

УДК 532.545

## О ЗАДАЧЕ РУСЛОВОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ЭНГЕЛУНДА–ФРЕДСО

© 2020 г. А. Г. Петров<sup>а</sup>, \*, И. И. Потапов<sup>б</sup>, \*\*

<sup>а</sup>Институт проблем механики РАН им. А.Ю. Ишлинского, просп. Вернадского, 101, корп. 1, Москва, 119526 Россия

<sup>б</sup>Вычислительный центр ДВО РАН, ул. Ким Ю Чена, 65, г. Хабаровск, 680000 Россия

\*E-mail: petrov@ipmnet.ru

\*\*E-mail: potapov2i@gmail.com

Поступила в редакцию 16.10.2019 г.

После доработки 29.02.2020 г.

Принята к публикации 01.04.2020 г.

Для замыкания задачи русловой устойчивости Энгелунда–Фредсо в работе определено условие, позволившее определить значение фазового сдвига между расходом влекомых наносов и максимумом придонных касательных напряжений, возникающих в турбулентном гидродинамическом потоке при обтекании им пологих периодических донных волн малой крутизны. Выполнен анализ зависимости фазового сдвига для донных волн малой крутизны от геометрических и физико-механических параметров задачи. Для распределения касательных напряжений на донной поверхности, установлена закономерность, связывающая длину донных волн с глубиной потока. Данная закономерность обобщает ряд полученных ранее феноменологических моделей и согласуется с известными экспериментальными данными.

**Ключевые слова:** обтекание периодических волн, придонные напряжения, донная устойчивость

**DOI:** 10.31857/S0002351520040082

### ВВЕДЕНИЕ

Развитие донной неустойчивости (донных волн) приводит к изменению гидравлического сопротивления потоков двигающихся по дну. Развитие донной неустойчивости необходимо уметь моделировать для решения большого спектра прикладных задач. Анализу причин возникновения и развития донной неустойчивости посвящено большое количество экспериментальных [1–3] и теоретических работ, обзор которых можно найти в работах [4–7]. Большинство из них посвящены исследованию причин, влияющих на развитие донной неустойчивости. Не претендуя на полноту укажем работы, в которых исследователи развитие донной неустойчивости связывают с характером турбулентного течения и его характеристиками: пульсациями скорости турбулентного потока (Великанов М.А. [8], Михайлова Н.А. [9], Россинский К.И. [10]), образованию в придонной области турбулентного потока микро- (Шуляк Б.А. [11]), или макро вихрей (Повало-Швейковский Н.Т. [12], Гришанин К.В. [13]) или со всем спектром турбулентных вихрей (Снищенко Б.Ф. [14]). Ряд исследователей связывают процесс образования донных форм со стратификацией водогрунтовой смеси [11, 15] и градиентами придонного давления [7, 16]. Рассмотренные подходы позволили сформулировать феноменологические модели развития донной неустойчивости, связывающие основные характеристики потока, с осредненными параметрами

возникающих донных волн. Однако, предложенные модели полезные в инженерных приложениях не позволяют ответить на вопрос о причинах возникновения и развития донной неустойчивости. Основным недостатком данных моделей является отсутствие четкого критерия для развития донной неустойчивости.

Кеннеди Дж.Ф. [5] предложил теорию линейной устойчивости донных волн. Используя теорию Бенжамина Т.Б. [17] об определении сдвиговых напряжений в пограничном слое, он ввел в свою модель критерий фазового сдвига – функцию отставания между максимумами расхода влекомых наносов и средней скоростью гидродинамического потока. В дальнейшем этот критерий нашел широкое применение [7, 13] при анализе различных задач донной неустойчивости. Однако, окончательно важность данного критерия установлена Энгелундой Ф., Фредсо Ж. [18], которые показали, что донные волны будут развиваться только при отрицательных значениях фазового сдвига для придонных напряжений. Однако, не смотря важность данного заключения, практического использования результаты Энгелунды и Фредсо не получили по причине отсутствия методов вычисления фазового сдвига.

В данной работе, выполнено замыкание задачи Энгелунды и Фредсо для турбулентных потоков, обтекающих пологие периодические длинные волны малой амплитуды. Для частного случая –

периодических синусоидальных волн получена зависимость для вычисления функции сдвига от гидродинамических и геометрических параметров задачи, а также от параметров зернистой и волновой шероховатости русла.

