Автоматика и телемеханика, № 4, 2023

Управление в социально-экономических системах

© 2023 г. В.Н. ГРИДИН, д-р техн. наук (info@ditc.ras.ru)
(ФГБУН Центр информационных технологий в проектировании РАН, Одинцово, Московская обл.),
А.Ю. ГОЛУБИН, канд. физ.-мат. наук (agolubin@hse.ru)
(Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва;
ФГБУН Центр информационных технологий в проектировании РАН, Одинцово, Московская обл.)

ПОСТРОЕНИЕ ЭФФЕКТИВНЫХ ИНВЕСТИЦИОННЫХ ПОРТФЕЛЕЙ С ВЕРОЯТНОСТЬЮ ПАДЕНИЯ ФИНАЛЬНОГО КАПИТАЛА ИНВЕСТОРА НИЖЕ УСТАНОВЛЕННОГО УРОВНЯ В КАЧЕСТВЕ МЕРЫ РИСКА[1]

Найдено конструктивное описание набора всех эффективных инвестиционных портфелей в задаче, где мера риска (shortfall probability (Sp)), введенная в работе для анализа задач портфельной теории, понимается как вероятность падения капитала инвестора ниже установленного уровня. В рамках предположения о нормальности суммарной доходности показано: набор всех эффективных портфелей для задачи с критериями «среднее значение-Sp» есть подмножество множества эффективных портфелей в задаче «среднее значение-дисперсия»; соотношение с эффективным множеством в задаче «среднее значение-Value-at-Risk (VaR)» имеет более сложный характер, зависящий от исходных параметров модели. Тем не менее доказано, что эффективное множество для задачи с критериями «среднее значение-Sp» есть подмножество эффективного множества в задаче «среднее значение-VaR» для достаточно высоких значений уровня доверия. Помимо нормального распределения, рассмотрены эллиптические распределения.

Ключевые слова: выбор эффективного портфеля, мера риска, вероятностное ограничение, управление рисками.

DOI: 10.31857/S0005231023040086, **EDN:** QILIGV

1. Введение

После новаторской работы Markowitz [1], где дисперсия рассматривалась как мера риска инвестиций, еще одна мера риска, Value at Risk (VaR), стала популярным развитием этого подхода. VaR определяет максимальную сумму,

[1] Работа выполнена в рамках Госзадания FFSM-2019-0001.

которую стоимость портфеля может потерять в течение определенного периода времени с данной вероятностью в результате изменения рыночных цен или ставок доходности. Концепция VaR привлекательна, поскольку она согласуется с парадигмой средних отклонений и дисперсий (см., например, [2, 3]), и, с другой стороны, регулирующие органы, такие как Комиссия по ценным бумагам и биржам, требуют, чтобы регистраторы предоставили количественную информацию о рыночном риске, а VaR является одной из альтернатив раскрытия информации. Тем не менее VaR по-прежнему критикуют (см., например, [4, 5]) в отношении неспособности различать «большие» и «низкие» потери, лежащие за данным порогом. В [6] для преодоления этого недостатка предлагается класс «deviation» мер риска и устанавливается взаимосвязь между ним и согласованными (coherent) мерами риска [7]. В частности, доказано, что эти классы мер не совпадают, хотя существует пересечение. В [8] предлагается рассмотреть вместо мер риска VaR и Expectation of Shortfall (ES) — ожидаемый дефицит капитала — их степень, что, по мнению автора, позволит лучше изучить влияние введенных мер риска на рациональное поведение инвесторов.

Вероятность падения капитала ниже установленного уровня (Sp), или в других терминах failure probability, используется в инженерных приложениях в качестве меры риска, см., например, [9, 10]. В [11] отмечается, что failure probability имеет недостатки: отсутствие выпуклости и дифференцируемости в качестве функции параметров проектирования при решении задач инженерной оптимизации. Тем не менее будет показано, что в рамках проблемы определения эффективных портфелей на рассматриваемом рынке активов Sp имеет обобщенное свойство выпуклости и гладкую зависимость от весов в портфеле инвестиций.

Большинство подходов к расчету VaR предполагают совместное нормальное/лог-нормальное распределение базовых рыночных параметров ([12, 13]). На этой основе в [14] была исследована динамическая задача оптимизации портфелей при пошаговых VaR ограничениях. Квантильные ограничения были использованы для анализа стохастических моделей в книге [15]. В данной работе используется нормальная модель для распределения доходности и, кроме того, эллиптические распределения для моделирования распределения доходности с «тяжелым хвостом».

Представленная работа отличается от предыдущих результатов в нескольких отношениях. Во-первых, указываются некоторые интересные (по мнению авторов) свойства меры риска Sp, такие как обобщенное свойство выпуклости, инвариантность по масштабу, и исследуется, как эти свойства связаны с известными мерами риска: дисперсией доходности и VaR. Во-вторых, авторы аналитически характеризуют множество эффективных портфелей в задаче «среднее значение-Sp» (mean-Sp), используя параметризацию по среднему значению доходности, и сравнивают его с множествами эффективных портфелей в задачах с критериями: mean-variance и mean-VaR.

Остальная часть статьи организована следующим образом. В разделе 2 анализируется проблема нахождения всех эффективных портфелей в задаче mean-Sp на рынке при отсутствии безрискового актива, и сравнивается этот результат с множествами эффективных портфелей для задач mean-variance и mean-VaR. В разделе 3 изучается случай эллиптических распределений вместо многомерного нормального распределения доходностей рисковых активов. В разделе 4 дано заключение.

