

## Управление в технических системах

© 2023 г. Ю.Г. БУЛЫЧЕВ, д-р техн. наук (profbulychhev@yandex.ru),  
Е.Н. ЧЕПЕЛЬ (evgeny\_c@bk.ru),  
(АО «ВНИИ «Градиент», Ростов-на-Дону)

### ОПТИМИЗАЦИЯ КЛАСТЕРНО-ВАРИАЦИОННОГО МЕТОДА ПОСТРОЕНИЯ МНОГОПОЗИЦИОННОЙ ПЕЛЕНГАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ ДЛЯ УСЛОВИЙ АПРИОРНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Рассмотрена возможность построения многопозиционной пеленгационной системы для случая априорной неопределенности, основанная на применении принципов размножения единичных отметок местоположения излучающей цели (принцип мультиструктурности) и их последующего разбиения на классы (принцип кластеризации). Приводятся критерии и алгоритмы обнаружения результирующего кластера и построения устойчивой к аномальным ошибкам измерений оптимальной оценки местоположения цели с учетом временных затрат на их компьютерную реализацию. Даны практические рекомендации и результаты сравнительного анализа различных алгоритмов.

*Ключевые слова:* излучающая цель, многопозиционная пеленгационная система, местоположение цели, пеленги, кластер, селекция, принцип мультиструктурности, принцип кластеризации, критерии оптимальности.

DOI: 10.31857/S0005231023040062, EDN: QIDVSZ

#### 1. Введение

В [1, 2] развивается кластерно-вариационный метод (КВМ) решения задачи триангуляции (являющейся альтернативным по отношению к известным методам пассивной локации, например [3–20]), позволяющий при некотором ограничении на число недостоверных азимутальных и угломестных измерений формировать устойчивые оценки местоположения цели в условиях существенной априорной неопределенности (таких как отсутствие достоверных знаний о законах распределения ошибок измерений, пропуски в измерениях, наличие инструментальных и методических ошибок, «деградация» структуры системы и др.). В таких условиях, которые зачастую возникают на практике, результаты пеленгования могут допускать наличие неизвестных аномальных ошибок измерений (АОИ). Эти ошибки могут иметь самую различную природу происхождения (детерминированные неизвестные или случайные) и

связанную с этим неопределенность в их формализованном описании. Зачастую отсутствуют даже минимально необходимые сведения для эффективного применения известных адаптивных методов обработки измерений, гарантирующих состоятельность формируемых оценок (см., например, [21–23]). Кроме того, эти методы не учитывают специфику построения и функционирования многопозиционной пеленгационной системы, в частности геометрический фактор, обусловленный размещением в пространстве пеленгаторов и цели. Для большого класса таких систем важна не только некоторая усредненная оценка эффективности, а гарантированная для конкретной выборки измерений (т.е. «здесь и сейчас») оценка местоположения цели. При этом единственным учитываемым фактором зачастую является предположение о максимально возможном количестве недостоверных азимутальных и угломестных измерений, при котором еще возможно получение надежной оценки с учетом заданного числа пеленгаторов.

В [1, 2] для борьбы с АОИ используются принцип мультиструктурности (состоит в размножении единичных триангуляционных отметок на основе всех возможных наборов измерений, обеспечивающих построение правильной отметки без учета ошибок пеленгования) и принцип кластеризации (состоит в разбиении всех сформированных отметок на классы с учетом выбранного критерия оптимальности). В [1] изложен сам принцип мультиструктурного формирования семейства единичных отметок, но отсутствует эффективное правило их объединения с целью формирования результирующей оценки местоположения цели. Этот недостаток в определенной степени устранен в [2], где предложен алгоритм отбора результирующего кластера, который позволяет обнаружить недостоверные измерения, а также формировать устойчивую к АОИ результирующую оценку параметров движения цели. Речь идет о построении многопозиционной пеленгационной системы, которая является альтернативой классическим системам, создаваемым в рамках традиционных статистических методов (максимума апостериорной плотности вероятности, максимального правдоподобия, наименьших квадратов и минимума различных невязок [3–13]), которые хорошо себя зарекомендовали для случая корректных измерений (при отсутствии АОИ).

Однако в [2] вводится серьезное ограничение: априорно должно быть задано число кластеров разбиения единичных отметок. Кроме того, в [2] не учитывается возможность выбора оптимального результирующего кластера и оптимальной результирующей оценки местоположения цели. Не исследованы также возможности декомпозиции КВМ и вопросы оперативности формирования результирующей оценки.

В предлагаемой работе дается дальнейшее развитие КВМ [2] в плане его оптимизации, включающей введение более совершенных критериев оптимальности и предположений относительно параметров используемых кластеров. Демонстрируется возможность выбора наиболее эффективного (в плане точности) алгоритма обработки пеленгов в аномальных условиях измерений с учетом его возможной декомпозиции (двухэтапный подход) и временных

затрат на получение результирующей оценки местоположения цели каждым алгоритмом данного семейства.

## 2. Постановка задачи

С целью компактного описания предлагаемого метода в основном будет рассматриваться случай одной цели, что позволит опустить громоздкие обозначения и выкладки. Обобщение метода на случай неизвестного числа многих целей рассматривается в разделе 6.

В декартовой системе координат  $XYZ$  рассматривается многопозиционная пеленгационная система (далее просто система), состоящая из множества пеленгаторов  $(\Pi_m, m = \overline{1, M})$ , при этом положение каждого  $\Pi_m$  задается вектором  $\mathbf{p}_m = [\rho_{xm}, \rho_{ym}, \rho_{zm}]^T$ . Истинное положение цели характеризуется вектором  $\mathbf{\lambda}_{\text{ист}} = [x_{\text{ист}}, y_{\text{ист}}, z_{\text{ист}}]^T$ , при этом накладывается ограничение  $\mathbf{\lambda}_{\text{ист}} \in \mathbf{\Lambda} = \Lambda_x \times \Lambda_y \times \Lambda_z$ , для произвольной (модельной) точки системы  $XYZ$  используется вектор  $\mathbf{\lambda} = [x, y, z]^T$ .

Пеленгаторам системы можно поставить в соответствие векторы  $\mathbf{Y}_\alpha = [\tilde{\alpha}_m, m = \overline{1, M}]^T$  и  $\mathbf{Y}_\beta = [\tilde{\beta}_m, m = \overline{1, M}]^T$  первичных измерений азимута  $\tilde{\alpha}_m = \alpha_m + \Delta\alpha_m$  и угла места  $\tilde{\beta}_m = \beta_m + \Delta\beta_m$  соответственно, где  $\Delta\alpha_m$  и  $\Delta\beta_m$  — ошибки измерений с неизвестным законом распределения.

Обозначим через  $\varsigma_\alpha$  число азимутальных измерений, не содержащих АОИ, а через  $\varsigma_\beta$  — угломестных. Полагаем, что

$$(1) \quad \gamma_\alpha < \varsigma_\alpha \leq M, \quad \gamma_\beta < \varsigma_\beta \leq M,$$

где  $\gamma_\alpha$  и  $\gamma_\beta$  — натуральные числа, устанавливающие максимально допустимое число недостоверных измерений по азимуту и углу места соответственно, при этом выбор  $\gamma_\alpha$  и  $\gamma_\beta$  (наряду с числом  $M$ ) должен учитывать возможность формирования необходимого количества наборов (о них говорилось во введении), обеспечивающих эффективное применение указанных ранее принципов мультиструктурности и кластеризации.