Выполнен анализ распределения фазового сдвига для донных волн малой амплитуды и крутизны от геометрических и физико-механических параметров задачи указывающий на наличие зависимостей между длиной донных волн и глубиной потока. Полученные теоретически результаты обобщают ряд известных феноменологических результатов и согласуются с известными экспериментальными данными.

**1. Возникновение и развитие донной неустойчивости.** Рассмотрим задачу Энгелунда Ф., Фредсо Ж. [18], определяющую фазовый сдвиг, как основной критерий развития донной неустойчивости. Для определения эволюции периодической донной поверхности используем уравнение Экснера, записанное в удобном для анализа виде

$$(1 - \epsilon) \rho_s \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{1}{L} \frac{\partial q}{\partial \xi} = 0, \quad 0 \leq \xi \leq 1, \quad (1)$$

где  $\zeta$  – возмущенная донная поверхность,  $\rho_s, \epsilon$  – плотность и пористость донного материала соответственно,  $x = \xi L$  – размерная пространственная координата,  $\xi$  – безразмерная пространственная координата,  $L$  – длина периода донной волны,  $t$  – время,  $q$  – расход донного материала.

Подставив в уравнение Экснера малые возмущения для донной поверхности  $\zeta$  и расхода донного материала  $q$

$$\begin{aligned} \zeta &= \zeta_0 \exp(\sigma t + iX\xi), \\ q &= q_0 \exp(\sigma t + iX(\xi + \xi_*)), \end{aligned} \quad (2)$$

получим выражение для частоты возмущенной донной волны

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{q_0 iX \exp(iX\xi_*)}{\zeta_0 L (1 - \epsilon) \rho_s} = \\ &= \frac{q_0 iX}{\zeta_0 L (1 - \epsilon) \rho_s} (\cos(X\xi_*) - i \sin(X\xi_*)), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\sigma$  – частота возмущенной донной волны,  $X = kL$  – безразмерное волновое число,  $k = \frac{2\pi}{L}$  – волновое число,  $\zeta_0$  – амплитуда донной волны,  $q_0$  – амплитуда возмущения расхода донного материала,  $\xi_*$  – сдвиг фаз между возмущением расхода наносов и возмущением донной поверхности.

Анализируя вид условия развития донной неустойчивости  $\sigma_R > 0$ , где  $\sigma_R = \text{Re}(\sigma)$  – действительная часть частоты волны

$$\begin{aligned} \sigma_R &= -q_* X \sin X\xi_*, \\ q_* &= \frac{q_0}{\zeta_0 L (1 - \epsilon) \rho_s} = \text{const}, \end{aligned} \quad (4)$$

Энгелунд и Фредсо пришли к важному выводу: развитие донных волн может происходить только при существовании ненулевого отрицательного фазового сдвига  $\xi_* < 0$ , для расхода  $q$  относительно донной поверхности  $\zeta$ .

Отметим, что большинство расчетных формул, определяющих расход наносов  $q$ , являются однозначными монотонными функциями придонных напряжений  $\tau$ . Следовательно, фазовый сдвиг  $\xi_*$  для расхода наносов  $q$  относительно донной поверхности  $\zeta$  должен совпадать с фазовым сдвигом у придонных касательных напряжений  $\tau(\xi)$ . Поэтому информацию о фазовом сдвиге  $\xi_*$  для расхода наносов  $q$  можно получить, исследуя распределение придонных касательных напряжений над периодической донной поверхностью.

**2. Определение функции сдвига.** Касательное придонное напряжение  $\tau(\xi)$  на периодической донной поверхности  $\zeta(\xi)$  определяется согласно работе [7, 19] по формулам

$$\tau(\xi) = \tau_0 / y(\xi), \quad 0 \leq \xi \leq 1. \quad (5)$$

$$\begin{aligned} y(\xi) &= E \int_0^1 \exp(2\xi') \times \\ &\times \exp\left(\frac{6h}{\mu_0} (\Psi(a\xi) - \Psi(a(\xi' + \xi)))\right) d\xi', \end{aligned} \quad (6)$$

$$0 \leq \xi, \xi' \leq 1,$$

где  $\tau_0$  – придонное касательное напряжение на ровном дне,

$$E = a \frac{2 \exp(-2a)}{1 - \exp(-2a)}, \quad a = \frac{L}{H}, \quad h = \frac{H_0}{H},$$

$$b = \frac{h}{\mu_0}, \quad \Psi(\xi) = \left. \frac{\partial \Psi(\xi, z)}{\partial z} \right|_{z=0},$$

$H_0$  – высота донных волн,  $H$  – высота слоя вытеснения (глубина потока),  $\Psi(\xi, z)$  – функция тока безвихревого поля скорости над периодическим дном,  $\mu_0 = 1/\ln(H/Z_0) \ll 1$  – параметр зернистой шероховатости дна,  $Z_0$  – зернистая шероховатость дна,  $z$  – координата, направленная от дна к свободной поверхности потока.

