

© 2023 г. И.Б. ФУРТАТ, д-р техн. наук (cainenash@mail.ru),  
П.А. ГУЩИН, канд. техн. наук (guschin.p@mail.ru),  
НГУЕН БА ХЮ (leningrat206@gmail.com)  
(Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург)

## УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА ВХОДНЫЕ И ВЫХОДНЫЕ СИГНАЛЫ<sup>1</sup>

Рассмотрено развитие метода, предложенного в публикации [1], на системы с произвольным соотношением количества входных и выходных сигналов. Получено решение, гарантирующее нахождение данных сигналов в заданном разработчиком множестве. Для решения задачи предложены две последовательные замены координат. Первая замена сводит выходную переменную объекта к новой переменной, размерность которой не превосходит размерности вектора управления. Вторая замена позволяет перейти от задачи управления с ограничениями к задаче управления без ограничений. В качестве иллюстрации работоспособности метода рассмотрено решение двух задач. Первая задача — управление по состоянию линейными системами с ограничениями на сигнал управления и фазовые переменные. Вторая задача — управление по выходу линейными системами с ограничением на выходной сигнал и сигнал управления. В обеих задачах проверка устойчивости замкнутой системы формулируется в терминах разрешимости линейных матричных неравенств. Полученные результаты сопровождаются примерами моделирования, иллюстрирующими эффективность предложенного метода.

*Ключевые слова:* динамическая система, замена координат, устойчивость, управление.

DOI: 10.31857/S0005231023040049, EDN: QHWNEA

### 1. Введение

В [1, 2] приведен обзор методов управления с обеспечением выходного сигнала объекта в заданном множестве. Также в [1, 2] предложено новое решение данной задачи, которое состоит в использовании специальной замены координат, позволяющей перейти от задачи управления с ограничениями к задаче управления без ограничений.

---

<sup>1</sup> Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 18-79-10104-П, <https://rscf.ru/project/18-79-10104/>).

Однако и решение [1, 2], и большая часть описанной литературы в [1, 2] ограничены рассмотрением объектов, у которых:

- 1) размерность сигнала управления больше или равна размерности регулируемого сигнала;
- 2) не накладываются ограничения на сигнал управления.

Касательно первого ограничения на практике существует достаточно много задач, когда размерность сигнала управления меньше размерности регулируемого сигнала, например управление неполноприводными системами: шагающие роботы, станки с программным управлением, летательные аппараты, водные суда, некоторые маятниковые системы и т.д. Для решения таких задач предложено много методов, в частности [3–6], однако они не гарантируют заданного качества регулирования в любой момент времени, а лишь в установившемся режиме.

Относительно второго ограничения логически возникает вопрос о величине сигнала управления, необходимого для обеспечения выходного сигнала в заданном множестве в любой момент времени.

В данной работе подход [1, 2] будет развит для решения следующих задач:

- 1) управление объектами, у которых размерность сигнала управления может быть меньше размерности регулируемого сигнала;
- 2) обеспечение регулируемого и управляющего сигналов в заданном множестве в любой момент времени;
- 3) использование аппарата линейных матричных неравенств для анализа устойчивости замкнутой системы и синтеза параметров регулятора.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 ставится общая задача управления с гарантией нахождения входного и выходного сигналов в заданном множестве в любой момент времени. В разделе 3 предложены две замены координат. Первая замена сводит выходную переменную объекта к новой переменной, размерность которой не превосходит размерности вектора управления. Вторая замена позволяет перейти от задачи управления с ограничениями к задаче управления без ограничений. В разделе 4 рассмотрено применение результата из раздела 3 к задаче управления по состоянию линейными системами с учетом ограничений на сигнал управления и фазовые переменные. В разделе 5 решена задача управления по выходу линейными системами с ограничением на выходной и управляющий сигналы. Полученные результаты сопровождаются примерами моделирования, иллюстрирующими эффективность предложенного метода.

В статье используются следующие *обозначения и определения*.  $\mathbb{R}^n$  — евклидово пространство размерности  $n$  с нормой  $|\cdot|$ ;  $\mathbb{R}^{n \times m}$  — множество всех  $n \times m$  вещественных матриц;  $P > 0$  — положительно определенная симметричная матрица;  $\lambda_{\min}(P)$  — наименьшее собственное число матрицы  $P > 0$ ;  $p = d/dt$ ; символ «\*» обозначает симметричный блок в симметричной матрице.

*Определение 1* [3, 7]. Непрерывная функция  $\alpha : [0, a) \rightarrow [0; \infty)$  принадлежит классу  $\mathcal{K}$ , если она является строго возрастающей и  $\alpha(0) = 0$ .

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим динамическую систему вида

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= F(x, u, t), \\ y &= H(x, u, t), \end{aligned}$$

где  $t \geq 0$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  — вектор состояния,  $u \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$  — сигнал управления,  $y = \text{col}\{y_1, \dots, y_l\} \in \mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^l$  — выходной сигнал, функции  $F$  и  $H$  определены для всех  $x, u$  и  $t$ ,  $F$  кусочно-непрерывна и ограничена по  $t$ , функция  $H$  непрерывно дифференцируемая по всем аргументам и ограниченная по  $t$ . Объект управления (1) управляемый и наблюдаемый для любого  $x \in \mathbb{R}^n$ .

В отличие от [1] в настоящей статье не требуются ограничения вида  $\dim u \geq \dim y$ , а возможно произвольное соотношение между размерностями сигналов  $u$  и  $y$ . Это достигается за счет замены вида

$$(2) \quad \xi = G(y, u, t),$$

где размерность  $\xi$  не превосходит размерности управляющего сигнала, т.е.  $\xi = \text{col}\{\xi_1, \dots, \xi_v\}$ ,  $v \leq m$ ,  $G$  — непрерывно дифференцируемая функция по всем аргументам и ограниченная по  $t$ .

*Замечание 1.* На самом деле можно не ограничиваться только классом непрерывно дифференцируемых функций  $G$ , но и рассмотреть более общий класс функций. Для этого рассмотрим следующее определение и комментарии к нему.

*Определение 2* [8]. *Функция  $u \rightarrow G(y, u, t)$  называется дифференцируемой в точке  $u \in \mathbb{R}^m$  по направлению  $v \in \mathbb{R}^m$ , если существует конечный предел*

$$G'_u(y, u, t; v) = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{G(y, u + \alpha v, t) - G(y, u, t)}{\alpha}.$$

*Если функция  $u \rightarrow G(y, u, t)$  дифференцируема в точке  $u$  по любому направлению  $v \in \mathbb{R}^m$ , то она называется дифференцируемой по направлениям в точке  $u$ , а функция  $v \rightarrow G'_u(y, u, t; v)$  называется производной функции  $u \rightarrow G(y, u, t)$  по направлениям.*

Пусть функция  $G(y, u, t)$  локально липшицева, непрерывно дифференцируема по  $y$  и  $t$  и дифференцируема по направлениям по  $u$ . Тогда для любых абсолютно непрерывных функций  $y(t)$  и  $u(t)$  функция  $G(y(t), u(t), t)$  также будет абсолютно непрерывной. Более того, по правилу вычисления производной по направлениям сложной функции [8] будет

$$\frac{d}{dt} G(y(t), u(t), t) = \frac{\partial G}{\partial y} \dot{y} + G'_u(y(t), u(t), t; \dot{u}(t)) + \frac{\partial G}{\partial t}$$

для почти всех  $t \geq 0$ . Здесь  $G'_u(y(t), u(t), t; \dot{u}(t))$  — производная функции  $u \rightarrow G(y(t), u, t)$  в точке  $u(t)$  по направлению  $\dot{u}(t)$ .