2. Эффективные инвестиционные портфели на рынке с рисковыми активами

Рассмотрим рынок, где отсутствует безрисковый актив (см., например, [12, 16]). Стохастический вектор доходностей на одном этапе инвестиций обозначим как $R = (R_1, \ldots, R_n)$, а через $a \in R^n$ обозначим инвестиционный портфель. Типичным бюджетным ограничением является $\sum_{i=1}^n a_i = 1$. В данных условиях это означает самофинансирование инвестора и его/ее возможность «коротких продаж», т.е. заимствование одних активов по текущим ценам с целью вложить деньги в другие. Предположим, что доходности имеют нормальное распределение с вектором средних значений $m = (m_1, \ldots, m_n)$ и матрицей ковариации C.

Далее используем следующие естественные предположения:

— векторы m и $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1) \in R^n$ являются линейно независимыми, т.е. средние доходности не равны одному и тому же значению,

— матрица ковариации C является положительно определенной.

В конце этапа инвестиций общая доходность портфеля является случайной переменной

$$X_a = \sum_{i=1}^n a_i R_i.$$

Целевая функция, которую инвестор желает максимизировать, — это средняя общая доходность

$$\mu(a) \stackrel{def}{=} EX_a = \sum_{i=1}^n a_i m_i,$$

где $m_i = ER_i$. Другая целевая функция, которая должна быть им минимизирована, — это вероятность Sp:

$$\mathrm{Sp}\,[\alpha, X_a] \stackrel{def}{=} P\left\{X_a \le \alpha\right\},$$

где α является установленной инвестором верхней границей для суммарной (общей) доходности портфеля. Заметим, что естественное предположение в рассматриваемой модели — это неравенство $\alpha < \min_{i=1,\ldots,n} m_i$.

Введенная мера риска Sp не является когерентной (coherent) мерой риска в соответствии с [7], так как она не удовлетворяет свойству однородности, $\mathrm{Sp}[\alpha, \rho X] \neq \rho \mathrm{Sp}[\alpha, X]$. Тем не менее она обладает свойством инвариантности относительно денежной единицы, т.е. если капитал X конвертируется в другую валюту γX с коэффициентом $\gamma > 0$, то вероятность $\mathrm{Sp}[\gamma\alpha, \gamma X] = P\{\gamma X \leq \gamma\alpha\} = \mathrm{Sp}[\alpha, X]$ не меняется.

Теперь определим одну из наиболее часто используемых мер риска в современной портфельной теории (см., например, [15–17]), а затем сравним ее с мерой риска Sp, определенной выше.

Определение 1. Value at Risk (VaR) — это значение доходности v, такое что $-v$ является квантилем функции распределения $F(x) = P\{X \leq x\}$ порядка $1-\beta$ с предписанным уровнем доверия $\beta \in (0{,}5,\ 1)$. Грубо говоря, $\mathrm{VaR}\,[\beta, X]$ является корнем уравнения $F(-v) = 1-\beta$.

Замечание 1. Некоторые исследователи [4, 7] указали на недостатки VaR как меры риска. А именно, VaR не является когерентной мерой риска (см. определение, например, в [7]), поскольку она не удовлетворяет свойству субаддитивности, за исключением случая нормального распределения X. Кроме того, VaR не обеспечивает оценку размера потерь, выходящих за пределы пороговой суммы, указанной в этой мере. Sp противоположна VaR в том смысле, что мера риска Sp указывает на значение вероятности падения капитала инвестора, но не на размер максимальных потерь при данном уровне доверия. Это делает Sp альтернативой VaR в решении проблемы поиска эффективных портфелей.

Теперь обратимся к нормальной модели распределения общей доходности. Как показано, например, в [16], $\mathrm{VaR}[\beta, X_a] = x_\beta^N \sigma(a) - \mu(a)$, где x_β^N — квантиль порядка β стандартного нормального распределения и дисперсия $Var\, X_a = \sigma^2(a) = aCa'$, a' — транспонированный вектор-строка a. В этом случае мера риска $\mathrm{VaR}[\beta, X]$ является не только когерентной, но и выпуклой: $\mathrm{VaR}[\beta, \rho X_1 + (1-\rho)X_2] \leq \rho \mathrm{VaR}[\beta, X_1] + (1-\rho)\mathrm{VaR}[\beta, X_2]$. Рассмотрим Sp меру

$$\mathrm{Sp}\,[\alpha, X_a] = \Phi\left(\frac{\alpha - \mu\,(a)}{\sigma\,(a)}\right),$$

где $\Phi\,(x)$ является функцией распределения стандартной нормальной величины. Можно видеть, что аргумент $\Phi(\cdot)$ совпадает с точностью до знака с отношением Шарпа $(\sum_1^n m_i a_i - \alpha)/\sqrt{aCa'}$, где α играет роль доходности "виртуального" безрискового актива. В этой связи покажем (см. предложение 1 ниже), что Sp имеет «обобщенное» свойство выпуклости на определенном множестве рисков.

