)$;

$$a_{12} = \beta p^2\left(\kappa a D_1(l) + pD_0(l)\right), \quad a_{21} = \beta_{\text{т}} p^3\left(D_1(l) + \kappa D_0(l)\right);$$
$$a_{22} = ac^2 D_4(l) + 2\kappa ac^2 D_3(l) + \left(\kappa^2 ac^2 - b_2 p\right) D_2(l) -$$
$$- \kappa p\left(2ap + \beta\beta_{\text{т}}\right) D_1(l) - \kappa^2 a p^2 D_0(l).$$

Решение системы (П.1.9):

$$\begin{pmatrix} \overline{\varphi}(0) \\ \overline{\theta}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} \\ -a_{21} \end{pmatrix} \frac{\overline{u}}{\Delta_A}, \tag{П.1.10}$$

где $\Delta_A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Подставляя (П.1.10) в (П.1.5) и (П.1.6) с учетом выражений для B_i и первого из условий (2.3) получаем окончательные выражения для $\overline{\varphi}(x)$ и $\overline{\theta}(x)$:

$$\overline{\varphi}(x) = \left\{a_{22}\left[ac^2 D_3(x) - b_1 p D_1(x)\right] - \beta a_{21}\left[\kappa a D_1(x) + p D_0(x)\right]\right\}\frac{\overline{u}}{\Delta_A}; \tag{П.1.11}$$

$$\overline{\theta}(x) = \Big\{a_{22}\beta_{\text{т}} p^3 D_0(x) + \tag{П.1.12}$$

$$+ a_{21}\left[-ac^2 D_3(x) - \kappa a c^2 D_2(x) + b_2 p D_1(x) + \kappa a p^2 D_0(x)\right]\Big\}\frac{\overline{u}}{\Delta_A}.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Доказательство теоремы 2.

1. Функции R и ρ_j $(j = 1, 2$; см. пояснения к (2.4) и (2.5)) в окрестности нуля плоскости $\mathbf{C}$ могут быть представлены в виде

$$R = b_1 p\,(1 + O(p)); \quad \rho_1 = \frac{b_1 p}{ac^2}(1 + O(p)); \quad \rho_2 = O\left(p^2\right). \tag{П.2.1}$$

2. Функции $D_j(x)$ $(j = 0 \div 4)$ в окрестности нуля плоскости $\mathbf{C}$ могут быть представлены в виде

$$D_0(x) = \frac{x^3}{6}\frac{\rho_1 - \rho_2}{R} + O\left(p^2\right) = \frac{x^3}{6ac^2} + O\left(p^2\right); \tag{П.2.2}$$

$$D_1(x) = \frac{x^2}{2}\frac{\rho_1 - \rho_2}{R} + O\left(p^2\right) = \frac{x^2}{2ac^2} + O\left(p^2\right); \tag{П.2.3}$$

$$D_2(x) = x\frac{\rho_1 - \rho_2}{R} + O\left(p^2\right) = \frac{x}{ac^2} + O\left(p^2\right); \tag{П.2.4}$$

$$D_3(x) = \frac{\rho_1 - \rho_2}{R} + O\left(p^2\right) = \frac{1}{ac^2} + O\left(p^2\right); \tag{П.2.5}$$

$$D_4(x) = x\frac{\rho_1^2 - \rho_2^2}{R} + O\left(p^2\right) = x\frac{\rho_1 + \rho_2}{ac^2} + O\left(p^2\right) = x\frac{b_1}{a^2c^4}p + O\left(p^2\right). \tag{П.2.6}$$

3. Функции a_{jk} $(j, k = 1, 2$; см. пояснения к (П.1.9)) в окрестности нуля плоскости $\mathbf{C}$ могут быть представлены в виде

$$a_{11} = p^2\left(1 - \frac{b_1 l^2}{2ac^2}p + O\left(p^2\right)\right) = p^2\,(1 + O(p)); \tag{П.2.7}$$

$$a_{12} = \beta p^2 \left(\frac{l^3}{6ac^2} p + \kappa \frac{l^2}{2c^2} + O\left(p^2\right) \right) = \beta\kappa \frac{l^2}{2c^2} p^2 \left(1 + O(p)\right); \tag{П.2.8}$$

$$a_{21} = \beta_{\text{т}} p^3 \left(\frac{l^2}{2ac^2} + \kappa \frac{l^3}{6ac^2} + O\left(p^2\right) \right) = \tag{П.2.9}$$