Таким образом, когда рассматриваемая в статье функция  $G$  не является дифференцируемой по  $u$ , но является дифференцируемой по направлениям по  $u$ , во всех выкладках величину  $\frac{\partial G(y(t), u(t), t)}{\partial u} \dot{u}(t)$  можно заменить на  $G'_u(y(t), u(t), t; \dot{u}(t))$ .

Требуется разработать закон управления, который обеспечит выполнение условия

$$(3) \quad \underline{g}_i(t) < \xi_i(t) < \bar{g}_i(t), \quad i = 1, \dots, v$$

для всех  $t$ . Функция  $G$  и непрерывно дифференцируемые функции  $\underline{g}_i(t)$  и  $\bar{g}_i(t)$  выбираются так, чтобы были учтены ограничения  $u \in \mathcal{U}$  и  $y \in \mathcal{Y}$ . Таким образом, ограничения (3) вместе с преобразованием (2) должны включать в себя ограничения на входные и выходные сигналы объекта (1). Дополнительно, выбором функций  $\underline{g}_i(t)$  и  $\bar{g}_i(t)$  можно задавать различную «конфигурацию» области, в которой осуществляется переходной процесс по  $\xi_i(t)$ .

Резюмируем: в статье требуется синтезировать закон управления, который обеспечит выполнение условия (3). С другой стороны, определение переменной  $\xi$  обуславливает поведение сигналов  $y$  и  $u$ . Так, в разделах 4 и 5 функция  $G$  будет задана в квадратичной форме, что вместе с (3) требует нахождения переменных  $y$  и  $u$  в некоторой области, проекциями на координатные плоскости которой являются кольца с переменными радиусами, зависящими от  $\underline{g}_i(t)$  и  $\bar{g}_i(t)$  (подробнее см. ниже). В замечаниях 5 и 7 приведены примеры других видов замен (2), что обуславливает другие формы областей, где будут находиться  $y$  и  $u$ .

### 3. Метод решения

Следуя [1], введем замену переменной  $\xi$  в виде

$$(4) \quad \xi(t) = \Phi(\varepsilon(t), t),$$

где  $\varepsilon(t) \in \mathbb{R}^v$  — непрерывно дифференцируемая функция по  $t$ ,  $\Phi(\varepsilon, t) = \text{col}\{\Phi_1(\varepsilon, t), \dots, \Phi_v(\varepsilon, t)\}$  удовлетворяет следующим условиям:

- (а)  $\underline{g}_i(t) < \Phi_i(\varepsilon, t) < \bar{g}_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, v$  для любых  $t \geq 0$  и  $\varepsilon \in \mathbb{R}^v$ ;
- (б) существует обратное отображение  $\varepsilon = \Phi^{-1}(\xi, t)$  для любых  $\xi$  из (3) и  $t \geq 0$ ;
- (в) функция  $\Phi(\varepsilon, t)$  непрерывно дифференцируемая по  $\varepsilon$  и  $t$ , а также  $\det \left( \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right) \neq 0$  для любых  $\varepsilon \in \mathbb{R}^v$  и  $t \geq 0$ ;
- (г)  $\left| \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t} \right| \leq \gamma$ ,  $\gamma > 0$  для любых  $\varepsilon \in \mathbb{R}^v$  и  $t \geq 0$ . Величина  $\gamma$  известна, поскольку (4) определяется разработчиком.

Для синтеза закона управления потребуется знание динамики  $\varepsilon(t)$ . Найдем полные производные по времени от  $y(t)$  и  $\xi(t)$  вдоль траекторий (1), (2), (4) и приравняем полученные результаты для (2) и (4). В итоге получим

$$(5) \quad \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial x} F + \frac{\partial H}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial H}{\partial t},$$

$$\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \dot{\varepsilon} + \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t} = \frac{\partial G}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial G}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial G}{\partial t}.$$

Принимая во внимание условие в), выразим  $\dot{\varepsilon}$  из (5) в виде

$$(6) \quad \dot{\varepsilon} = \left( \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right)^{-1} \left[ \frac{\partial G}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial x} F + \left( \frac{\partial G}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial u} + \frac{\partial G}{\partial u} \right) \dot{u} + \right. \\ \left. + \frac{\partial G}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial t} - \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t} \right].$$

*Замечание 2.* Если по условию задачи не доступно измерению состояние  $x$ , то для синтеза закона управления вместо (6) удобно использовать выражение, полученное из второго выражения в (5) в виде

$$(7) \quad \dot{\varepsilon} = \left( \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right)^{-1} \left[ \frac{\partial G}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial G}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial G}{\partial t} - \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t} \right].$$

В следующих разделах выражения (6) и (7) будут использоваться для синтеза законов управления. Теперь сформулируем основной результат настоящего раздела.

*Теорема 1.* Пусть для преобразования (4) выполнены условия (а)–(г),  $\underline{g}_i(0) < \xi_i(0) < \bar{g}_i(0)$ ,  $i = 1, \dots, v$ , существует стабилизирующий закон управления  $u = u(t, y, \varepsilon)$  для системы (6) или (7), кусочно-непрерывный по  $t$  и локально липшицевый по  $y$  и  $\varepsilon$ , а также существует функция Ляпунова  $V(t, \varepsilon)$  такая, что

$$\alpha_1(|\varepsilon|) \leq V(t, \varepsilon) \leq \alpha_2(|\varepsilon|),$$

$$(8) \quad \dot{V} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \varepsilon} \left( \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right)^{-1} \left[ \frac{\partial G}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial G}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial G}{\partial t} - \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t} \right] \leq -\alpha_3(|\varepsilon|),$$

где  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  и  $\alpha_3$  —  $\mathcal{K}$ -функции. Тогда будет выполнено условие (3).

Так как выполнены условия (8), то  $\varepsilon(t)$  — предельно ограниченная функция. Тогда из условия (а) следует, что будет выполнено условие (3).

*Замечание 3.* Условия теоремы 1 остаются справедливыми при ослабленных предположениях о дифференцируемости функции  $G$  [9], а именно, если  $G$  локально липшицева по всем переменным, непрерывно дифференцируе-

ма по  $y$  и  $t$ , и дифференцируема по направлениям по  $u$ . В этом случае в правой части второго равенства (5) второе слагаемое заменится на  $G'_u(y, u, t; v)$  (см. определение 2). Значит, равенства (5)–(7) будут выполнены только для почти всех  $t$ . В результате в (6) и (7) необходимо заменить  $\frac{\partial G}{\partial u} \dot{u}$  на соответствующую производную по направлениям и рассматривать все выкладки для почти всех  $t$ . Поэтому ниже в доказательствах теорем 2 и 3 соответствующие (не-)равенства для производных выполняются для почти всех  $t$ .

В [1] предложены различные частные виды замены координат (4), не связанные друг с другом. Ниже приведем новый вид замены координат, который позволит связать преобразования из [1] и получить ряд новых видов замен.

*Пример 1.* Пусть  $\Phi(\varepsilon, t) \in \mathbb{R}$  в (4) задана в виде

$$(9) \quad \Phi(\varepsilon, t) = \frac{\bar{g}(t) - \underline{g}(t)}{2} T(\varepsilon) + \frac{\underline{g}(t) + \bar{g}(t)}{2},$$

где  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ,  $T(\varepsilon)$  — строго монотонная функция такая, что  $-1 < T(\varepsilon) < 1$  для любых  $\varepsilon$ .