Полагаем, что  $k$ -й и  $l$ -й наборы не должны совпадать для всех  $k, l \in \{1, \dots, \overline{N}\}$ ,  $k \neq l$ , где  $\overline{N}$  соответствует минимально необходимому числу  $\gamma_{\alpha\beta} = \gamma_\alpha + \gamma_\beta$  азимутальных и угломестных измерений, достаточных для построения набора. Будем также полагать, что число измерений, не содержащих АОИ, должно быть не менее  $D_{\alpha\beta} = D_{\alpha s} + D_{\beta s}$ ,  $s = \overline{1, S}$ ,  $D_{\alpha s}, D_{\beta s} \in \{1, \dots, M\}$ , где  $D_{\alpha s}, D_{\beta s}$  — составляющие для  $s$ -го варианта представления числа  $D_{\alpha\beta}$ , обеспечивающего построение набора ( $S$  — общее число таких вариантов). Понятно, что для построения набора необходимо, чтобы  $D_{\alpha s} \geq \gamma_\alpha$  и  $D_{\beta s} \geq \gamma_\beta$ . Общее количество возможных наборов для пары чисел  $(\gamma_\alpha, \gamma_\beta)$  равно

$$(2) \quad \overline{N} = \left( \sum_{n=\gamma_\alpha}^M C_M^n \right) \left( \sum_{n=\gamma_\beta}^M C_M^n \right),$$

соответственно количество наборов, образованных измерениями, не содержащими АОИ (для  $s$ -го варианта)

$$(3) \quad \overline{\overline{N}}_s = \left( \sum_{n=\gamma_\alpha}^{D_{\alpha s}} C_{D_{\alpha s}}^n \right) \left( \sum_{n=\gamma_\beta}^{D_{\beta s}} C_{D_{\beta s}}^n \right),$$

а их минимальное количество (для всех вариантов)

$$(4) \quad \overline{\overline{N}}_{\min} = \min_s \overline{\overline{N}}_s.$$

В (2) и (3) в круглых скобках под знаком суммы фигурируют соответствующие числа сочетаний.

По результатам измерений для всех наборов строятся триангуляционные отметки и вычисляются вторичные пеленги  $\alpha_{m[k]} = \alpha_m + \Delta\alpha_{m[k]}$  и  $\beta_{m[k]} = \beta_m + \Delta\beta_{m[k]}$ , при этом полагается, что для наборов, не содержащих измерений с АОИ, выполняются условия:

$$(5) \quad \begin{aligned} |\Delta\alpha_{m[k]}| &= |\alpha_{m[k]} - \tilde{\alpha}_m| < \varepsilon_{\alpha m}, \\ |\Delta\beta_{m[k]}| &= |\beta_{m[k]} - \tilde{\beta}_m| < \varepsilon_{\beta m}, \end{aligned} \quad m = \overline{1, M},$$

где  $\varepsilon_{\alpha m} > 0$  и  $\varepsilon_{\beta m} > 0$  — заданные пороговые значения.

Для проведения кластеризации (селекции) отметок проверяется количество выполненных условий (отдельно по азимуту и углу места): если для  $k$ -го набора это количество не соответствует ограничениям (5) или отметка не принадлежит области  $\mathbf{L}$ , то рассматриваемый набор отсеивается. Оставшимся после селекции вторичным наборам (их количество  $N \leq \overline{N}$ ) отвечают отметки  $\lambda_{[n]}$ , где  $n = \overline{1, N}$ ,  $N \leq \overline{N}$ . Сформированное множество  $\mathbf{X} = \{\lambda_{[1]}, \dots, \lambda_{[N]}\}$  разбивается на кластеры  $K_q$ ,  $q = \overline{1, Q}$  (для кластеризации применяется иерархический агломеративный алгоритм с евклидовой нормой по аналогии с [24–28]). Согласно данному алгоритму отметки  $\lambda_{[1]}, \dots, \lambda_{[N]}$  последовательно (по шагам) объединяются в группы: сначала самые близкие, а затем все более отдаленные друг от друга. На первом шаге каждая отметка рассматривается как отдельный кластер.

Алгоритм кластеризации устанавливает отображение  $f: \mathbf{X} \rightarrow \{K_q, q = \overline{1, Q}\}$ ,  $K_q = \{\lambda \in \mathbf{X} | f(\lambda) = q\}$ , причем  $\mathbf{X} = \bigcup K_q$  (где  $\bigcup$  — символ объединения кластеров по индексу  $q = \overline{1, Q}$ ),  $K_k \cap K_r = \emptyset$ ,  $k, r \in \{1, \dots, Q\}$ ,  $k \neq r$  и  $K_q \neq \emptyset \forall q = \overline{1, Q}$ .

Для решения задачи обнаружения наилучшего кластера и построения соответствующей ему оптимальной результирующей оценки (единая задача

обнаружения-оценивания) используем следующую решающую функцию:

$$(6) \quad F(\boldsymbol{\lambda}, q) = \sum_{m=1}^M \left[ \left( \frac{\alpha_m(\boldsymbol{\lambda}) - \tilde{\alpha}_m}{2\pi} \right)^2 W_{\alpha m}(q) + \left( \frac{\beta_m(\boldsymbol{\lambda}) - \tilde{\beta}_m}{2\pi} \right)^2 W_{\beta m}(q) \right],$$

где  $\alpha_m(\boldsymbol{\lambda})$  и  $\beta_m(\boldsymbol{\lambda})$  — модельные пеленги,  $W_{\alpha m}(q)$  и  $W_{\beta m}(q)$  — безразмерные нормированные весовые коэффициенты.

В (6) число  $2\pi$  использовано для нормировки и для получения безразмерной функции  $F(\boldsymbol{\lambda}, q)$ , а частные весовые коэффициенты задаются так

$$(7) \quad \begin{aligned} W_{\alpha m}(q) &= L_q^{-1} \sum_{l=1}^{L_q} \varphi \left( \frac{|\alpha_{mql} - \tilde{\alpha}_m|^2}{\varepsilon_{\alpha m}^2} \right), \\ W_{\beta m}(q) &= L_q^{-1} \sum_{l=1}^{L_q} \varphi \left( \frac{|\beta_{mql} - \tilde{\beta}_m|^2}{\varepsilon_{\beta m}^2} \right), \end{aligned}$$

где  $L_q$  — количество отметок в кластере  $K_q$ ,  $\alpha_{mql}$  и  $\beta_{mql}$  — вторичные пеленги отметки  $\boldsymbol{\lambda}_{ql}$  кластера  $K_q$ ,  $l \in \{1, \dots, L_q\}$ ,  $\varphi(p) = 1 - p$  для  $p \leq 1$ ,  $\varphi(p) = 0$  для  $p > 1$ . Очевидно, что  $0 \leq W_{\alpha m}(q) \leq 1$  и  $0 \leq W_{\beta m}(q) \leq 1$ .