Определение 2. Функция $f(x)$ на выпуклом множестве D называется сильно квазивыпуклой [18], *если для любых $x_1, x_2 \in D$ таких, что $x_1 \neq x_2$, неравенство $f(\rho x_1 + (1-\rho)x_2) < \max\{f(x_1), f(x_2)\}$ выполняется для любого $\rho \in (0, 1)$.*

Например, функция $-\phi(x)$, где $\phi(x)$ обозначает плотность стандартного нормального распределения, сильно квазивыпукла на $(-\infty, \infty)$, но не является выпуклой; функция $\max\{-\phi(x), -1/(2\sqrt{\pi})\}$ не является ни сильно квазивыпуклой, ни выпуклой.

Определим множество нормально распределенных случайных величин $D_\alpha = \{X : EX > \alpha\}$, в котором соотношение $X_1 \neq X_2$ понимается как $P\{X_1 \neq X_2\} > 0$.

Предложение 1. $\mathrm{Sp}[\alpha, X]$ *сильно квазивыпукла на* D_α.

Доказательство. Пусть риски X_1 и X_2 принадлежат D_α, $X_1 \neq X_2$. Обозначим $\mu_\rho = \rho EX_1 + (1-\rho)\, EX_2$ и $\sigma_\rho^2 = Var(\rho X_1 + (1-\rho)X_2)$. Вычислим производную

$$\frac{d}{d\rho}\Phi((\alpha-\mu_\rho)/\sigma_\rho) = \frac{\phi((\alpha-\mu_\rho)/\sigma_\rho)}{\sigma_\rho^3}\Big[(EX_2 - EX_1)\sigma^2\rho -$$

$$-(\alpha-\mu_\rho)\Big(\rho Var\, X_1 - (1-\rho)Var\, X_2 + (1-2\rho)cov(X_1, X_2)\Big],$$

где функция в квадратных скобках является возрастающей, поскольку ее производная $(\mu_\rho - \alpha)Var(X_1 - X_2)$ больше нуля. Возможны следующие случаи: во-первых, $\mathrm{Sp}[\alpha, \rho X_1 + (1-\rho)X_2]$ либо уменьшается, либо увеличивается на всей своей области определения $(0,1)$. Тогда, очевидно, что определение 2 выполнено для $\mathrm{Sp}[\alpha, X]$. Во-вторых, функция в квадратных скобках изменяет знак от минуса к плюсу в некоторой точке $\rho_0 \in (0,1)$. В этом случае $\mathrm{Sp}[\alpha, \rho X_1 + (1-\rho)X_2]$ уменьшается на интервале, лежащем слева от ρ_0, и увеличивается на интервале справа от ρ_0. По определению 2 $\mathrm{Sp}[\alpha, X]$ сильно квазивыпукла по X.

Замечание 2. Сравним предпочтения инвестора, индуцированные VaR, Sp и дисперсией портфеля. Так как $\mathrm{VaR}[\beta, X_a] = x_\beta^N \sigma(a) - \mu(a)$, то неравенство $\mathrm{VaR}(\beta, X_{a^1}) > \mathrm{VaR}(\beta, X_{a^2})$ эквивалентно

$$x_\beta^N \sigma\left(a^1\right) - \mu\left(a^1\right) > x_\beta^N \sigma\left(a^2\right) - \mu\left(a^2\right). \tag{1}$$

Для введенной меры риска $\mathrm{Sp}[\alpha, X_a] = \Phi((\alpha - \mu(a))/\sigma(a))$ соответствующее неравенство, $\Phi((\alpha - \mu(a^1))/\sigma(a^1)) > \Phi((\alpha - \mu(a^2))/\sigma(a^2))$, эквивалентно

$$\left(\alpha - \mu\left(a^1\right)\right)\sigma\left(a^2\right) > \left(\alpha - \mu\left(a^2\right)\right)\sigma\left(a^1\right). \tag{2}$$

Можно видеть, что соотношение (2) отличается от (1). Это означает, что предпочтения инвестора в отношении VaR отличаются от предпочтений Sp. Отметим, что предпочтения инвестора для другой меры риска, дисперсии портфеля $V\left[X_a\right] = \sigma^2\left(a\right)$ (см., например, [17]),

$$\sigma^2\left(a^1\right) > \sigma^2\left(a^2\right), \tag{3}$$

также отличаются от (2).

Вернемся к двухкритериальной задаче оптимизации, т.е. максимизации среднего значения портфеля и минимизации меры риска Sp. В рамках нормальной модели эта задача имеет вид

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\mu(a) \equiv \sum_{i=1}^{n} a_i m_i \to \max,\\
&\mathrm{Sp}[\alpha, X_a] \equiv \Phi\left(\frac{\alpha - \mu(a)}{\sigma(a)}\right) \to \min,\\
&a \in A = \left\{a \in R^n : \sum_{i=1}^{n} a_i = 1\right\}.
\end{aligned}
\right. \tag{4}
$$

Определение 3. *Портфель a^0 называется эффективным (Парето-оптимальным) портфелем в (4), если не существует портфеля a^1 такого, что $\mu(a^1) \geq \mu(a^0)$, $\mathrm{Sp}[\alpha, X_{a^1}] \leq \mathrm{Sp}[\alpha, X_{a^0}]$ и, по крайней мере, одно неравенство является строгим.*

Теперь исследуем проблему нахождения множества A^{Sp} всех эффективных портфелей в (4), т.е. в задаче «среднее-Sp». Следующая теорема содержит описание A^{Sp} как семейства портфелей, параметризованного с помощью M — параметра, имеющего смысл фиксированной величины среднего значения портфеля, $M = \mu(a)$. Далее нам понадобятся некоторые обозначения: $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ — скалярное произведение двух векторов-строк x и y, $\langle x, y\rangle_C = \langle x, yC^{-1}\rangle$, $||x||_C^2 = \langle x, xC^{-1}\rangle$, и $\Delta = ||\mathbf{1}||_C^2 ||m||_C^2 - \langle \mathbf{1}, m\rangle_C^2$.