Достоинство замены координат (9) по сравнению с [1] состоит в том, что она позволяет отдельно выделить функции  $\bar{g}(t)$ ,  $\underline{g}(t)$  и  $T(\varepsilon)$ . Функции  $\bar{g}(t)$  и  $\underline{g}(t)$  определяют желаемую область для регулируемой переменной и задаются разработчиком. Функция  $T(\varepsilon)$  определяет замену координат. Например,  $T(\varepsilon)$  может быть выбрана в виде

$$T(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{1 + |\varepsilon|}, \quad T(\varepsilon) = \frac{e^\varepsilon - 1}{e^\varepsilon + 1} = \text{th}(0,5\varepsilon), \quad T(\varepsilon) = \frac{2}{\pi} \arctg(\varepsilon) \quad \text{и т.п.}$$

Ниже рассмотрим применение предложенного подхода для тех же типов моделей, что и в [1]. Обобщение полученных результатов на случай неизвестных параметров модели может быть непосредственно получено как в [2].

#### 4. Управление по состоянию с ограничением на фазовые переменные и сигнал управления

Рассмотрим объект управления

$$(10) \quad \dot{x} = Ax + Bu + Df,$$

где  $x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}$ ,  $f \in \mathbb{R}$  и  $|f(t)| \leq \bar{f}$  для всех  $t$ , матрицы  $A$ ,  $B$  и  $D$  известны и имеют соответствующие размерности. Пара  $(A, B)$  управляема. В данном случае  $y = x$ . Множества  $\mathcal{X}$  и  $\mathcal{U}$  заданы как

$$(11) \quad \mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T P_x x \leq 1\}, \quad \mathcal{U} = \{u \in \mathbb{R} : p_u |u| \leq 1\},$$

где  $P_x > 0$  и  $p_u > 0$  задаются разработчиком.

Для сравнения ограничений по  $x$  и  $u$  введем замены переменных  $\tilde{x} = \sqrt{\lambda_{\min}(P_x)} x$  и  $\tilde{u} = p_u u$ , которые позволяют пропорционально преобразовать

$x^T P_x x \leq 1$  к новому эллипсоиду с наибольшей полуосью единичной длины и  $p_u |u| \leq 1$  к новому отрезку длины 2. С учетом данной замены преобразуем уравнение объекта (10) и множества  $\mathcal{X}, \mathcal{U}$  к виду

$$(12) \quad \begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= A\tilde{x} + \tilde{B}\tilde{u} + \tilde{D}f, \\ \tilde{\mathcal{X}} &= \left\{ \tilde{x} \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{\lambda_{\min}\{P_x\}} \tilde{x}^T P_x \tilde{x} \leq 1 \right\}, \quad \tilde{\mathcal{U}} = \{ \tilde{u} \in \mathbb{R} : |\tilde{u}| \leq 1 \}, \end{aligned}$$

где  $\tilde{B} = \frac{\sqrt{\lambda_{\min}\{P_x\}}}{p_u} B$  и  $\tilde{D} = \sqrt{\lambda_{\min}\{P_x\}} D$ .

Представим новый сигнал управления  $\tilde{u}$  в виде следующей суммы:

$$(13) \quad \tilde{u} = \tilde{u}_1 + \tilde{u}_2,$$

где  $\tilde{u}_1$  будет использоваться для стабилизации (12),  $\tilde{u}_2$  — для обеспечения заданных ограничений на  $\tilde{x}$  и  $\tilde{u}$ .

С учетом неравенством Юнга ( $2a^T b \leq \mu a^T a + \mu^{-1} b^T b$  для любых  $a, b \in \mathbb{R}^n$  и  $\mu > 0$ ) рассмотрим следующую оценку:  $\tilde{u}^2 = \tilde{u}_1^2 + 2\tilde{u}_1 \tilde{u}_2 + \tilde{u}_2^2 \leq (1+r)\tilde{u}_1^2 + (1+r^{-1})\tilde{u}_2^2$ ,  $r > 0$ . Учитывая, что  $y = x$  в (10), определим переменную  $\xi$  в (2) в виде

$$(14) \quad \xi = \frac{1}{\lambda_{\min}\{P_x\}} \tilde{x}^T P_x \tilde{x} + (1+r)\tilde{u}_1^2 + (1+r^{-1})(|\tilde{u}_2| + \delta)^2,$$

где величина  $\delta > 0$  задается разработчиком и потребуется для реализации закона управления  $\tilde{u}_2$  с учетом того, что  $|\tilde{u}_2| + \delta \neq 0$ . Обозначив  $P_1 = \frac{1}{\lambda_{\min}\{P_x\}} P_x$ ,  $p_2 = 1+r$  и  $p_3 = 1+r^{-1}$ , перепишем (14) в виде

$$(15) \quad \xi = \tilde{x}^T P_1 \tilde{x} + p_2 \tilde{u}_1^2 + p_3 (|\tilde{u}_2| + \delta)^2.$$

В силу того, что  $\xi$  — скалярная величина, представим (3) как

$$(16) \quad \underline{g}(t) < \xi(t) < \bar{g}(t).$$

Так как

$$\tilde{x}^T P_1 \tilde{x} + \tilde{u}^2 \leq \tilde{x}^T P_1 \tilde{x} + p_2 \tilde{u}_1^2 + p_3 \tilde{u}_2^2 \leq \tilde{x}^T P_1 \tilde{x} + p_2 \tilde{u}_1^2 + p_3 (|\tilde{u}_2| + \delta)^2,$$

то, выбрав  $\bar{g}(t) \leq 1$ , получим, что в (16) учтены ограничения (12).

Требуется синтезировать закон управления, который обеспечит выполнение (16). Тогда фазовые переменные и сигнал управления будут находиться в заданных множествах  $\mathcal{X}$  и  $\mathcal{U}$  с дополнительным выполнением условия (16).

Отметим, что метод [1] для объекта (10) позволяет решить только задачу нахождения одной компоненты вектора  $x$  в заданном множестве без ограничений на сигнал управления.

Сформулируем основной результат раздела 4.

*Теорема 2.* Пусть для преобразования (2) выполнены условия (а)–(г),  $\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} > 0$  для любых  $\varepsilon$  и  $t$ , а также  $\underline{g}(0) < \xi(0) < \bar{g}(0)$ . Если для заданных  $\delta > 0$ ,  $\mu > 0$ ,  $P_1 > 0$ ,  $p_2 > 0$ ,  $p_3 > 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $c > 0$  и  $K \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  существуют  $H > 0$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\tau_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, 6$  такие, что при  $v = \pm \bar{f}$  разрешимы следующие линейные неравенства:

$$(17) \quad \begin{bmatrix} -\alpha + 0,5\tau_1 & 0,5v\mu^{-1}\tilde{D}^T\tilde{D} & -0,5 \\ * & -\tau_2 & 0 \\ * & * & -\tau_3 \end{bmatrix} \leq 0, \\ c\tau_1 \geq \bar{f}^2\tau_2 + \gamma^2\tau_3,$$

$$(18) \quad \begin{bmatrix} \bar{A}^T H + H\bar{A} + \beta H & H\tilde{B} & H\tilde{D} \\ * & -\tau_4 & 0 \\ * & * & -\tau_5 \end{bmatrix} \leq 0, \\ H \geq \bar{P}_1, \\ K^T K \leq \tau_6 H,$$

$$\frac{\inf\{\bar{g}(t)\}}{\lambda_{\min}\{\bar{P}_1\}}\beta \geq \frac{\inf\{\bar{g}(t)\}}{p_3}\tau_4 + \bar{f}^2\tau_5, \\ \frac{\inf\{\bar{g}(t)\}}{\lambda_{\min}\{\bar{P}_1\}}\tau_6 \leq \frac{1}{1+r},$$

тогда закон управления

$$(19) \quad u = \frac{1}{p_u}(\tilde{u}_1 + \tilde{u}_2), \\ \tilde{u}_1 = K\tilde{x}, \\ \dot{\tilde{u}}_2 = -\frac{1}{2p_3(|\tilde{u}_2| + \delta)}\text{sign}(u_2) \left[ \alpha\varepsilon + 2\tilde{x}^T \bar{P}_1 \bar{A}\tilde{x} + 2\tilde{x}^T \bar{P}_1 \tilde{B}\tilde{u}_2 + \mu\text{sign}(\varepsilon)\tilde{x}^T \bar{P}_1^2 \tilde{x} \right]$$

обеспечит выполнение (16), где  $\bar{A} = A + \tilde{B}K$  и  $\bar{P}_1 = P_1 + p_2 K^T K$ .