Формула (7) позволяет учесть количество отметок ( $L_q$ ), пороги допустимых погрешностей вторичного пеленгования ( $\varepsilon_{\alpha m}, \varepsilon_{\beta m}$ ) и наличие АОИ (введением индикаторной функции  $\varphi(p)$ ). Коэффициенты  $W_{\alpha m}(q)$  и  $W_{\beta m}(q)$  показывают удельный вклад пеленгов  $\tilde{\alpha}_m$  и  $\tilde{\beta}_m$  в образование всех отметок кластера  $K_q$ . Их можно назвать коэффициентами соответствия пеленгов  $\tilde{\alpha}_m$  и  $\tilde{\beta}_m$  отметкам кластера  $K_q$ . Чем больше значение коэффициента, тем больше доверия первичному пеленгу, с которым связан этот коэффициент. В классическом триангуляционном оценивании такую роль выполняют коэффициенты, обратно пропорциональные квадрату дисперсий ошибок  $\Delta\alpha_m$  и  $\Delta\beta_m$ .

Критерий оптимального обнаружения-оценивания сводится к следующему:

$$(8) \quad \boldsymbol{\lambda}^* = \arg \min_{\boldsymbol{\lambda}} F(\boldsymbol{\lambda}, q^*),$$

$$(9) \quad q^* = \arg \max_q W(q) = \arg \max_q \left\{ M^{-1} \sum_{m=1}^M [W_{\alpha m}(q) + W_{\beta m}(q)] \right\},$$

где  $W(q)$  — интегральный безразмерный нормированный весовой коэффициент,  $0 \leq W(q) \leq 1$ .

Требуется с учетом (1)–(9): построить алгоритм решения задачи триангуляции в оптимальной постановке; рассмотреть квазиоптимальный экономичный в вычислительном плане двухэтапный КВМ (сначала по азимуту, а затем по углу места); на основе анализа известных алгоритмов кластеризации

обосновать эффективный алгоритм объединения частных триангуляционных отметок в цепочечные кластеры; провести численный сравнительный анализ алгоритмов  $A_1$  (для известного КВМ),  $A_2$  и  $A_3$  (соответственно для разрабатываемых оптимального и двухэтапного квазиоптимального) по точности и оперативности; дать численный сравнительный анализ с методом максимального правдоподобия (для обычного и расширенного вариантов).

### 3. Оптимальный алгоритм решения задачи триангуляции

Для вычисления модельных пеленгов будем использовать известные формулы связи декартовых и прямоугольных декартовых координат:

$$(10) \quad \begin{cases} \alpha_m(\boldsymbol{\lambda}) = \arccos \left\{ (x - \rho_{xm}) [(x - \rho_{xm})^2 + (y - \rho_{ym})^2]^{-1/2} \right\}, \\ \beta_m(\boldsymbol{\lambda}) = \arcsin \left\{ (z - \rho_{zm}) [(x - \rho_{xm})^2 + (y - \rho_{ym})^2 + (z - \rho_{zm})^2]^{-1/2} \right\}. \end{cases}$$

Минимизация решающей функции  $F(\boldsymbol{\lambda}, q)$  по векторному аргументу  $\boldsymbol{\lambda}$  приводит к уравнению

$$(11) \quad \left[ \frac{\partial F(\boldsymbol{\lambda}, q)}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \right]^T = \mathbf{0},$$

где  $\mathbf{0} = [0, 0, 0]^T$ .

Раскрывая в (11) частные производные, получим систему скалярных уравнений

$$(12) \quad \begin{cases} \sum_{m=1}^M \left[ \left( \frac{\alpha_m(\boldsymbol{\lambda}) - \tilde{\alpha}_m}{2\pi} \right) W_{\alpha m q} \frac{\partial \alpha_m(\boldsymbol{\lambda})}{\partial x} + \left( \frac{\beta_m(\boldsymbol{\lambda}) - \tilde{\beta}_m}{2\pi} \right) W_{\beta m q} \frac{\partial \beta_m(\boldsymbol{\lambda})}{\partial x} \right] = 0, \\ \sum_{m=1}^M \left[ \left( \frac{\alpha_m(\boldsymbol{\lambda}) - \tilde{\alpha}_m}{2\pi} \right) W_{\alpha m q} \frac{\partial \alpha_m(\boldsymbol{\lambda})}{\partial y} + \left( \frac{\beta_m(\boldsymbol{\lambda}) - \tilde{\beta}_m}{2\pi} \right) W_{\beta m q} \frac{\partial \beta_m(\boldsymbol{\lambda})}{\partial y} \right] = 0, \\ \sum_{m=1}^M \left[ \left( \frac{\alpha_m(\boldsymbol{\lambda}) - \tilde{\alpha}_m}{2\pi} \right) W_{\alpha m q} \frac{\partial \alpha_m(\boldsymbol{\lambda})}{\partial z} + \left( \frac{\beta_m(\boldsymbol{\lambda}) - \tilde{\beta}_m}{2\pi} \right) W_{\beta m q} \frac{\partial \beta_m(\boldsymbol{\lambda})}{\partial z} \right] = 0, \end{cases}$$

где частные производные раскрываются с учетом (10).

Системе (12) соответствуют частные оценки  $\boldsymbol{\lambda}^*(q)$ ,  $q = \overline{1, Q}$ . В качестве результирующей  $\boldsymbol{\lambda}^* \in \{\boldsymbol{\lambda}^*(1), \dots, \boldsymbol{\lambda}^*(Q)\}$  выбирается та частная оценка  $\boldsymbol{\lambda}^*(q^*)$  (где  $q^* \in \{1, \dots, Q\}$ ), которая согласно (9) удовлетворяет критерию

$$(13) \quad W(q^*) > W(q), \quad q \neq q^*.$$

Выбором значений параметров, фигурирующих в условиях (1)–(5), всегда можно обеспечить единственность и точность решения задачи триангуляции

с учетом (10)–(13). Так, с увеличением значений параметров  $M$ ,  $\varsigma_\alpha$  и  $\varsigma_\beta$  всегда обеспечивается надежное обнаружение результирующего кластера  $K_{q^*}$ , содержащего наибольшее число отметок, образованных достоверными структурами. В свою очередь, выбор параметров  $\varepsilon_{\alpha m}$  и  $\varepsilon_{\beta m}$  влияет на точность триангуляционного оценивания.

Если ограничиться одним кластером, снять ограничения (5), а весовым коэффициентам  $W_{\alpha m}(q)$  и  $W_{\beta m}(q)$  поставить в соответствие обратные величины дисперсий ошибок пеленгования (распределенных по нормальному закону), то приведенное решение (10)–(13) будет соответствовать известной максимально правдоподобной триангуляционной оценке для случая отсутствия АОИ (см., например, [5, 10, 11, 13]).

Сам алгоритм решения задачи триангуляции в кластерной оптимальной постановке сводится к следующему:

1. Проводится кластеризация триангуляционных отметок путем построения кластеров  $K_q$ ,  $q = \overline{1, Q}$  (рекомендации по кластеризации даны в четвертом разделе).
2. Для каждого кластера  $K_q$  подсчитываются количество входящих в него отметок ( $L_q$ ), частные и интегральный весовые коэффициенты ( $W_{\alpha m}(q)$ ,  $W_{\beta m}(q)$  и  $W(q)$ ).
3. С использованием критерия (13) решаем задачу обнаружения, т.е. находим номер  $q^*$  результирующего кластера  $K_{q^*}$ .
4. Для кластера  $K_{q^*}$  решаем систему уравнений (12), выбирая в качестве начального условия декартовы координаты центра этого кластера. В итоге с учетом (13) получаем результирующую (оптимальную) оценку местоположения цели  $\lambda^* = \lambda^*(q^*) = [x(q^*), y(q^*), z(q^*)]^T$ .