Теорема 1. *Множество A^{Sp} не пусто тогда и только тогда, когда*

$$
\alpha < \frac{\langle \mathbf{1}, m\rangle_C}{||\mathbf{1}||_C^2}. \tag{5}
$$

Если (5) выполнено, то

$$
A^{\mathrm{Sp}} = \left\{ a(M) = \frac{1}{\Delta}\left[\mathbf{1}||m||_C^2 - m\langle \mathbf{1}, m\rangle_C + M\left(m||\mathbf{1}||_C^2 - \mathbf{1}\langle \mathbf{1}, m\rangle_C\right)\right] C^{-1} \right\}, \tag{6}
$$

где M пробегает полубесконечный интервал

$$
M \in \left[M^{\mathrm{Sp}}, \infty\right), \quad M^{\mathrm{Sp}} = \frac{\|m\|_C^2 - \alpha\langle 1, m\rangle_C}{\langle 1, m\rangle_C - \alpha||1||_C^2}. \tag{7}
$$

Доказательство теоремы 1 приведено в Приложении.

Ниже будет приведено сравнение этой теоремы с известными описаниями множеств A^V и A^{VaR} эффективных портфелей соответственно в задачах с критериями: среднее-дисперсия и среднее-VaR. Следующие два утверждения являются лишь вариациями результатов в [16, 19], где выражения для эффективных портфелей параметризованы средним значением $M = \mu(a)$.

Утверждение 3. Множество A^V не пусто. Оно определяется формулой (6), где M пробегает полубесконечный интервал

$$M \in \left[M^V, \infty\right), \quad \text{где} \;\; M^V = \frac{\langle 1,m\rangle_C}{||1||_C^2}. \tag{8}$$

Утверждение 4. Множество A^{VaR} не пусто тогда и только тогда, когда

$$\beta > \Phi\left(\sqrt{D/||1||_C^2}\right), \quad \text{где} \;\; D = ||m\|_C^2||1||_C^2 - \langle 1, m\rangle_C^2 > 0. \tag{9}$$

Если (9) выполнено, A^{VaR} определяется (6), с параметром M, пробегающим полубесконечный интервал

$$M \in \left[M^{\mathrm{VaR}}, \infty\right),$$

$$M^{\mathrm{VaR}} = \frac{\langle 1, m\rangle_C}{||1||_C^2} + \sqrt{\frac{D}{||1||_C^2}\left(\frac{\left(x_\beta^N\right)^2}{||1||_C^2\left(x_\beta^N\right)^2 - D} - \frac{1}{||1||_C^2}\right)}. \tag{10}$$

Тот факт, что в задачах с критериями: среднее-Sp, среднее-дисперсия и среднее-VaR эффективные портфели определяются одной и той же формулой (6), имеет следующее объяснение. Если портфель a^* эффективен в смысле любой из трех двухкритериальных задач выше, то a^* необходимо решает задачу

$$\begin{cases} \min \sigma^2(a), \\ \mu(a) = M, \\ a \in A = \left\{a \in R^n : \sum\limits_{i=1}^n a_i = 1\right\}, \end{cases} \tag{11}$$

где $M = \mu(a^*)$. Необходимость очевидно вытекает из определений

$$\mathrm{VaR}\,[\beta, X_a] = x_\beta^N \sigma(a) - \mu(a) \;\; \text{и} \;\; V[X_a] = \sigma^2(a).$$

В случае же $\mathrm{Sp}\,[\alpha, X_a] = \Phi\left(\frac{\alpha - \mu(a)}{\sigma(a)}\right)$, имеем $M = \mu\,(a) \geq M^{\mathrm{Sp}} > \alpha$, поскольку

$$\frac{\langle 1, m\rangle_C}{||1||_C^2} < \frac{\|m\|_C^2 - \alpha\langle 1, m\rangle_C}{\langle 1, m\rangle_C - \alpha||1||_C^2}. \tag{12}$$

Действительно, знаменатель $\langle 1, m\rangle_C - \alpha||1||_C^2 > 0$ в силу (5). По неравенству Коши–Буняковского $\|m\|_C^2||1||_C^2 - \alpha\langle 1, m\rangle_C||1||_C^2 > \langle 1, m\rangle_C^2 - \alpha\langle 1, m\rangle_C||1||_C^2$. Таким образом, эффективный портфель в задаче среднее-Sp должен минимизировать $\sigma(a)$ при ограничениях $\mu(a) = M$, $\sum_{i=1}^n a_i = 1$. Задача (11) была исследована, например, в [16], и ее решение приведено в (6).

П р е д л о ж е н и е 2. Множество A^{Sp} *эффективных портфелей в задаче среднее-*Sp *является подмножеством эффективных портфелей в задаче среднее-дисперсия, т.е.* $A^{\mathrm{Sp}} \subset A^{V}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сравнивая выражения для левых границ в (7) и (8), имеем

$$\frac{\|m\|_C^2 - \alpha\langle 1, m\rangle_C}{\langle 1, m\rangle_C - \alpha||1||_C^2} > \frac{\langle 1, m\rangle_C}{||1||_C^2}$$

(см. (12)). Таким образом, $M^{\mathrm{Sp}} > M^{V}$ и, следовательно, $A^{\mathrm{Sp}} \subset A^{V}$.