*Замечание 4.* Для разрешимости (18) необходимо выбирать  $K$  из условия гурвицевости матрицы  $\bar{A}$ .

*Доказательство.* Отметим, что в статье решения уравнений с разрывной правой частью рассматриваются в смысле Филиппова. Поэтому в доказательствах теорем 2 и 3 соответствующие (не-)равенства для производных будут выполнены для почти всех  $t$ . Принимая во внимание (13) и (19), преобразуем (12) и (15) к виду

$$(20) \quad \dot{\tilde{x}} = \bar{A}\tilde{x} + \tilde{B}\tilde{u}_2 + \tilde{D}f, \\ \xi = \tilde{x}^T \bar{P}_1 \tilde{x} + p_3(|\tilde{u}_2| + \delta)^2.$$



С учетом (20) перепишем (6) как

$$(21) \quad \dot{\varepsilon} = \left( \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right)^{-1} \left[ 2\tilde{x}^T \bar{P}_1 \bar{A} \tilde{x} + 2\tilde{x}^T \bar{P}_1 \tilde{B} \tilde{u}_2 + 2\tilde{x}^T \bar{P}_1 \tilde{D} f + \right. \\ \left. + 2p_3(|\tilde{u}_2| + \delta) \text{sign}(\tilde{u}_2) \dot{\tilde{u}}_2 - \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t} \right].$$

Для анализа устойчивости решений (21) рассмотрим функцию Ляпунова вида

$$(22) \quad V_1 = 0,5\varepsilon^2.$$

Взяв полную производную по времени от (22) вдоль решений (21), получим:

$$(23) \quad \dot{V}_1 = \left( \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right)^{-1} \varepsilon \left[ 2\tilde{x}^T \bar{P}_1 \bar{A} \tilde{x} + 2\tilde{x}^T \bar{P}_1 \tilde{B} \tilde{u}_2 + 2\tilde{x}^T \bar{P}_1 \tilde{D} f + \right. \\ \left. + 2p_3(|\tilde{u}_2| + \delta) \text{sign}(\tilde{u}_2) \dot{\tilde{u}}_2 - \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t} \right].$$

Воспользовавшись неравенством Юнга для

$$2\varepsilon \tilde{x}^T \bar{P}_1 \tilde{D} f \leq \mu |\varepsilon| \tilde{x}^T \bar{P}_1^2 \tilde{x} + \mu^{-1} |\varepsilon| \tilde{D}^T \tilde{D} f^2$$

и учитывая третье выражение в (19), оценим (23) в виде

$$(24) \quad \dot{V}_1 \leq \left( \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right)^{-1} \left( -\alpha \varepsilon^2 + \mu^{-1} |\varepsilon| \tilde{D}^T \tilde{D} f^2 - \varepsilon \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t} \right).$$

Потребуем при  $V_1 \geq c$  выполнение условия  $\dot{V}_1 \leq 0$ , принимая во внимание ограничения  $f^2 \leq \bar{f}^2$  и  $\left( \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t} \right)^2 \leq \gamma^2$  (см. постановку задачи и условие (г)). Так как  $\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} > 0$  не влияет на знак выражения (24), то перепишем выше-названные условия как

$$(25) \quad -\alpha \varepsilon^2 + \mu^{-1} \varepsilon \text{sign}(\varepsilon) \tilde{D}^T \tilde{D} f^2 - \varepsilon \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t} \leq 0 \quad \forall \left( \varepsilon, f, \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t} \right) : \\ 0,5\varepsilon^2 \geq c, \quad f^2 \leq \bar{f}^2, \quad \left( \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t} \right)^2 \leq \gamma^2.$$

Обозначив  $z = \text{col} \left\{ \varepsilon, f, \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t} \right\}$ , перепишем (25) в матричном виде:

$$(26) \quad z^T \begin{bmatrix} -\alpha & 0,5\mu^{-1} \text{sign}(\varepsilon) f \tilde{D}^T \tilde{D} & -0,5 \\ * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \end{bmatrix} z \leq 0, \\ z^T \begin{bmatrix} -0,5 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \end{bmatrix} z \leq -c, \quad z^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 \\ * & * & 0 \end{bmatrix} z \leq \bar{f}^2, \quad z^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \\ * & * & 1 \end{bmatrix} z \leq \gamma^2.$$

Согласно S-процедуре [10–12], неравенства (26) будут выполнены, если будут выполнены следующие условия:

$$(27) \quad \begin{bmatrix} -\alpha + 0,5\tau_1 & 0,5\text{sign}(\varepsilon)\mu^{-1}\tilde{D}^T\tilde{D} & -0,5 \\ * & -\tau_2 & 0 \\ * & * & -\tau_3 \end{bmatrix} \leq 0,$$

$$c\tau_1 \geq \bar{f}^2\tau_2 + \gamma^2\tau_3.$$

Так как  $\text{sign}(\varepsilon)f \in [-\bar{f}, \bar{f}]$ , то имеем политопную неопределенность в (27) с двумя вершинами политопа  $v = -\bar{f}$  и  $v = \bar{f}$ . Согласно [13, 14], если существуют решения  $\alpha, \tau_i, i = 1, 2, 3$  первого ЛМН в (17) в вершинах  $v = -\bar{f}$  и  $v = \bar{f}$ , то первое ЛМН в (27) будет иметь решение. Значит, система (21) устойчива по вход-состоянию. В силу замены координат (4) и свойства (а) переменная  $\xi$  в (20) будет ограничена. Тогда сигналы  $\tilde{x}, x$  и  $\tilde{u}_2$  будут ограничены. Из третьего выражения (19) следует ограниченность  $\dot{\tilde{u}}_2$ .