*Замечание.* Если воспользоваться известным приближенным подходом к построению максимально правдоподобной триангуляционной оценки (см., например, [13]), основанном на аппроксимации невязок  $\alpha_m(\lambda) - \tilde{\alpha}_m$  и  $\beta_m(\lambda) - \tilde{\beta}_m$  с использованием приближенных данных о дальности до цели (в данном случае это дальность до центра кластера), то вместо (12) можно получить соответствующую линейную систему алгебраических уравнений. В этом случае отпадает необходимость выбора начального условия, что характерно для нелинейной системы уравнений (12).

В классической статистической постановке задача триангуляции решается на базе всех измерений (независимо от того, хорошие они или плохие), подлежащих совместной оптимальной обработке с учетом заранее назначаемых априорных весов. Алгоритм  $A_2$  также оперирует со всеми измерениями, но с учетом апостериорных весов ( $W_{\alpha m}(q)$ ,  $W_{\beta m}(q)$  и  $W(q)$ ), которые формируются непосредственно по результатам пеленгования с использованием семейства наборов. Возможно также комбинированное результирующее оценивание, предполагающее одновременный учет априорных и апостериорных весов.

Реализация предлагаемого алгоритма  $A_2$  (с учетом подготовки исходных данных) связана со следующими вычислительными затратами  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$ , где  $\Gamma_1$  — затраты на построение семейства отметок,  $\Gamma_2$  — затраты на кластеризацию отметок и выбор результирующего кластера,  $\Gamma_3$  — затраты на построение результирующей оценки. При решении задачи триангуляции в линейном (приближенном варианте) основные затраты  $\Gamma_1$  связаны с решением набора (объемом  $\overline{N}$ ) систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с квадратной матрицей размером  $3 \times 3$ . При этом организуется параллельный процесс получения искомым решений, что наиболее важно для обеспечения режима реального времени при обработке измерений в многопозиционной пеленгационной системе. Затраты  $\Gamma_2$  в основном связаны с простейшими операциями по нахождению набора (объемом  $N(N-1)/2$ ) евклидовых расстояний между отметками (прошедшими селекцию) и их сортировкой в различные кластеры,  $\Gamma_3$  — с решением набора (объемом  $L_q$ ) СЛАУ с квадратной матрицей размером  $3 \times 3$ . Реализация указанных операций в специализированных вычислительных средах не представляет особых сложностей и позволяет обеспечить режим реального времени. Сравнительные результаты реализации КВМ в универсальной компьютерной среде отражены в разделе 7.

#### 4. Рекомендации по кластеризации отметок

В случае алгоритма  $A_1$  обнаружение недостоверных измерений и построение результирующей оценки связаны с ядром кластера (это его наиболее плотная часть плюс отметки близких соседних кластеров), что эффективно при наличии только сферических кластеров. При работе с кластерами цепочечной формы точность оценивания на основе алгоритма  $A_1$  существенно ухудшается. Сказанное подтверждается реальным примером, результаты которого отражены на рис. 1 и 2. Здесь показаны варианты группирования отметок для цели, наблюдаемой под углом в 45 градусов, отсчитываемым от горизонтальной оси плоской системы координат. Эти рисунки соответствуют результатам эксперимента для плоского случая и системы, состоящей из пяти азимутальных пеленгаторов, равномерно расположенных на окружности с радиусом 10 км и центром в начале координат (рис. 1 соответствует дальности до цели приблизительно 20 км относительно центра окружности, а рис. 2 — 50 км), измерения пеленгов сопровождались только допустимыми случайными ошибками (без АОИ), сплошным линиям соответствуют направления пеленгатор-цель, точкам — отметки, прошедшие селекцию. Масштабы рис. 1 и 2 различны, если на рис. 1 цена деления по оси абсцисс и оси ординат одинаковая и составляет 50 м, то на рис. 2 — по оси абсцисс 200 м, а по оси ординат 50 м.

В известном КВМ введение ядер было призвано минимизировать погрешности триангуляционного оценивания при неудачном выборе значения  $Q$ . Пусть  $Q$  на единицу больше реального количества кластеров (например,



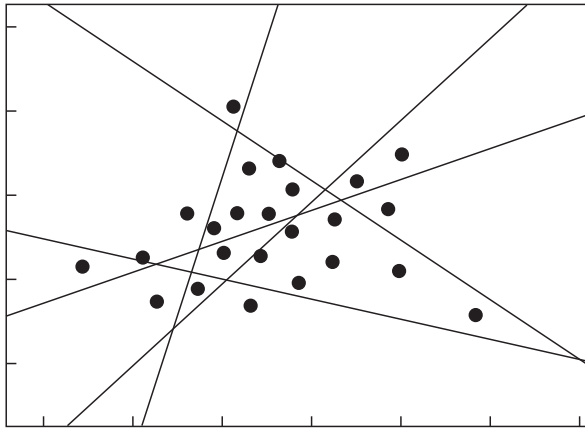


Рис. 1. Образование сферического кластера.

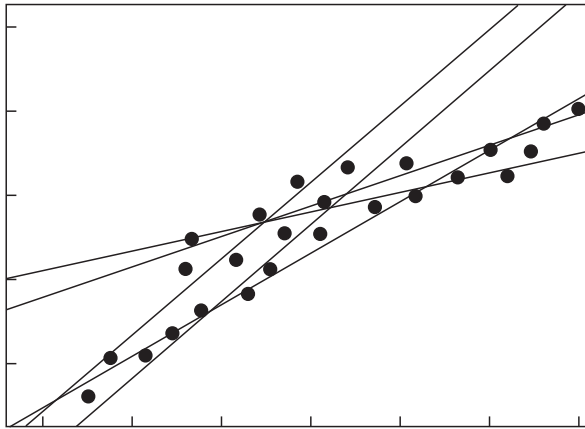


Рис. 2. Образование цепочечного кластера.

из-за ошибки оператора системы), то какой-то из них будет искусственно разбит на два кластера. Если приоритетный кластер, отвечающий истинному положению цели, подвергнуть такому разбиению, то это может привести к значительному росту погрешности оценивания. На рис. 3 представлен такой случай, где черным точкам отвечают отметки, отнесенные к первому кластеру (цель находится в этом кластере), серым точкам — ко второму кластеру, значками  $\square$  и  $\times$  обозначены центры кластеров и истинная отметка цели соответственно, эллипсом показана некоторая окрестность центра первого кластера (отметки первого и второго кластеров, попавшие в указанную окрестность, составляют ядро первого кластера), затененным квадратом отмечен центр ядра первого кластера. За счет допущенной ошибки (разбиение исходного цепочечного кластера на два более мелких кластера) возможны следующие негативные последствия: ошибка в выборе приоритетного кластера и, как следствие, значительная смещенность результирующей оценки;

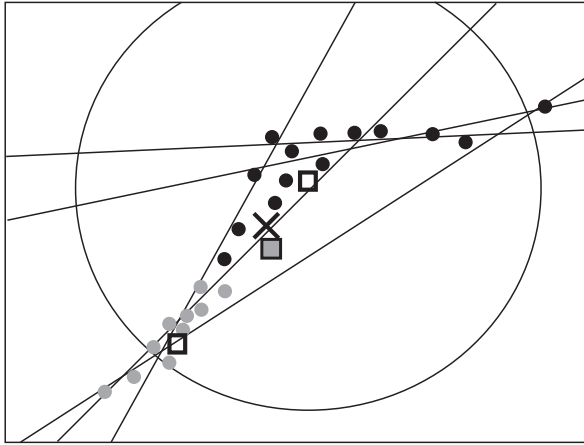


Рис. 3. Образование ядра кластера.