З а м е ч а н и е 3. Как известно [16], $A^{\mathrm{VaR}} \subset A^{V}$. Соотношение между множествами A^{Sp} и A^{VaR} не является столь простым, поскольку выполнение неравенства для левых границ в (7) и (10), т.е. $M^{\mathrm{Sp}} > (<) M^{\mathrm{VaR}}$, зависит от конкретных значений α и β. Тем не менее из [16, стр. 1169] следует, что множество эффективных портфелей задачи среднее-VaR сходится к эффективному множеству задачи среднее-дисперсия, когда $\beta \to 1 - 0$, т.е. левая граница M^{VaR} в (10) сходится к левой границе в (8), $M^{V} = \langle 1, m\rangle_C / ||1||_C^2$. Таким образом, $A^{\mathrm{Sp}} \subset A^{\mathrm{VaR}}$ для достаточно большого уровня доверия $\beta < 1$. Заметим также, что

$$M^{\mathrm{Sp}} = \frac{\|m\|_C^2 - \alpha\langle 1, m\rangle_C}{\langle 1, m\rangle_C - \alpha||1||_C^2} \to M^{V} = \frac{\langle 1, m\rangle_C}{||1||_C^2} \quad \text{при} \quad \alpha \to -\infty.$$

Следовательно, в этом предельном случае эффективные множества A^{Sp} и A^{V} совпадают.

Определим эффективную границу в задаче среднее-Sp как множество $\left\{(\mu(a), \mathrm{Sp}[\alpha, X_a]), a \in A^{\mathrm{Sp}}\right\} \subset R^2$ на плоскости (μ, Sp). В отличие от принятого во многих статьях обозначения [16, 17] здесь μ соответствует оси абсцисс, а Sp — оси ординат. Причина — более наглядное представление эффективной границы.

Следующее предложение показывает, что функция $\mathrm{Sp}(M) = \Phi\left(\frac{(\alpha - M)}{\sigma(a(M))}\right)$, соответствующая эффективной границе в задаче среднее-Sp на интервале (7), имеет более сложный вид, чем выпуклые функции [16, 17] $V(M) = \sigma^2(a(M))$ и $\mathrm{VaR}(M) = x_\beta^N \sigma(a(M)) - M$ в задачах соответственно среднее-дисперсия и среднее-VAR (см. рис. 1–3 ниже).

П р е д л о ж е н и е 3. Пусть (5) *выполнено. Тогда функция* $\mathrm{Sp}(M)$ *сильно квазивыпукла на* $(-\infty, \infty)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отметим, что

$$\sigma^2(a(M)) = \frac{M^2||1||_C^2 - 2M\langle 1, m\rangle_C + \|m\|_C^2}{\Delta^2},$$

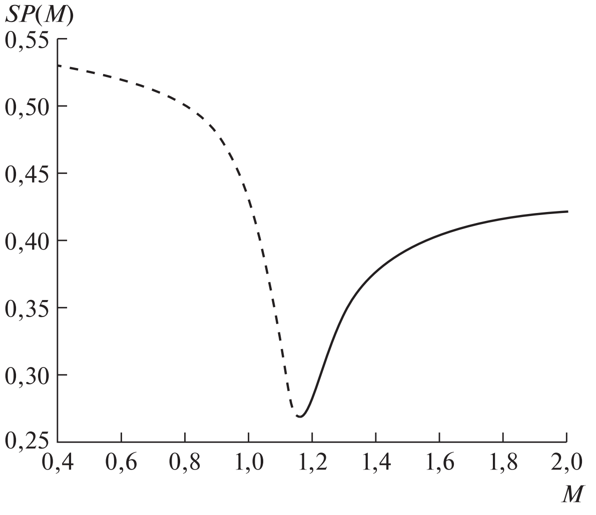

Рис. 1. Эффективная граница для задачи среднее-Sp — сплошная линия. Функция $\mathrm{Sp}(M)$, заданная на интервале [1,1588; ∞), отражает зависимость меры риска Sp от среднего значения доходности портфеля M при выборе эффективного портфеля для каждого M.

и вычислим производную

$$\frac{d}{dM}\Phi((\alpha - M)/\sigma(a(M))) =$$

$$= \frac{\phi((\alpha - M)/\sigma(a(M)))}{\Delta^2\sigma^3(a(M))}\left[-\Delta^2\sigma^2(a(M)) - (\alpha - M)\left(M\|1\|_C^2 - \langle 1, m\rangle_C\right)\right].$$

Функция в квадратных скобках равная (см. определения $a\,(M)$ и Δ^2 выше) $\psi(M) \overset{def}{=} M(\langle 1, m\rangle_C - \alpha||1||_C^2) - \|m\|_C^2 + \alpha\langle 1, m\rangle_C$ является возрастающей функцией, так как $\langle 1, m\rangle_C - \alpha||1||_C^2 > 0$ в силу (5). Таким образом, производная $\mathrm{Sp}(M)$ представлена как произведение $\gamma(M)\psi(M)$ с $\gamma(M) > 0$ и возрастающей функцией $\psi\,(M)$, которая меняет знак с минуса на плюс в точке $M^{\mathrm{Sp}} = (||m\|_C^2 - \alpha\langle 1, m\rangle_C)/(\langle 1, m\rangle_C - \alpha||1||_C^2)$. Тогда $\mathrm{Sp}(M)$ убывает до точки $M = M^{\mathrm{Sp}}$ и увеличивается на интервале вправо от M^{Sp}. По введенному выше определению 2 функция $\mathrm{Sp}(M)$ сильно квазивыпукла.