Теперь получим дополнительные условия, накладывающие ограничения на  $\tilde{u}_1$  в (19). Рассмотрим функцию Ляпунова

$$(28) \quad V_2 = \tilde{x}^T H \tilde{x}$$

и потребуем при  $V_2 \geq \frac{\inf\{\bar{g}(t)\}}{\lambda_{\min}\{\bar{P}_1\}}$  выполнение условий  $\dot{V} \leq 0$  и  $H \geq \bar{P}_1$  (последнее означает, что эллипсоид  $\tilde{x}^T H \tilde{x} = \inf\{\bar{g}(t)\}$  содержится внутри эллипсоида  $\tilde{x}^T \bar{P}_1 \tilde{x} = \inf\{\bar{g}(t)\}$ ), принимая во внимание ограничения  $\tilde{u}_2^2 \leq \frac{\inf\{\bar{g}(t)\}}{p_3}$  и  $f^2 \leq \bar{f}^2$ . То есть потребуем, чтобы закон управления  $\tilde{u}_1$  гарантировал нахождение фазовых траекторий в меньшем множестве по сравнению с (16). Перепишем данные условия как

$$(29) \quad \begin{aligned} \dot{V}_2 = \tilde{x}^T (\bar{A}^T H + H \bar{A}) \tilde{x} + 2\tilde{x}^T H \bar{B} \tilde{u}_2 + 2\tilde{x}^T H \bar{D} f &\leq 0 \quad \forall(\tilde{x}, \tilde{u}_2, f) : \\ \tilde{x}^T H \tilde{x} \geq \frac{\inf\{\bar{g}(t)\}}{\lambda_{\min}\{\bar{P}_1\}}, \quad \tilde{u}_2^2 \leq \frac{\inf\{\bar{g}(t)\}}{p_3}, \quad f^2 \leq \bar{f}^2. \end{aligned}$$

Обозначив  $s = \text{col}\{\tilde{x}, \tilde{u}_2, f\}$ , преобразуем (29) к виду

$$(30) \quad \begin{aligned} s^T \begin{bmatrix} \bar{A}^T H + H \bar{A} & H \bar{B} & H \bar{D} \\ * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \end{bmatrix} s &\leq 0, \\ -s^T \begin{bmatrix} H & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \end{bmatrix} s &\geq -\frac{\inf\{\bar{g}(t)\}}{\lambda_{\min}\{\bar{P}_1\}}, \\ s^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ * & -1 & 0 \\ * & * & 0 \end{bmatrix} s &\leq \frac{\inf\{\bar{g}(t)\}}{p_3}, \quad s^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \\ * & * & -1 \end{bmatrix} s &\leq \bar{f}. \end{aligned}$$

С учетом  $\tilde{u}^2 \leq 1$  из (12) и  $\tilde{u}^2 \leq (1+r)\tilde{u}_1^2 + (1+r^{-1})\tilde{u}_2^2$  из неравенства Юнга потребуем выполнение  $(1+r)\tilde{u}_1^2 + (1+r^{-1})\tilde{u}_2^2 \leq 1$ . Значит,  $\tilde{u}_1^2 \leq \frac{1}{1+r}$ . Используя S-процедуру [13] и второе выражение в (19), в результате неравенства (30) и  $\tilde{x}^T K^T K \tilde{x} \leq \frac{1}{1+r}$  при  $\tilde{x}^T H \tilde{x} \leq \frac{\inf\{\bar{g}(t)\}}{\lambda_{\min}\{P_1\}}$  будут выполнены одновременно, если будут выполнены условия (18). Теорема 2 доказана.

*Замечание 5.* В статье рассмотрены ограничения по состоянию в квадратичной форме. Подобные ограничения рассматривались также в [15]. Если ограничения заданы в виде параллелепипеда, то, например как в [16, 17], можно ввести новые ограничения в форме эллипсоида, вписанного в данный параллелепипед, и далее решать задачу с ограничениями в квадратичной форме.

С другой стороны, не обязательно рассматривать переменную  $\xi$  в квадратичной форме. Так, если априори заданы ограничения в квадратичной форме (11), то можно воспользоваться также заменой в квадратичной форме (15) или в качестве альтернативы  $\xi = \tilde{x}^T P_1 \tilde{x} + (|\tilde{u}| + \delta)^2$ . Если же все ограничения заданы в интервальной форме на координаты вектора состояния и управление, то можно воспользоваться заменами вида  $\xi = |\tilde{x}| + |\tilde{u}_1| + |\tilde{u}_2|$  или  $\xi = \sum_{i=1}^n p_{1i} |\tilde{x}_i| + |\tilde{u}_1| + |\tilde{u}_2|$ ,  $p_{1i} > 0$ ,  $i = 1, \dots, n$  и т.п., дополнительно ослабив предположения о дифференцируемости функции  $G$  по  $x$  и  $u$ , см. замечание 3 и [9]. Очевидно, что для каждой замены будут получены другие формы закона управления и условия их работоспособности, отличные от предложенных в статье.

*Пример 2.* Рассмотрим неустойчивый объект (10) со следующими параметрами:

$$(31) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} -0,4 \\ 0,4 \end{bmatrix}, \quad f(t) = 0,01[\text{sign}(\sin(1,7t)) + \sin(0,3t) + \text{sat}\{d(t)\}],$$

где  $\text{sat}\{\cdot\}$  — функция насыщения,  $d(t)$  — белый шум с ограниченной полосой пропускания и моделируемый в Matlab Simulink с помощью блока «Band-Limited White Noise» со следующими параметрами: мощность шума 0,3 и время выборки 0,2 соответственно. Тогда  $\bar{f} = 0,03$ .

Пусть  $P_x = 0,81 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  и  $p_u = 1$  определены в (11).

Зададим  $\delta = 0,01$  в (15),  $K = [-2 \ -4]$  и  $\mu = 0,01$  в (19),  $T(\varepsilon) = \frac{e^\varepsilon - 1}{e^\varepsilon + 1}$ ,  $\bar{g} = 0,89e^{-0,1t} + 0,1$  и  $\underline{g} = 0,01$  в (16), а также  $r = 0,01$  в (14). Вычислим:  $P_1 = I$ ,  $p_2 = 1,01$ ,  $p_3 = 101$  и  $\gamma = \frac{3\bar{g} - \underline{g}}{2} = 1,475$ . Если задать  $c = 1$  и  $\beta = 0,1$ , то неравенства (17), (18) имеют решения, например, при  $\alpha = 37,9$ .

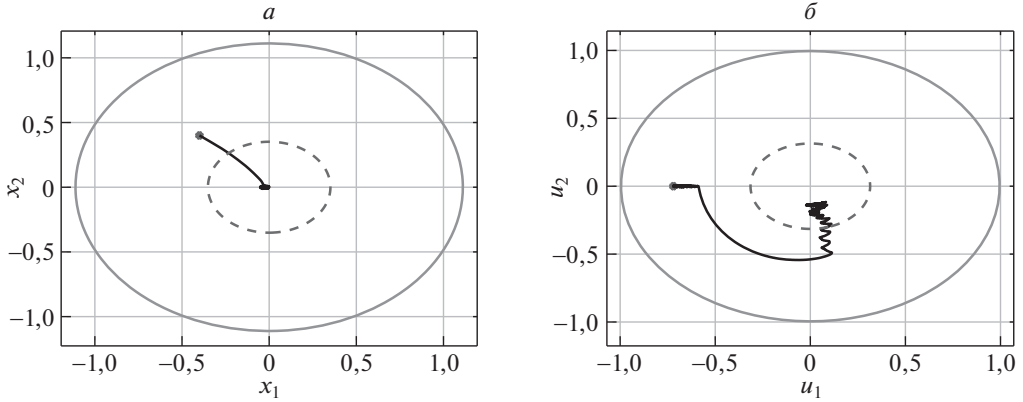


Рис. 1. Фазовые траектории в замкнутой системе по  $(x_1, x_2)$  — а и  $(u_1, u_2)$  — б.

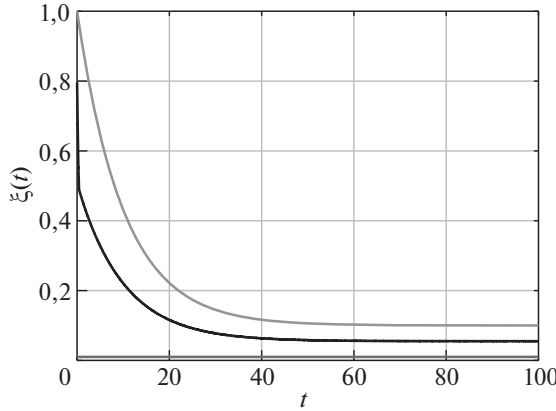


Рис. 2. Переходной процесс по  $\xi(t)$  в замкнутой системе.