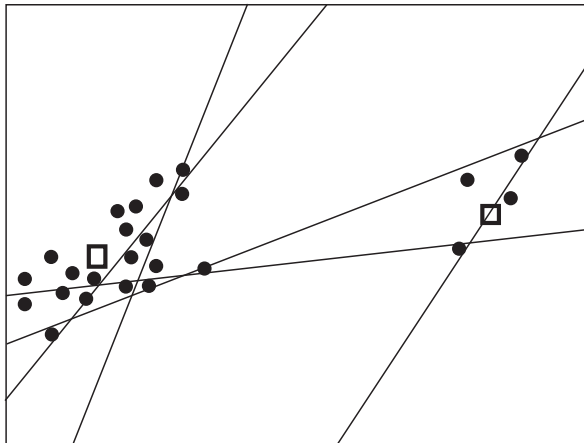


Рис. 4. Расположение частных триангуляционных отметок для плоского случая.

при обработке полностью игнорируются отметки конкурирующего (второго) кластера; резкое снижение количества полезных отметок из исходного цепочечного кластера, которые могли бы участвовать в обработке. Несколько улучшить ситуацию позволяет введение ядер (одно из них, соответствующее первому кластеру, представлено на рис. 3 в виде эллипса). Видим, что ядро первого кластера «активно» захватывает отметки как первого, так и второго кластеров, что повышает количество отметок, участвующих в обработке, а следовательно, уменьшает смещенность результирующей оценки. Но и в этом случае часть полезных отметок исходного цепочечного кластера выпадает из результирующего оценивания. В пространственном случае, когда работаем с гораздо большим количеством структур, эта проблема становится наиболее выраженной.

На рис. 4 приведено расположение отметок для плоского случая с допустимыми случайными ошибками в каналах четырех азимутальных пеленгаторов ( $\Pi_1, \dots, \Pi_4$ ) и аномальной ошибкой (в 11 градусов) в канале пятого пеленгатора ( $\Pi_5$ ). На рис. 4 знаком  $\square$  отмечены центры кластеров  $K_1$  (слева) и  $K_2$  (справа) (третий кластер  $K_3$  находится на значительном удалении и на рисунке не представлен). Для плоского случая и системы из пяти пеленгаторов имеем  $\bar{N} = 26$  и  $N = 25$  (т.е. двадцать пять из двадцати шести отметок прошли селекцию, при этом двадцать отметок попали в  $K_1$ , четыре отметки — в  $K_2$  и одна отметка — в  $K_3$ ).

Следует также отметить, что на практике построение ядра требует задания некоторой окрестности центра кластера. Сложность выбора такой окрестности вызвана тем, что с ростом расстояния до цели и (или) ее появления в триангуляционно-некорректных направлениях растут и размеры кластеров. Это также вынуждает модифицировать известный КВМ и использовать новый подход к выбору количества кластеров разбиения триангуляционных отметок.

Для фиксированного  $k$  отметки разбиваются на  $Q_k = Q_0 + k$  кластеров (где  $Q_0 \geq 2$ ,  $k \in \{0, 1, \dots\}$ ). Разбиение отметок на кластеры должно заканчиваться на шаге  $k = k^*$ , когда

$$(14) \quad k^* = \arg \max_k S(k), \quad k \in \{0, 1, \dots\},$$

где  $S_k = S(k)$  — решающая выпуклая функция, зависящая от параметров кластеров и имеющая точку максимума. Значению  $k = k^*$  соответствует оптимальное количество кластеров разбиения  $Q_{k^*} = Q^*$ .

Анализ существующей кластерной теории показал, что для работы с цепочечными кластерами применительно к алгоритму  $A_2$  наиболее подходит процедура автоматического беспорогового расчета количества ( $Q$ ) кластеров  $K_q$  с использованием коэффициента «силуэта» [28]:

$$(15) \quad S(k) = \frac{1}{N} \sum_{q=1}^{Q_k} \sum_{l=1}^{L_q} s(q, l), \quad k \in \{0, 1, \dots\},$$

где  $s(q, l) = 1 - a(q, l)/b(q, l)$  при  $a(q, l) < b(q, l)$ ;  $s(q, l) = 0$  при  $a(q, l) = b(q, l)$ ;  $s(q, l) = b(q, l)/a(q, l) - 1$  при  $a(q, l) > b(q, l)$ ;  $a(q, l)$  — среднее расстояние от  $l$ -го элемента ( $\lambda_{ql}$ ) кластера  $K_q$  до других элементов этого же кластера;  $b(q, l)$  — среднее расстояние от  $l$ -го элемента ( $\lambda_{ql}$ ) кластера  $K_q$  до элементов ( $\lambda_{r1}, \dots, \lambda_{rL_r}$ ) «соседнего» кластера  $K_r$ .

Для расчетов используются формулы

$$(16) \quad a(q, l) = \frac{1}{L_q - 1} \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq l}}^{L_q} |\lambda_{ql} - \lambda_{qm}|,$$

$$b(q, l) = \min_{r \neq q} \frac{1}{L_r} \sum_{m=1}^{L_r} |\lambda_{ql} - \lambda_{rm}|.$$

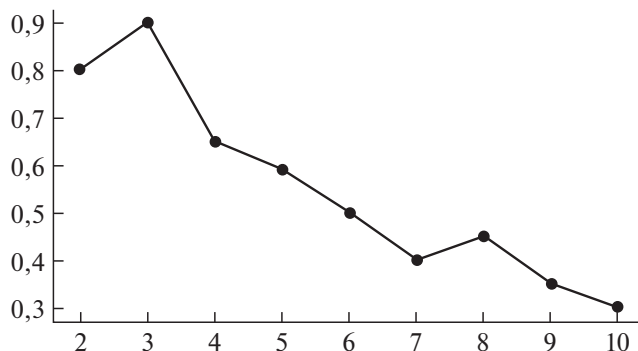


Рис. 5. Зависимость коэффициента «силуэта» от количества кластеров.

Алгоритм (14)–(16) разбиения семейства триангуляционных отметок на кластеры реализуется автономно (без участия оператора), достаточно прост для компьютерной реализации и не требует больших вычислительных затрат. Результаты применения кластерных алгоритмов на основе коэффициента «силуэта» показывают их высокую эффективность и хорошие асимптотические свойства в различных областях.

Напомним, что в алгоритме  $A_1$  определение числа кластеров зависит от порогового значения, в выборе которого имеется неопределенность, что требует участия опытного оператора в решении задачи кластерного разбиения отметок. Это связано с тем, что используемая в алгоритме  $A_1$  решающая функция является монотонно убывающей (с ростом  $k \in \{0, 1, \dots\}$ ) и не имеет точки максимума.