Проиллюстрируем предложение 3 на численном примере, который является модельным и не претендует на практическую значимость. Пусть количество активов $n = 2$, вектором средних доходностей будет $m = (1{,}1;\ 1{,}2)$, и матрица ковариации доходностей

$$C = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

Кроме того, пусть уровень доверия $\beta = 0{,}9$ и значение верхней границы для доходности $\alpha = 0{,}8$.

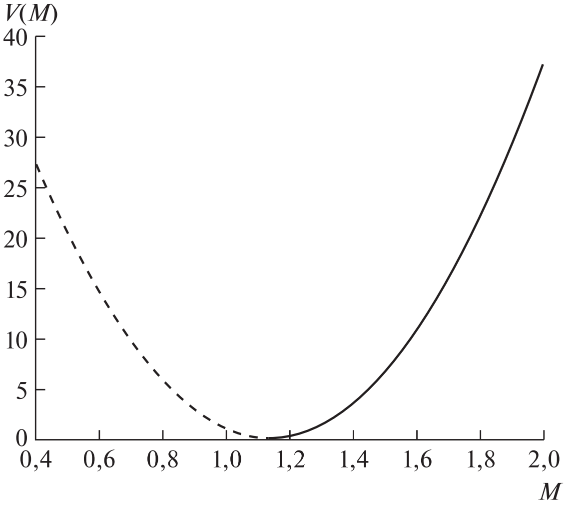

Рис. 2. Эффективная граница для задачи среднее-дисперсия — сплошная линия, $V(M)$ задана на интервале $[1{,}14; \infty)$.

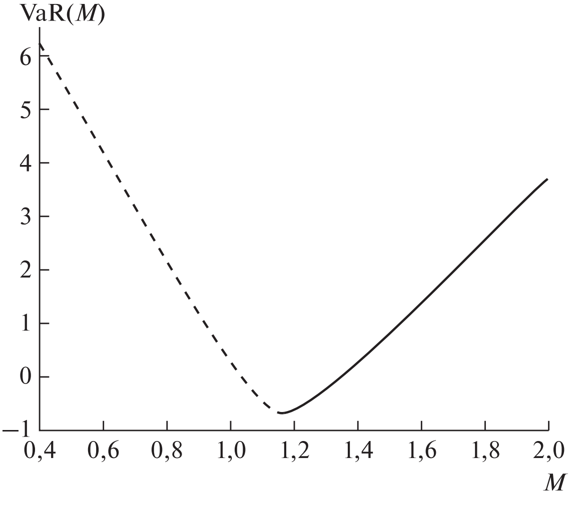

Рис. 3. Эффективная граница для задачи среднее-VaR — сплошная линия, $\mathrm{VaR}(M)$ задана на интервале $[1{,}1489; \infty)$.

Эффективные множества портфелей A^{Sp}, A^{V} и A^{VaR} не пусты, поскольку (см. (5), (9)) $\alpha = 0{,}8 < \langle 1, m\rangle_C / ||1||_C^2 = 1{,}1400$ и $\beta = 0{,}9 > \Phi\left(\sqrt{D/||1||_C^2}\right) = 0{,}5562$. Левые границы интервалов (7), (8) и (10) соответственно равны $M^{\mathrm{Sp}} = 1{,}1588$, $M^{V} = 1{,}1400$ и $M^{\mathrm{VaR}} = 1{,}1489$. Как можно видеть на рис. 1, функция $\mathrm{Sp}(M)$ является сильно квазивыпуклой, но не выпуклой, в отличие от выпуклых функций $V(M)$ и $\mathrm{VaR}(M)$, графики которых изображены на рис. 2–3.

3. Случай эллиптических распределений доходностей

В [13, 20] показано, что предположение о нормальности является достаточно адекватным для распределения доходности портфеля $X_a = \sum_{i=1}^{n} a_i R_i$, но для того, чтобы смоделировать распределение доходности с «тяжелым» хвостом [17], распространим полученные результаты на так называемые многомерные эллиптические распределения. Привлекательным свойством этого класса распределений является то, что любая линейная функция от эллиптически распределенных случайных величин имеет распределение того же вида. Рассмотрим произвольное эллиптическое распределение $F(x) = P(X \leq x)$ (нормальное распределение, распределение Лапласа, Бесселя, Exponential Power, Stable Laws [21]) со средним μ и дисперсией $\sigma^2 < \infty$. Так же, как в [17] определим $F_0(x) = F(\frac{x-\mu}{\sigma})$ — эллиптическое распределение с нулевым средним и единичной дисперсией. Тогда $\mathrm{Sp}[\alpha, X_a] = F_0((\alpha - \mu(a))/\sigma(a))$ и $\mathrm{VaR}[\beta, X_a] = z_\beta \sigma(a) - \mu(a)$, где z_β есть β-квантиль $F_0(x)$. Таким образом, теория, разработанная в разделе 2, остается в силе, за исключением того, что вместо квантиля x_β^N используется z_β и стандартное эллиптическое распределение $F_0(x)$ вместо стандартного нормального распределения $\Phi(x)$.