На рис. 1 изображены фазовые портреты по  $(x_1, x_2)$  и  $(u_1, u_2)$ , а на рис. 2 приведен переходной процесс по  $\xi(t)$ . На рис. 1 большие эллипсы соответствуют выражениям  $x^T P_x x = \bar{g}(0)$  и  $(1+r)p_u u_1^2 + (1+r^{-1})p_u u_2^2 = \bar{g}(0)$ , а меньшие эллипсы —  $x^T P_x x = \inf\{\bar{g}(t)\}$  и  $(1+r)p_u u_1^2 + (1+r^{-1})p_u u_2^2 = \inf\{\bar{g}(t)\}$ . Из рис. 1 видно, что фазовые траектории начинаются в большом эллипсе, с течением времени (примерно через 25 с после начала работы системы, см. рис. 2) достигают меньшего эллипса и остаются в нем, никогда не покидая его.

## 5. Управление по выходу

Рассмотрим объект управления вида

$$(32) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + Df, \\ y &= Lx, \end{aligned}$$

где  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}$ ,  $y \in \mathcal{Y} \subset \mathbb{R}$ ,  $f \in \mathbb{R}$  и  $|f(t)| \leq \bar{f}$  для всех  $t$ . Матрицы  $A$ ,  $B$ ,  $D$  и  $L$  имеют соответствующие размерности. Пара  $(A, B)$  управляема и пара  $(L, A)$  наблюдаема. Объект управления (32) строго минимально-фазовый [3]. Множества  $\mathcal{Y}$  и  $\mathcal{U}$  заданы в виде

$$(33) \quad \mathcal{Y} = \{y \in \mathbb{R} : p_y |y| \leq 1\}, \quad \mathcal{U} = \{u \in \mathbb{R} : p_u |u| \leq 1\},$$

где  $p_y > 0$  и  $p_u > 0$  задаются разработчиком.

Для сравнения ограничений по  $y$  и  $u$  введем замены  $\tilde{y} = p_y y$  и  $\tilde{u} = p_u u$ , которые позволят преобразовать ограничения (33) к отрезкам одинаковой длины. Преобразуем множества  $\mathcal{Y}$  и  $\mathcal{U}$  к виду

$$(34) \quad \tilde{\mathcal{Y}} = \{\tilde{y} \in \mathbb{R} : |\tilde{y}| \leq 1\}, \quad \tilde{\mathcal{U}} = \{\tilde{u} \in \mathbb{R} : |\tilde{u}| \leq 1\}.$$

Представим  $\tilde{u}$  в виде суммы (13) и определим переменную  $\xi$  в (2) как

$$(35) \quad \xi = \tilde{y}^2 + p_2 \tilde{u}_1^2 + p_3 (|\tilde{u}_2| + \delta)^2,$$

где  $\delta$ ,  $p_2$  и  $p_3$  определены в разделе 4. Выбрав  $\bar{g}(t) \leq 1$ , получим, что (35) включает в себя ограничения (33). Цель управления состоит в поиске закона управления, гарантирующего выполнение условия (16) с учетом (35).

Метод [1] для объекта (32) гарантирует нахождение только выходного сигнала в заданном множестве. В отличие от [1] предложенный метод позволит обеспечить нахождение выходного и управляющего сигналов в заданном множестве.

Преобразуем (32) к виду

$$(36) \quad Q(p)\tilde{y}(t) = R(p)\tilde{u}(t) + \phi(t).$$

Здесь

$$Q(p) = \det(pI - A), \quad R(p) = \frac{p_y}{p_u} L(pI - A)^* B,$$

$(pI - A)^*$  — присоединенная матрица,

$$\phi(t) = p_y L(pI - A)^* [x(0) + Df(t) + Bu(0) + Bf(0)].$$

В дальнейшем, ради простоты выводов, например, как в [3, 18, 19] и ссылок на литературу в них, будем использовать одновременно запись в форме вход-выход (или передаточной функции) и пространства состояний.

Сформулируем основной результат раздела 5.

*Теорема 3.* Пусть для преобразования (2) выполнены условия (а)–(г),  $\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} > 0$  для любых  $\varepsilon$  и  $t$ , а также  $\underline{g}(0) < \xi(0) < \bar{g}(0)$ . Если для заданных  $\delta > 0$ ,  $\mu > 0$ ,  $p_1 > 0$ ,  $p_2 > 0$ ,  $p_3 > 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $c > 0$  и  $k \in \mathbb{R}$  существуют  $H > 0$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\tau_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, 6$  такие, что при  $v = \pm \bar{f}$  разрешимы следующие ли-

нейные неравенства:

$$(37) \quad \begin{bmatrix} -\alpha + 0,5\tau_1 & 0,5v\mu^{-1} & -0,5 \\ * & -\tau_2 & 0 \\ * & * & -\tau_3 \end{bmatrix} \leq 0, \\ c\tau_1 \geq \hat{\phi}^2\tau_2 + \gamma^2\tau_3,$$

$$(38) \quad \begin{bmatrix} \bar{A}^T H + Q\bar{A} + \beta H & \frac{1}{p_u}HB & HD \\ * & -\tau_4 & 0 \\ * & * & -\tau_5 \end{bmatrix} \leq 0, \\ H \geq p_y^2 \bar{p}_1 L^T L, \\ L^T K^T K L \leq \tau_6 H, \\ \frac{\inf\{\bar{g}(t)\}}{\bar{p}_1} \beta \geq \frac{\inf\{\bar{g}(t)\}}{p_3} \tau_4 + \hat{\phi}^2 \tau_5, \\ \frac{\inf\{\bar{g}(t)\}}{\bar{p}_1} \tau_6 \leq \frac{1}{1+r},$$

тогда закон управления

$$(39) \quad u = \frac{1}{p_u}(\tilde{u}_1 + \tilde{u}_2), \\ \tilde{u}_1 = k\tilde{y}, \\ \dot{\tilde{u}}_2 = -\frac{1}{2p_3(|\tilde{u}_2| + \delta)} \text{sign}(\tilde{u}_2) \left[ \alpha\varepsilon + 2\bar{p}_1\tilde{y} \frac{pR(p)}{Q(p)} \tilde{u}_2 + \mu\bar{p}_1^2 \text{sign}(\varepsilon)\tilde{y}^2 \right]$$

обеспечит выполнение (16), где  $\bar{A} = A + \frac{k}{p_u}BL$ ,  $\bar{p}_1 = 1 + k^2p_2$ .

*Замечание 6.* Для разрешимости (38) необходимо выбирать  $k$  из условия гурвицевости матрицы  $\bar{A}$ .

*Доказательство.* С учетом  $\tilde{u}_1$  в (39) перепишем (35) и (36) в виде

$$(40) \quad \bar{Q}(p)\tilde{y}(t) = R(p)\tilde{u}_2(t) + \phi(t), \\ \xi = \bar{p}_1\tilde{y}^2 + p_3(|\tilde{u}_2| + \delta)^2.$$

Здесь  $\bar{Q}(p) = Q(p) - kR(p)$ . Подставив (36) в (6), получим

$$(41) \quad \dot{\varepsilon} = \left( \frac{\partial\Phi(\varepsilon, t)}{\partial\varepsilon} \right)^{-1} \left[ 2\bar{p}_1\tilde{y} \frac{pR(p)}{Q(p)} \tilde{u}_2 + 2\bar{p}_1\tilde{y}\bar{\phi}(t) + \right. \\ \left. + 2p_3(|\tilde{u}_2| + \delta)\text{sign}(\tilde{u}_2)\dot{\tilde{u}}_2 - \frac{\partial\Phi(\varepsilon, t)}{\partial t} \right],$$

где  $\bar{\phi}(t) = \frac{p}{Q(p)}\phi(t)$  — ограниченная функция. Обозначим  $\hat{\phi} = \sup\{\bar{\phi}(t)\}$ .