Для примера, рассмотренного в предыдущем разделе, значение коэффициента «силуэта» для параметра  $Q_k \in \{2, 3, \dots, 10\}$  представлено на рис. 5. Можно видеть, что при выборе начального условия  $Q_0 = 2$  максимум достигается при  $k = k^* = 1$ , в итоге получаем  $Q_{k^*} = Q^* = 3$ . Таким образом, оптимальным будет разбиение всех отметок на три кластера, что согласуется с данными, представленными на рис. 4 (т.е. реальное количество кластеров равно расчетному значению).

## 5. Двухэтапный квазиоптимальный алгоритм

Применение двухэтапного подхода к реализации КВМ предполагает повышение оперативности оценивания. Для этого рассмотрим основные положения алгоритма  $A_3$ , который является квазиоптимальным по отношению к алгоритму  $A_2$ .

*Первый вариант* реализации алгоритма  $A_3$  основан на том, что есть возможность реализации алгоритма, рассмотренного в разделе 2, сначала только на азимутальных измерениях и наборах (первый этап), что позволяет сформировать семейство плоскостных отметок и кластеров, а затем определить оценки  $x^*$  и  $y^*$  двух истинных координат цели ( $x_{ист}$  и  $y_{ист}$ ). Точке  $(x^*, y^*)$  в

трехмерном пространстве соответствует своя линия положения цели. Объединяя эту линию и конусы положения (соответствуют углам места) всех пеленгаторов для различных наборов формируем новые наборы, пространственные отметки и кластеры, на базе которых (на основе алгоритма, рассмотренного в разделе 2) строим недостающую оценку  $z^*$  истинной координаты  $z_{\text{ист}}$  (второй этап).

*Второй вариант* реализации алгоритма  $A_3$  основан на том, что на первом этапе (на основе алгоритма, рассмотренного в разделе 2 применительно только к азимутальным измерениям и наборам) с использованием коэффициентов соответствия  $W_{\alpha m}(q^*)$  находятся недостоверные азимутальные измерения, которые исключаются из дальнейшей обработки (первый этап). Далее на оставшихся приоритетных азимутальных и всех угломестных измерениях реализуется алгоритм из раздела 2 (этап 2). В этом случае возрастает количество исследуемых наборов (по сравнению с *первым вариантом*), что обеспечивает повышение качества триангуляционного оценивания в условиях неопределенности.

Очевидно, что двухэтапный квазиоптимальный КВМ для двух рассмотренных вариантов не исчерпывает потенциальных возможностей оптимального КВМ в условиях неопределенности, но является более экономичным с вычислительной точки зрения. Это связано, в первую очередь, с существенным сокращением исследуемых наборов, частных триангуляционных отметок и кластеров.

## 6. Обобщение на случай многих целей

Распространение развиваемого КВМ на этот случай зависит от назначения, принципов построения и организации информационно-измерительного процесса в конкретной системе. Можно выделить два основных варианта реализации КВМ для многоцелевого случая.

*Вариант 1.* Когда разбиение пеленгов на классы по признаку принадлежности к данной цели выделено в отдельный этап (задача отождествления пеленгов). Такая усеченная постановка задачи весьма распространена на практике при соответствующей декомпозиции информационно-измерительного процесса. В этом случае применение КВМ сводится к рассмотренному ранее алгоритму применительно к каждому классу. Для этого формируются векторы измерений  $\mathbf{Y}_j = [\mathbf{Y}_{j\alpha}^T, \mathbf{Y}_{j\beta}^T]^T$ , где  $j$  — номер цели (класса),  $j = \overline{1, J}$ ,  $\mathbf{Y}_{j\alpha} = [\tilde{\alpha}_{mj}, m = \overline{1, M}]^T$  и  $\mathbf{Y}_{j\beta} = [\tilde{\beta}_{mj}, m = \overline{1, M}]^T$ . Для  $j$ -го класса (по аналогии с разделом 2) формируются элементы  $K_{jq}$ ,  $L_{jq}$ ,  $W_{j\alpha m}(q)$ ,  $W_{j\beta m}(q)$ ,  $W_j(q)$ ,  $q_j^*$  и на их основе результирующие оценки  $\lambda_j^* = \lambda_j^*(q_j^*) = [x(q_j^*), y(q_j^*), z(q_j^*)]^T$ , которые с учетом критериев (8) и (9) обеспечивают решение единой задачи триангуляционного оценивания координат многих целей. Вариант 1 наиболее эффективный с вычислительной точки зрения,

позволяющий организовать  $J$  параллельных каналов обработки измерений, однако он не исчерпывает всех потенциальных возможностей совместной обработки доступных пеленгационных измерений.

*Примечание 1.* Если в ходе решения задачи отождествления допущено перепутывание пеленгов, то ложный пеленг можно рассматривать как пеленг, содержащий АОИ. Развитый КВМ позволяет эффективно бороться с такими ошибками независимо от их природы.

*Примечание 2.* Возможно привлечение для решения этой задачи различных радиотехнических параметров (например, несущая частота, период следования импульсов, их длительность, вид внутриимпульсной модуляции и т.д.), которыми «нагружены» пеленги. Такие параметры хранятся в соответствующих формулярах, которые широко используются в радиотехнической разведке для решения задачи идентификации целей.

*Вариант 2.* В этом случае КВМ применяется сразу ко всем измерительным наборам  $\mathbf{Y}_\alpha = [\tilde{\alpha}_{mj}, m = \overline{1, M}, j = \overline{1, J}]$  и  $\mathbf{Y}_\beta = [\tilde{\beta}_{mj}, m = \overline{1, M}, j = \overline{1, J}]$  с образованием кластеров  $K_q, q = \overline{1, Q}$ . Первоначально требуется определить номера  $q_j^* \in \{1, \dots, Q\}$  приоритетных кластеров  $K_{q_j^*}$ , что достигается введением критерия  $W(q_j^*) \geq \gamma$ , где  $\gamma$  — заданный порог распознавания цели,  $\gamma > 0$ . Далее для каждого приоритетного кластера строятся результирующие оценки  $\boldsymbol{\lambda}_j^* = \boldsymbol{\lambda}_j^*(q_j^*) = [x(q_j^*), y(q_j^*), z(q_j^*)]^T, j = \overline{1, J}$ .

Вариант 2 является достаточно затратным с вычислительной точки зрения, так как приводит к большому числу кластеров ( $Q$ ). Достоинство варианта состоит в том, что задача триангуляционного оценивания координат многих целей реализует потенциальные возможности КВМ в условиях неопределенности.