Например, распределение Лапласа [21] имеет два параметра: μ и $\lambda > 0$. Среднее и дисперсия равны соответственно μ и $2\lambda^2$. Обозначим через y_β квантиль распределения Лапласа с параметрами $\mu = 0$ и $\lambda = 1$. Поскольку это распределение имеет нулевое среднее и дисперсию *2*, получаем $z_\beta = y_\beta/\sqrt{2}$.

4. Выводы

В статье исследуется проблема построения множества всех эффективных портфелей в двухкритериальной задаче с максимизируемой средней доходностью портфеля и минимизируемой мерой риска Sp (short-fall probability), где Sp — вероятность того, что доходность портфеля упадет ниже установленного уровня. С использованием параметризации по среднему значению доходности найдена конструктивная характеристика набора эффективных портфелей в задаче среднее-Sp и показано, что данный набор — всегда подмножество набора эффективных портфелей в задаче среднее-дисперсия, а также подмножество набора эффективных портфелей для задачи среднее-VaR, когда уровень доверия достаточно велик. Для случая эллиптических распределений доходностей показано, что основные результаты, полученные в рамках нормальной модели, остаются в силе с небольшими изменениями, касающимися квантилей распределений доходности портфеля. Дальнейшие исследования по этой тематике могут включать в себя: изучение рынка с безрисковым активом и введенной мерой риска Sp; сравнение эффективных портфелей в задачах среднее-Sp и среднее-CVaR, где Conditional Value at Risk (CVaR) [22] — модификация VaR — является когерентной мерой риска; исследование модели, в которой присутствует фоновый (background) риск [17], коррелирующий с доходностями активов.

Доказательство теоремы 1. Поскольку $\Phi(x)$ является возрастающей функцией, необходимым условием эффективности фиксированного портфеля $a^* \in A^{\mathrm{Sp}}$ является то, что он оптимален в задаче

$$(\text{П}.1) \qquad \begin{cases} \min(\alpha - \mu(a))/\sigma(a), \\ \mu(a) = M, \\ a \in A = \left\{ a \in R^n : \sum\limits_{i=1}^{n} a_i = 1 \right\}, \end{cases}$$

где $M = \mu(a^*)$.

Предположим сначала, что $\alpha \geq M$. Если $\alpha = M$, то a^* не является эффективным, так как любой портфель $a^1 : \mu\left(a^1\right) > M$ доминирует над a^* в том смысле, что $(\alpha - \mu(a^1))/\sigma(a^1) < (\alpha - \mu(a^*))/\sigma(a^*) = 0$ и $\mu(a^1) > \mu(a^*)$. Если $\alpha > M$, то задача (П.1) сводится к максимизации $\sigma(a)$. Легко построить последовательность портфелей $\{a^m\}$ таких, что $\mu(a^m) = M$ и $\sigma(a^m) \to \infty$ при $m \to \infty$. Тогда для достаточно больших m имеем $\sigma(a^m) > \sigma(a^*)$ и, следовательно, a^m доминирует над a^*. Таким образом, показано, что условие $\alpha < M$ необходимо для эффективности a^*. При этом условии задача (П.1) сводится к следующей:

$$(\text{П}.2) \qquad \min \sigma^2\left(a\right), \quad \text{при ограничениях} \;\; \mu\left(a\right) = M, \quad \sum_{i=1}^{n} a_i = 1.$$

Задача (П.2) уже решена стандартным методом с использованием множителей Лагранжа (см., например, [14, 17]). Показано, что (П.2) имеет единственную оптимальную точку

$$(\text{П}.3) \quad a^*\left(= a\left(M\right)\right) = \frac{1}{\Delta}\Big[1||m\|_C^2 - m\langle 1, m\rangle_C + M(m||1||_C^2 - 1\langle 1, m\rangle_C)\Big]C^{-1}.$$

Исследуем интервалы монотонности функции $\mathrm{Sp}[\alpha, X_{a(M)}] = \Phi\left(\frac{\alpha - M}{\sigma(a(M))}\right)$. Принимая во внимание, что

$$\sigma^2(a(M)) = \langle a(M), a(M)C\rangle = \frac{M^2||1||_C^2 - 2M\langle 1, m\rangle_C + \|m\|_C^2}{\Delta^2},$$

найдем производную

$$\frac{d}{dM}\Phi\left(\frac{\alpha - M}{\sigma(a(M))}\right) =$$

$$= \frac{\phi((\alpha - M)/\sigma(a(M)))}{\Delta^2\sigma^3(a(M))}\Big[-\Delta^2\sigma^2(a(M)) - (\alpha - M)\left(M||1||_C^2 - \langle 1, m\rangle_C\right)\Big],$$

где $\phi(x) > 0$ обозначает плотность стандартного нормального распределения. Рассмотрим функцию в квадратных скобках

$$r(M) = M\left(\langle 1, m\rangle_C - \alpha||1||_C^2\right) - \|m\|_C^2 + \alpha\langle 1, m\rangle_C. \tag{П.4}$$

1) Пусть $\alpha \geq \alpha_0 = \langle 1, m\rangle_C/||1||_C^2$. Если $\alpha > \alpha_0$, то $r(M) < r(\alpha) = -\alpha^2||1||_C^2 - -\|m\|_C^2 + 2\alpha\langle 1, m\rangle_C$, поскольку $M > \alpha > 0$. Согласно неравенству Коши–Буняковского имеем $r(\alpha) < -(\alpha||1||_C - \|m\|_C)^2 \leq 0$. Если $\alpha = \alpha_0$, то $r(M) \equiv \equiv - \|m\|_C^2 + \alpha_0\langle 1, m\rangle_C < 0$.