Для анализа устойчивости (41) рассмотрим функцию Ляпунова (22). Взяв производную от (22) вдоль решений (41), получим

$$(42) \quad \dot{V}_1 = \left( \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right)^{-1} \varepsilon \left[ 2\bar{p}_1 \tilde{y} \frac{pR(p)}{Q(p)} \tilde{u}_2 + 2\bar{p}_1 \tilde{y} \bar{\phi} + \right. \\ \left. + 2p_3 (|\tilde{u}_2| + \delta) \text{sign}(\tilde{u}_2) \dot{\tilde{u}}_2 - \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t} \right].$$

Воспользовавшись неравенством Юнга для  $2\varepsilon\bar{p}_1\tilde{y}\bar{\phi} \leq |\varepsilon|\mu\bar{p}_1^2\tilde{y}^2 + \bar{\phi} + |\varepsilon|\mu^{-1}\bar{\phi}^2$  и учитывая третье выражение в (39), получим

$$(43) \quad \dot{V}_1 = \left( \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right)^{-1} \left[ -\alpha\varepsilon^2 + \mu^{-1}|\varepsilon|\varepsilon\bar{\phi}^2 - \varepsilon \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t} \right].$$

Дальнейшие действия для получения условий (37) аналогичны, как в доказательстве теоремы 2.

Теперь получим дополнительные условия, накладывающие ограничения на  $\tilde{u}_1$  в (39). Рассмотрим функцию Ляпунова

$$(44) \quad V_2 = x^T H x.$$

Перепишем (40) как

$$(45) \quad \dot{x} = \bar{A}x + \frac{1}{p_u} B \tilde{u}_2 + D\phi, \quad \tilde{y} = p_y L x.$$

Потребуем при  $V_2 \geq \frac{\inf\{\bar{g}(t)\}}{\bar{p}_1}$  выполнение условий  $\dot{V}_2 \leq 0$  и  $H \geq p_y^2 \bar{p}_1 L^T L$  (последнее означает, что эллипсоид  $x^T H x = \inf\{\bar{g}(t)\}$  содержится внутри цилиндра  $x^T p_y^2 \bar{p}_1 L^T L x = \inf\{\bar{g}(t)\}$ ), принимая во внимание ограничения  $\tilde{u}_2^2 \leq \frac{\inf\{\bar{g}(t)\}}{p_3}$  и  $\phi^2 \leq \hat{\phi}^2$ . Перепишем вышеназванные условия в виде

$$(46) \quad \dot{V}_2 = x^T (\bar{A}^T H + H \bar{A}) x + 2x^T \frac{1}{p_u} H B \tilde{u}_2 + 2x^T H D \phi \leq 0 \quad \forall (x, \tilde{u}_2, \phi) : \\ x^T H x \geq \frac{\inf\{\bar{g}(t)\}}{\bar{p}_1}, \quad \tilde{u}_2^2 \leq \frac{\inf\{\bar{g}(t)\}}{p_3}, \quad \phi^2 \leq \hat{\phi}^2.$$

С учетом  $(1+r)\tilde{u}_1^2 \leq 1$  зададим  $x^T p_y^2 L^T K^T K L x \leq \frac{1}{1+r}$  при  $x^T H x \leq \frac{\inf\{\bar{g}(t)\}}{\bar{p}_1}$ . Дальнейшие действия для получения условий (38) аналогичны, как в доказательстве теоремы 2. Теорема 3 доказана.

*Замечание 7.* В разделе 5 могут быть получены другие формы закона управления, если изначально преобразование (2) (в частности, в разделе 5 заданное в виде (35)) будет определено по-другому, например, в виде  $\xi = \tilde{y}^2 + \tilde{u}^2$ ,  $\xi = |\tilde{y}| + |\tilde{u}_1| + |\tilde{u}_2|$  и т.п. (см. замечание 5).

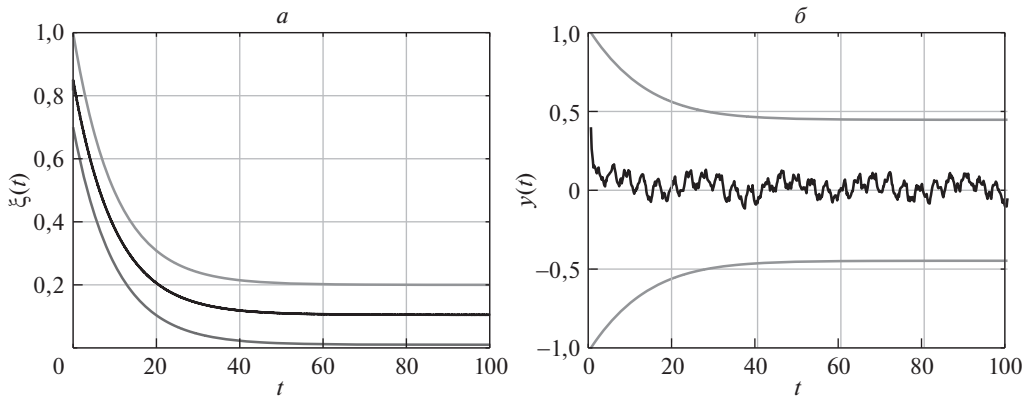


Рис. 3. Переходные процессы по  $\xi(t)$  — а и  $y(t)$  — б при ограничениях (16), заданных экспоненциальными функциями.

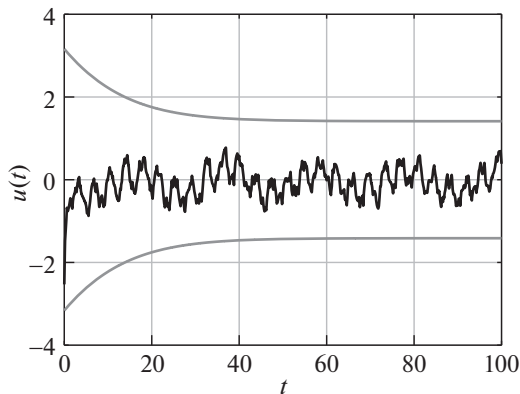


Рис. 4. Переходные процессы по  $u(t)$  при ограничениях (16), заданных экспоненциальными функциями.

*Пример 3.* Рассмотрим неустойчивый объект (32) со следующими параметрами:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad L = [1 \quad 2 \quad 1], \quad x(0) = 0,1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

сигнал  $f(t)$  определен в примере 2. Тогда  $R(p) = (p + 1)^2$ ,  $Q(p) = (p + 1)^3$  и  $\hat{\phi} = 0,22$ .

Пусть в (33) определены следующие параметры:  $p_y = 1$  и  $p_u = 0,3$ .

Зададим  $\delta = 0,01$ ,  $k = -2$  и  $\mu = 0,01$  в (39),  $r = 0,01$  в (35), а также  $T(\varepsilon)$  из примера 2. Если задать  $\beta = 0,1$  и  $c = 1$ , то неравенства (37) будут разрешимы, например, при  $\alpha = 374,3$ .