## 7. Сравнительный анализ

Рассмотрим систему, пеленгаторы которой расположены на окружности с координатами  $\boldsymbol{\xi}_m = [x_m, y_m, z_m]^T = [10^4 \cos(2\pi m/M), 10^4 \sin(2\pi m/M), 0]$ ,  $M = 5, m = \overline{1, 4}$ . Для вектора  $\boldsymbol{\lambda}$  регистрировалось 180 отметок, также расположенных по окружности:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\lambda}_k &= [x_k, y_k, z_k]^T = \\ &= [5 \cdot 10^4 \cos(2\pi k/K), 5 \cdot 10^4 \sin(2\pi k/K), 3 \cdot 10^3]^T, \quad k = \overline{1, 180}. \end{aligned}$$

Здесь и далее координаты цели и пеленгаторов задаются в метрах, азимут, угол места и ошибки пеленгования — в радианах. Для каждого фиксированного  $k$  принималось, что в достоверных измерительных каналах флуктуационные ошибки измерений распределены по нормальному закону с нулевыми математическими ожиданиями и корреляционной матрицей  $\mathbf{K}_m = \text{diag}[\sigma_{\alpha m}^2, \sigma_{\beta m}^2] = \text{diag}[\sigma_\alpha^2, \sigma_\beta^2]$ , где  $\sigma_\alpha = \pi/360$  и  $\sigma_\beta = \pi/360$ , при этом

ошибки формировались с помощью датчика случайных чисел (ошибки разных пеленгаторов независимы). Номера недостоверных измерений (не более чем половина всех азимутальных и не более чем половина всех угломестных измерений), содержащих АОИ, выбирались случайным образом. Результирующая ошибка измерений (это сумма АОИ и допустимой случайной ошибки) для азимута соответствовала интервалу  $(3\sigma_\alpha, \pi/6)$ , а для угла места —  $(3\sigma_\beta, \pi/6)$ . Процедура оценивания проводилась для каждого фиксированного  $k$  с последующим усреднением по ста экспериментам. В алгоритме  $A_1$  принято  $Q = 7$ , а в алгоритмах  $A_2$  и  $A_3$  в качестве начального условия принято  $Q_0 = 2$ . Для сравниваемых алгоритмов  $A_1$ ,  $A_2$  и  $A_3$  использовались две числовые характеристики:  $S(A_i)$  — интегральная характеристика точности (выражается в метрах),  $T(A_i)$  — характеристика вычислительной оперативности (выражается в секундах). При этом для  $k$ -го положения цели и алгоритма  $A_i$  ( $i \in \{1, 2, 3\}$ ) имеем

$$S(A_i) = \sum_{k=1}^{180} S_k(A_i) = (2\pi/180) \sum_{k=1}^{180} \Delta_k(A_i),$$

где  $\Delta_k(A_i) = \|\bar{\lambda}_k^*(A_i) - \lambda_k\|_2$  — частная невязка,  $\lambda_{kp}^*(A_i)$  и  $\bar{\lambda}_k^*(A_i) = \sum_{p=1}^{100} \lambda_{kp}^*(A_i)/100$  — соответственно единичная (для  $p$ -го эксперимента) и усредненная (для 100 экспериментов) оценки вектора  $\lambda_k$ .

Для сравнительного анализа алгоритмов  $A_i$  (где  $i \in \{1, 2, 3\}$ ) далее используются относительная интегральная характеристика

$$\delta S(A_i) = 100S(A_i)S^{-1}(A_1) [\%]$$

и относительная вычислительная оперативность

$$\delta T(A_i) = 100T(A_i)T^{-1}(A_2) [\%],$$

принимая во внимание, что алгоритм  $A_1$  менее точный, а  $A_2$  требует больше временных затрат, чем другие алгоритмы. Результаты моделирования представлены в таблице сравнения алгоритмов.

**Таблица**

Алгоритмы ( $A_i$ )	$A_1$	$A_2$	$A_3$
$\delta S(A_i)$ , %	100	50	67
$\delta T(A_i)$ , %	90	100	15

Видим, что в аномальных условиях функционирования системы модифицированный алгоритм  $A_2$  с адаптивным выбором числа кластеров (на базе коэффициента «силуэта»), оптимальным выбором результирующего кластера (на базе усовершенствованного критерия) и весовой обработкой данных (с использованием коэффициентов соответствия) существенно лучше

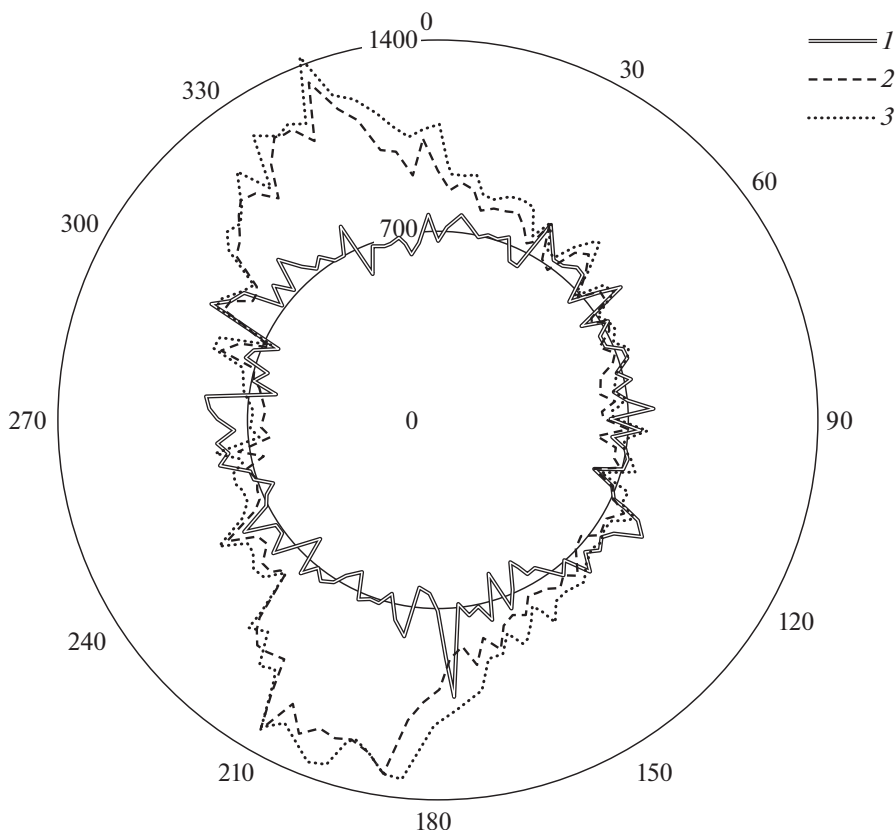


Рис. 6. Сравнение с алгоритмами на основе метода максимального правдоподобия.

(в плане точности) по сравнению с алгоритмами  $A_1$  и  $A_3$ . В плане оперативности он самый трудозатратный, однако нужно отметить, что временные затраты на реализацию процедур (6)–(8) не превышают 10%. Также видим, что алгоритм  $A_3$  уступает по точности алгоритму  $A_2$ , зато требует существенно меньших временных затрат.

Так же проводилось сравнение КВМ с методом максимального правдоподобия (ММП) и расширенным ММП (РММП — для случая, когда АОИ входят в вектор оцениваемых параметров). Принималось, что измерения с АОИ фиксированы — это 5-й азимут и 3-й угол места. Для метода ММП полностью исключались из обработки показания 5-го и 3-го пеленгаторов, а для РММП полагалось, что номера измерений с аномальными ошибками известны, а неизвестны лишь значения соответствующих ошибок.

Результирующая ошибка сравниваемых методов (в метрах) представлена на рис. 6. Здесь приняты обозначения: 1 — для КВМ, 2 — для ММП, 3 — для РММП. Из рисунка видно, что только КВМ обеспечивает надежное оценивание для всех направлений визирования цели.