$$= \beta_{\text{т}} p^3 \frac{l^2}{2ac^2} \left(1 + \kappa \frac{l}{3} \right) \left(1 + O\left(p^2\right) \right);$$

$$a_{22} = \frac{b_1 l}{ac^2} p + 2\kappa + l \left(\kappa^2 - \frac{b_2}{ac^2} p \right) - \kappa p \frac{l^2}{c^2} \left(p + \frac{\beta\beta_{\text{т}}}{2a} \right) - \tag{П.2.10}$$

$$- \kappa^2 p^2 \frac{l^3}{6c^2} + O\left(p^2\right) = \kappa\left(2 + \kappa l\right)\left(1 + O(p)\right).$$

4. Функция Δ_A (см. пояснения к (П.1.10)) и отношения $\frac{a_{2j}}{\Delta_A}$ ($j = 1, 2$; см. (2.4) и (2.5)) в окрестности нуля плоскости $\mathbf{C}$ могут быть представлены в виде

$$\Delta_A = p^2 \kappa \left(2 + \kappa l\right)\left(1 + O(p)\right) - p^5 \kappa \frac{\beta\beta_{\text{т}} l^4}{4ac^4} \left(1 + \kappa \frac{l}{3} \right) \left(1 + O(p)\right) = \tag{П.2.11}$$

$$= p^2 \kappa \left(2 + \kappa l\right)\left(1 + O(p)\right);$$

$$\frac{a_{21}}{\Delta_A} = p \frac{\beta_{\text{т}} l^2 \left(1 + \kappa l/3\right)}{2\kappa a c^2 \left(2 + \kappa l\right)} \left(1 + O(p)\right) = p \frac{\beta_{\text{т}} l^2 \left(3 + \kappa l\right)}{6\kappa a c^2 \left(2 + \kappa l\right)} \left(1 + O(p)\right), \tag{П.2.12}$$

$$\frac{a_{22}}{\Delta_A} = \frac{1}{p^2} \left(1 + O(p)\right). \tag{П.2.13}$$

5. Передаточные функции $W_{u \to \varphi(x)}$ и $W_{u \to \theta(x)}$ в окрестности нуля плоскости $\mathbf{C}$ могут быть представлены в виде

$$W_{u \to \varphi(x)} = \frac{1}{p^2} \left(1 - p \frac{b_1}{2ac^2} x^2 \right) \left(1 + O\left(p^2\right) \right) - \tag{П.2.14}$$

$$- p \frac{\beta\beta_{\text{т}} l^2 \left(1 + \kappa l/3\right)}{2ac^2 \kappa \left(2 + \kappa l\right)} \left(\kappa \frac{x^2}{2c^2} + p \frac{x^3}{6ac^2} + O\left(p^2\right) \right) = \frac{1}{p^2} \left(1 + O(p)\right),$$

$$W_{u \to \theta}(x) = p \beta_{\text{т}} \left[\frac{x^3}{6ac^2} - \right. \tag{П.2.15}$$

$$\left. - \frac{l^2 \left(3 + \kappa l\right)}{6ac^2 \kappa \left(2 + \kappa l\right)} \left(1 + \kappa x - p x^2 \frac{b_2}{2ac^2} - p^2 x^3 \frac{\kappa}{6c^2} \right) \right] \left(1 + O(p)\right) =$$

$$= p \frac{\beta_{\text{т}}}{6ac^2} \left[x^3 - l^2 \frac{3 + \kappa l}{2 + \kappa l} \left(x + \frac{1}{\kappa} \right) \right] \left(1 + O(p)\right).$$

Доказательство теоремы 3.

1. Как следует из (3.5) и (3.6), при $\kappa = 0$ функции a_{jk} $(j, k = 1, 2)$ в окрестности нуля плоскости $\mathbf{C}$ могут быть представлены в виде

$$a_{11} = p^2\left(1 + O(p)\right) \quad \text{(совпадает с (П.2.7))}, \tag{П.3.1}$$

$$a_{12} = \beta p^3\left(\frac{l^3}{6ac^2} + O\left(p^2\right)\right) = \beta p^3 \frac{l^3}{6ac^2}\left(1 + O\left(p^2\right)\right), \tag{П.3.2}$$

$$a_{21} = \beta_{\text{т}} p^3\left(\frac{l^2}{2ac^2} + O\left(p^2\right)\right) = \beta_{\text{т}} p^3 \frac{l^2}{2ac^2}\left(1 + O\left(p^2\right)\right), \tag{П.3.3}$$

$$\begin{aligned} a_{22} &= p\frac{l}{ac^2}\left(b_1 - b_2\right) + O\left(p^2\right) = \\ &= p\frac{l}{ac^2}\left(c^2 - ap\right) + O\left(p^2\right) = p\frac{l}{a}\left(1 + O(p)\right). \end{aligned} \tag{П.3.4}$$