На рис. 3, 4 изображены траектории по  $\xi(t)$ ,  $y(t)$  и  $u(t)$  при  $\bar{g} = 0,79e^{-0,1t} + 0,2$  и  $\underline{g} = 0,69e^{-0,1t} + 0,01$  в (3), на рис. 5, 6 — при  $\bar{g} = 0,45 \cos(0,5t) + 0,54$  и



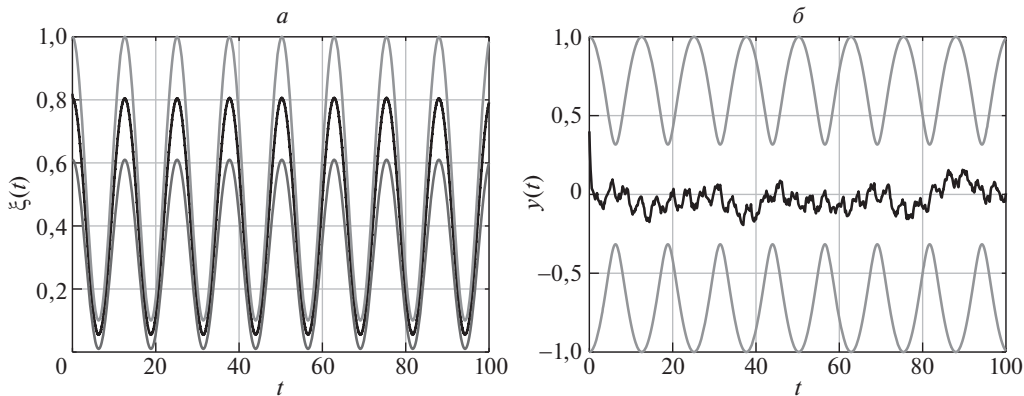


Рис. 5. Переходные процессы по  $\xi(t)$  — *a* и  $y(t)$  — *б* при ограничениях (16), заданных синусоидальными функциями.

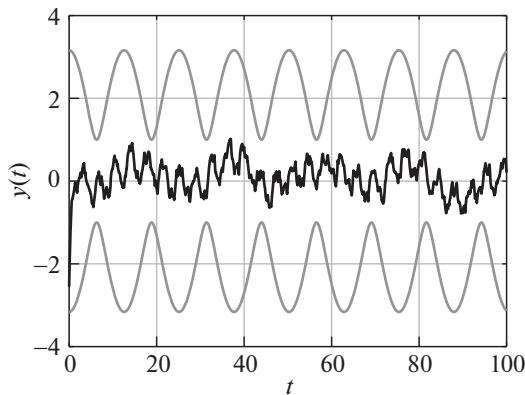


Рис. 6. Переходные процессы по  $u(t)$  при ограничениях (16), заданных синусоидальными функциями.

$g = 0,3 \cos(0,5t) + 3,01$  в (3). Из рис. 3–6 видно, что сигналы  $\xi$ ,  $y$  и  $u$  никогда не покидают заданных ограничений (33) и дополнительно заданных разработчиком ограничений (16), которые, например, могут быть определены экспоненциальными (см. рис. 3, 4) или синусоидальными (рис. 5, 6) функциями.

## 6. Заключение

В статье предложено развитие метода [1] на динамические системы с произвольным соотношением числа управлений и выходных сигналов и гарантией их нахождения в заданных множествах. Разработанный метод применяется для решения задач управления по состоянию и по выходу линейными системами с учетом ограничений на сигнал управления и выходные переменные, где размерность регулируемых переменных больше размерности сигнала управления. Также в отличие от [1] устойчивость замкнутой системы и

синтез параметров регулятора сформулированы в терминах разрешимости линейных матричных неравенств. Результаты моделирования подтвердили теоретические выводы и показали эффективность предложенного метода.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фуртат И.Б., Гуцин П.А.* Управление динамическими объектами с гарантией нахождения регулируемого сигнала в заданном множестве // *АиТ.* 2021. № 4. С. 121–139.  
*Furtat I.B., Gushchin P.A.* Control of Dynamical Plants with a Guarantee for the Controlled Signal to Stay in a Given Set // *Autom. Remote Control.* 2021. V. 82. No. 4. P. 654–669.
2. *Furtat I., Gushchin P.* Nonlinear feedback control providing plant output in given set // *Int. J. Control.* 2022. V. 95. N. 6. P. 1533–1542.  
<https://doi.org/10.1080/00207179.2020.1861336>
3. *Мирошник И.В., Никуфоров В.О., Фрадков А.Л.* Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. СПб.: Наука, 2000.
4. *Spong M., Corke P., Lozano R.* Nonlinear control of the reaction wheel pendulum // *Automatica.* 2001. V. 37. P. 1845–1851.
5. *Sun W., Su S.F., Xia J., Wu Y.* Adaptive tracking control of wheeled inverted pendulums with periodic disturbances // *IEEE Trans. Cybernetics.* 2020. V. 50. No. 5. P. 1867–1876.
6. *Saleem O., Mahmood-ul-Hasan K.* Adaptive State-space Control of Under-actuated Systems Using Error-magnitude Dependent Self-tuning of Cost Weighting-factors // *Int. J. Control, Automat. Syst.* 2021. V. 19. P. 931–941.
7. *Khalil H.K.* Nonlinear Systems. 3rd edition. Pearson. 2001.
8. *Демьянов В.Ф., Рубинов А.М.* Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М.: Наука, 1990.
9. *Dolgopolik M.V., Fradkov A.L.* Nonsmooth and discontinuous speed-gradient algorithms // *Nonlinear Anal. Hybrid Syst.* 2017. V. 25. P. 99–113.
10. *Yakubovich V.* S-procedure in nonlinear control theory // *Vestn. Leningr. Univ.* 1971. No. 1. P. 62–77.
11. *Polyak B.T.* Convexity of quadratic transformations and its use in control and optimization // *J. Optim. Theory Appl.* 1998. V. 99. P. 553–583.
12. *Гусев С.В., Ликhtarников А.Л.* Очерк истории леммы Калмана–Попова–Якубовича и S-процедуры // *АиТ.* 2006. № 11. С. 77–121.  
*Gusev S.V., Likhtarnikov A.L.* Kalman-Popov-Yakubovich lemma and the S-procedure: A historical essay // *Autom. Remote Control.* 2006. V. 67. No. 11. P. 1768–1810.
13. *Fridman E.* A refined input delay approach to sampled-data control // *Automatica.* 2010. V. 46. P. 421–427.
14. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. М.: Ленанд, 2014.

15. *Назин С.А., Поляк Б.Т., Топунов М.В.* Подавление ограниченных внешних возмущений с помощью метода инвариантных эллипсоидов // *АиТ.* 2007. № 3. С. 106–125.  
*Nazin S.A., Polyak B.T., Topunov M.V.* Rejection of bounded exogenous disturbances by the method of invariant ellipsoids // *Autom. Remote Control.* 2007. V. 68. No. 3. P. 467–486.
16. *Leonessa A., Haddad W.M., Hayakawa T.* Adaptive Tracking for Nonlinear Systems with Control Constraints // *Proc. Amer. Control Conf.* 2001. P. 1292–1297.
17. *Lavretsky E., Hovakimyan N.* Positive  $\mu$ -modification for Stable Adaptation in Dynamic Inversion Based Adaptive Control with Input Saturation // *Proc. Amer. Control Conf.* 2005. Portland, OR, USA. P. 3373–3378.
18. *Ioannou P.A., Sun J.* Robust Adaptive Control. PTR Prentice-Hall, 1996.
19. *Narendra K.S., Annaswamy A.M.* Stable Adaptive Systems. Dover Publications, 2012.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии А.Е. Поляковым.*

Поступила в редакцию 12.10.2021

После доработки 17.06.2022

Принята к публикации 30.11.2022