2) Пусть $\alpha < \alpha_0$. Из (П.4) следует, что $r\,(M) > 0\ (= 0)$, если и только если

$$M > (=)\, M^{\mathrm{Sp}} = \frac{\|m\|_C^2 - \alpha\langle 1, m\rangle_C}{\langle 1, m\rangle_C - \alpha||1||_C^2}, \tag{П.5}$$

т.е. функция $\mathrm{Sp}[\alpha, X_{a(M)}]$ возрастает только на интервале $[M^{\mathrm{Sp}}, \infty)$. Подводя итог, имеем: i) условие $\alpha < \langle 1, m\rangle_C/||1||_C^2$ необходимо и достаточно для существования эффективного портфеля в задаче среднее-Sp, ii) набор эффективных портфелей в задаче среднее-Sp определяется как $A^{\mathrm{Sp}} = \{a(M), M \in [M^{\mathrm{Sp}}, \infty)\}$, выражения для $a(M)$ и M^{Sp} приведены в (П.3) и (П.5) соответственно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Markowitz H.* Portfolio Selection // J. Finance. 1952. V. 7. P. 77–91.
2. *Gaivoronski A., d Pflug G.* Value at Risk in Portfolio Optimization: Properties and Computational Approach // J. Risk. 2004. V. 7. No. 2. P. 1–31.
3. *Shiba N., Xu C., Wang J.* Multistage Portfolio Optimization with VaR as Risk Measure // Int. J. Innovat. Comput., Inform. Control. 2007. V. 3. No. 3. P. 709–724.
4. *Rockafellar R.T., Uryasev S.* Conditional value-at-risk for general loss distributions // J. Bank. Finance. 2002. V. 26. P. 1443–1471.
5. *Szego G.* Measure of Risk // Eur. Oper. Res. 2005. V. 163. P. 5–19.
6. *Rockafellar R.T., Uryasev S., Zabarankin M.* Generalized Deviations in Risk Analysis // Finance Stochast. 2006. V. 10. No. 1. P. 51–74.
7. *Artzner P., Delbaen F., Eber J.M., Heath D.* Coherent measures of risk // Math. Finance. 1999. No. 9. P. 203–228.
8. *Минасян В.Б.* Новые меры риска искажения высших моментов распределения потерь. Взаимосвязь с мерами катастрофических рисков // Управление финансовыми рисками. 2021. Т. 68. № 4. С. 302–323.
9. *Gardoni P., Murphy C.* Gauging the societal impacts of natural disasters using a capabilities-based approach // Disasters: Disaster Studies, Policy, Management. 2010. V. 34. No. 3. P. 619–636.
10. *Gardoni P., Murphy C.* Design, risk and capabilities. In Human Capabilities, Technology, and Design, J. van den Hoven and I. Oosterlaken (Eds.). N.Y.: Springer, 2012. P. 173–188.

11. *Rockafellar R.T., Royset J.O.* Risk Measures in Engineering Design under Uncertainty // International Conference on Applications of Statistics and Probability in Civil Engineering (ICASP). N.Y., USA, 2015. P. 1–9.
12. *Pinar M.C.* Static and Dynamic VaR Constrained Portfolios with Application to Delegated Portfolio Management // Optimization. 2013. V. 62. No. 11. P. 1419–1432.
13. *Duffie D., Pan J.* An Overview of Value at Risk // Derivat. 1997. V. 4. P. 7–49.
14. *Golubin A.Y.* Optimal Investment Policy in a Multi-stage Problem with Bankruptcy and Stage-by-stage Probability Constraints // Optimization. 2021. https://doi.org/10.1080/02331934.2021.1892674
15. *Кибзун А.И., Кан Ю.С.* Задачи стохастического программирования с вероятностными критериями. М.: Физматлит, 2009.
16. *Alexander G.J., Baptista A.M.* Economic Implications of Using a Mean-VaR Model for Portfolio Selection: A Comparison with Mean-variance Analysis // J. Econom. Dynam. Control. 2002. V. 26. P. 1159–1193.
17. *Guo X., Chan R.H., Wong W.K., Zhu L.* Mean-variance, Mean-VaR, and Mean-CVaR Models for Portfolio Selection with Background Risk // Risk Manag. 2019. V. 21. P. 73–98.
18. *Bazara M.S., Shetty C.M.* Nonlinear Programming: Theory and Algorithms, New York: Wiley, 1979.
19. *Merton R.C.* An analytic derivation of the efficient portfolio frontier // J. Finan. Quantit. Anal. 1972. No. 7. P. 1851–1872.
20. *Hull J.C., White A.* Value-at-risk when daily changes in market variables are not normally distributed // J. Derivat. 1998. No. 5. P. 9–19.
21. *Landsman Z., Valdez E.A.* Tail Conditional Expectations for Elliptical Distributions // North Amer. Actuarial J. 2003. V. 7. No. 4. P. 55–71.
22. *Alexander G.J., Baptista A.M.* A comparison of VaR and CVaR constraints on portfolio selection with the mean-variance model // Management Sci. 2004. V. 50. P. 1261–1273.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Ф.Т. Алескеровым.

Поступила в редакцию 21.04.2022

После доработки 05.07.2022

Принята к публикации 28.07.2022