2. Отсюда вытекает:

$$\Delta_A = p^3\frac{l}{a}\left(1 + O(p)\right) - \beta\beta_{\text{т}} p^6 \frac{l^5}{12a^2c^4}\left(1 + O\left(p^2\right)\right) = p^3\frac{l}{a}\left(1 + O(p)\right), \tag{П.3.5}$$

$$\frac{a_{21}}{\Delta_A} = \beta_{\text{т}}\frac{l}{2c^2}\left(1 + O(p)\right), \quad \frac{a_{22}}{\Delta_A} = \frac{1}{p^2}\left(1 + O(p)\right). \tag{П.3.6}$$

3. Отсюда получаем:

$$\begin{aligned} W_{u\to\varphi}(x) &= \frac{1 + O(p)}{p^2}\left[1 + O\left(p^2\right) - b_1 p\left(\frac{x^2}{2ac^2} + O\left(p^2\right)\right)\right] - \\ &- p\beta\beta_{\text{т}}\left(\frac{lx^3}{12ac^4} + O\left(p^2\right)\right) = \frac{1}{p^2}\left(1 + O(p)\right), \end{aligned} \tag{П.3.7}$$

$$\begin{aligned} W_{u\to\theta}(x) &= p\beta_{\text{т}}\frac{x^3}{6ac^2}\left(1 + O(p)\right) + \\ &+ \beta_{\text{т}}\frac{l}{2c^2}\left(1 + O(p)\right)\left[pb_2\frac{x^2}{2ac^2} - 1 + O\left(p^2\right)\right] = -\beta_{\text{т}}\frac{l}{2c^2}\left(1 + O(p)\right). \end{aligned} \tag{П.3.8}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Коваленко А.Д.* Введение в термоупругость. Киев: Наукова думка, 1964.
2. *Lord H., Shulman Y.* Ageneralized dynamical theory of thermoelasticity // J . Mech. Phys. Solids. 1967. V. 15. P. 299–309.
3. *Nayfeh A.H., Nemat-Nasser S.* Thermoelastic waves in solids with thermal relaxation // ActaMechanica. 1971. V. 12. P. 53–69.
4. *Новацкий В.* Теория упругости. Перевод с польского. М.: Мир, 1975.
   Novacki W. Teoria sprężystośći. Warszawa. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1970.

5. *Jordan P.M., Puri P.* On the propagation of plane waves in type – I11 thermoelasticmedia // Proc. Royal Soc. Lond. A. 2004.
6. *Роговой А.А., Столбова О.С.* Эволюционная модель термоупругости при конечных деформациях // Прикладная механика и техническая физика. 2008. Т. 49. № 3. С. 184–196.
7. *Бабенков М.Б.* Анализ распространения гармонических возмущений в термоупругой среде с релаксацией теплового потока // Прикладная механика и техническая физика. 2013. Т. 54. № 2. С. 126–137.
8. *Маркин А.А., Соколова М.Ю.* Термомеханика упругопластического деформирования. М.: Физматлит, 2013. 320 с.
9. *Торсукова Е.Б., Христич Д.В.* Постановка связанной динамической задачи термоупругости для стержня // Вестник ТулГУ. Серия «Дифференциальные уравнения и прикладные задачи». 2016 г. Вып. 1.
10. *Солнечный Э.М.* Исследование динамических свойств распределенной термомеханической системы с учетом внутренней обратной связи. I // АиТ. 2020. № 4.
11. *Солнечный Э.М.* Исследование динамических свойств распределенного термомеханического объекта управления. Доклад на Одиннадцатой международной конференции MLSD. 1-3.10.2018.
    Solnechnyi E.M. The Dynamic Properties Investigation for a Distributed Thermomechanical Control Plant. Published in: 2018 Eleventh International Conference “Management of large-scale system development” 1–3 Oct. 2018.
12. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного М.: Изд. Лань. 2002.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.Г. Кушнером.

Поступила в редакцию 11.05.2021

После доработки 30.10.2022

Принята к публикации 30.11.2022