## 8. Заключение

Предложенный модифицированный КВМ позволяет на базе алгоритмов  $A_2$  и  $A_3$  строить устойчивую к влиянию АОИ результирующую оценку местоположения цели в условиях структурной неопределенности. Эти алгоритмы как самостоятельно, так и в совокупности с традиционными подходами (например, методом максимального правдоподобия) могут быть эффективно использованы при совершенствовании существующих и разработке перспективных систем нового поколения. В случае ограниченности вычислительных ресурсов и/или при большом количестве пеленгаторов двухэтапный подход (на основе алгоритма  $A_3$ ) позволяет существенно повысить оперативность триангуляционного оценивания.

Очевидно, что существенный интерес для теории и практики многопозиционных пеленгационных систем различного типа представляют следующие направления совершенствования КВМ: рассмотрение систем с одноканальными и двухканальными пеленгаторами различного типа; модернизация полученных алгоритмов на случай несинхронных и разноточных измерений; построение алгоритма фильтрации с учетом цепочечного характера кластеров, который будет наиболее выражен при рассмотрении движущейся цели. Работы в этих направлениях уже ведутся и будут представлены заинтересованным специалистам в недалеком будущем.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бульчев Ю.Г., Головской В.А. Обработка измерений угломерных систем в условиях априорной неопределенности в регуляризированной постановке // РЭ. 2010. Т. 55. № 1. С. 71–77.
2. Бульчев Ю.Г., Чепель Е.Н. Мультиструктурный метод триангуляционного оценивания параметров движения излучающей цели в условиях априорной неопределенности // ТиСУ. 2019. № 6. С. 26–42.
3. Сайбель А.Г. Основы теории точности радиотехнических методов местоопределения. М.: Оборонгиз, 1958.
4. Кулес И.С., Старик М.Е. Основы радиопеленгации. М.: Сов. Радио, 1964.
5. Теоретические основы радиолокации / Под ред. Я.Д. Ширмана. М.: Сов. радио, 1970.
6. Butterfly P.I. Position Finding with Empirical Prior Knowledge // IEEE Trans. 1972. V. AES-8. No. 3. P. 142–146.
7. Nunn W.R. Position Finding with Prior Knowledge of Covariance Parameters // IEEE Trans. 1979. V. AES-15. No. 3. P. 204–208.
8. Wax M. Position Location from Sensors with Position Uncertainty // IEEE Trans. 1983. V. AES-19. No. 5. P. 658–662.
9. Кондратьев В.С., Котов А.Ф., Марков Л.Н. Многопозиционные радиотехнические системы. М.: Радио и связь, 1986.
10. Черняк В.С. Многопозиционная радиолокация. М.: Радио и связь, 1993.

11. *Lin X., Kirubarajan T., Bar-Shalom Y., Maskell S.* Comparison of EKF, Pseudomeasurement and Particl Filters for a Bearing-only Target Tracking Problem // Proc. SPIE-Int. Soc. Optic. placecountry-regionEng. 2002. V. 4728. P. 240–250.
12. *Булычев Ю.Г., Булычев В.Ю., Ивакина С.С., Насенков И.Г.* Пассивная локация группы движущихся целей одним стационарным пеленгатором с учетом априорной информации // *АиТ.* 2017. № 1. С. 152–166.  
*Bulychev Y.G., Bulychev V.Y., Ivakina S.S., Nasenkov I.G.* Passiv of Location of moving Targets with prior Information // *Autom. Remote Control.* 2017. V. 78. No. 1. P. 125–137.
13. *Булычев Ю.Г., Булычев В.Ю., Ивакина С.С. и др.* Обоснование методов оптимального оценивания параметров движения цели в триангуляционной измерительной системе // *ТиСУ.* 2015. № 4. С. 94–110.
14. *Gustafsson F.* Particle filters for positioning, navigation and tracking // *IEEE Transactions on Signal Processing.* 2002. V. 50. No. 2. P. 425–437.  
<https://doi.org/10.1109/78.978396>
15. *Bar-Shalom Y., Rong Li X., Kirubarajan T.* Estimation with Applications to Tracking and Navigation: Theory, Algorithms and Software. New York: John Wiley & Sons. 2004. <https://doi.org/10.1002/0471221279>
16. *Valente de Oliveira J., Pedrycz W.* Advances in Fuzzy Clustering and Its Applications. New York: John Wiley & Sons. 2007. <https://doi.org/10.1002/9780470061190>
17. *Zekavat S., Buehrer R.* Handbook of Position Location: Theory Practice and Advances. Second ed. Hoboken. New Jersey: Wiley-IEEE Press 2019.  
<https://doi.org/10.1002/9781119434610>
18. *Zhao J., Renzhou G., Xudong D.* A new measurement association mapping strategy for DOA tracking // *Digital Signal Processing.* 2021. V. 118. P. 103–228. ISSN 1051-2004. <https://doi.org/10.1016/j.dsp.2021.103228>  
(<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1051200421002670>)
19. *Peng L., Wenhui W., Junda Q., Congzhe Y., Zhenqiu S.* Robust Generalized Labeled Multi-Bernoulli Filter and Smoother for Multiple Target Tracking using Variational Bayesian // *KSI Transactions on Internet and Information Systems.* 2022. V. 16. No. 3. P. 908–928. <https://doi.org/10.3837/tiis.2022.03.009>
20. *Wang X., Wang A., Wang D., Xiong Y., Liang B., Qi Y.* A modified Sage-Husa adaptive Kalman filter for state estimation of electric vehicle servo control system // *Energy Reports.* 2022. V. 8. No. 5. P. 20–27. ISSN 2352-4847.  
<https://doi.org/10.1016/j.egyr.2022.02.105>  
(<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2352484722003523>)
21. *Уидроу Б., Стирнз С.* Адаптивная обработка сигналов. М.: Радио и связь, 1989.
22. *Граничнин О.Н., Поляк Б.Т.* Рандомизированные алгоритмы оценивания и оптимизации при почти произвольных помехах. М.: Наука, 2003.
23. *Мансур М.Э., Степанов О.А.* Алгоритмы комплексной обработки в задаче коррекции показаний навигационных систем при наличии нелинейных измерений // *Изв. Тульского ГУ. Технические науки.* 2016. № 6. С. 89–102.
24. *Мандель И.Д.* Кластерный анализ. М.: Финансы и статистика, 1988.
25. *Уиллиамс У.Т., Ланс Д.Н.* Методы иерархической классификации / Под ред. М.Б. Малюгова. М.: Наука, 1986.
26. *Lance G.N., Willams W.T.* A general theory of classification sorting strategies. 1. Hierarchical systems // *Comput J.* 1967. V. 9. No. 4. P. 373–380.

27. *Граничинин О.Н., Шлымов Д.С., Аврос Р., Волкович З.* Рандомизированный алгоритм нахождения количества кластеров // *АиТ.* 2011. № 4. С. 86–98.
28. *Паклин Н.Б., Орешков В.И.* Кластерные силуэты / Системный анализ в проектировании и управлении: Сб. тр. XX Междунар. научно-практ. конф.; Санкт-Петербург, 29 июня–1июля, СПб., 2016. С. 314–321.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии О.А. Степановым.*

Поступила в редакцию 19.11.2020

После доработки 13.09.2022

Принята к публикации 26.10.2022