В частном случае (2), функция дна  $\zeta$  имеет вид

$$\begin{aligned} \zeta &= \zeta_0 \exp(\sigma t + iX\xi) = \\ &= \zeta_0 \exp(\sigma t) (\cos(X\xi) + i \sin(X\xi)), \end{aligned}$$

действительная часть  $\zeta_R = \text{Re}(\zeta)$  определяет форму дна

$$\zeta_R = H_0 \cos(X\xi) \quad (7)$$

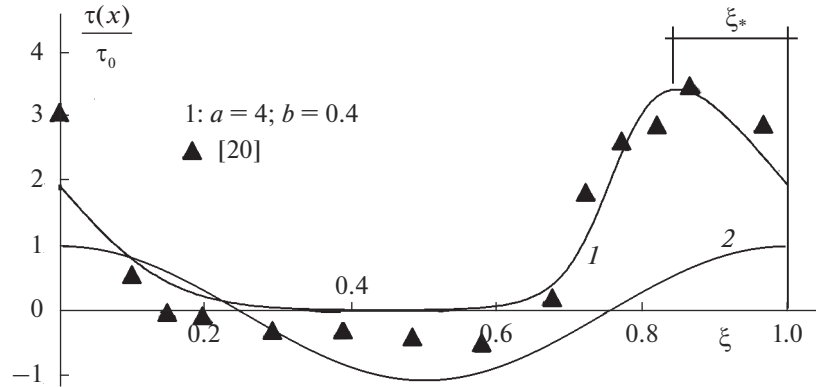


Рис. 1. Сравнение аналитического решения (5), (9) (кривая 1) и экспериментальных данных [20], безразмерная форма дна (кривая 2).

и его амплитуду

$$H_0 = \zeta_0 \exp(\sigma t). \tag{8}$$

С учетом (7) функции  $\Psi(\xi, z)$  и  $\psi(\xi)$  согласно [19] можно определить как

$$\Psi(\xi, z) = \cos(2\pi\xi) \exp\left(-\frac{2\pi z}{a}\right),$$

$$\psi(\xi) = \left. \frac{\partial \Psi(\xi, z)}{\partial z} \right|_{z=0} = -\frac{2\pi}{a} \cos(2\pi\xi).$$

Подставляя найденное выражение  $\psi(\xi)$  в уравнение (6), получим  $y$  как функцию пространственной координаты  $0 \leq \xi \leq 1$  и параметров  $a$  и  $b$

$$y(\xi, a, b) = E(a) \int_0^1 \exp(2at') \times \exp\left(12\pi \frac{b}{a} (\cos(2\pi(\xi + t')) - \cos(2\pi\xi))\right) dt'. \tag{9}$$

Отметим, что величина  $\frac{b}{a} = \frac{H_0}{L\mu_0}$  характеризует отношение крутизны донной волны к параметру ее зернистой шероховатости.

Подставляя функцию (9) в уравнение (5), получим распределение сдвиговых напряжений  $\tau(\xi, a, b) = \tau_0/y(\xi, a, b)$  на донной поверхности. Для волн малой крутизны  $\frac{H_0}{L} \ll 1$  теоретическая зависимость  $\tau(\xi, a, b)$  достаточно хорошо согласу-

ется с экспериментами в окрестности вершины донной волны [20] (см. рис. 1). Координата фазового сдвига  $\xi_*$  соответствует максимальной величине касательного напряжения  $\tau(\xi_*, a, b)/\tau_0$  (см. рис. 1).

Из условия экстремума

$$\frac{d\tau(\xi_*, a, b)}{d\xi} = 0 \Leftrightarrow \frac{dy(\xi_*, a, b)}{d\xi} = 0. \tag{10}$$

с помощью (9) определим функцию  $\xi_* = \xi_*(a, b)$ .

Из решения уравнения (10) при фиксированном параметре  $a$  можно получить зависимости распределения сдвига  $\xi_* = \xi_*(a, b)$  как функции от параметра  $b$ . Зависимости сдвига  $\xi_* = \xi_*(a, b)$ , полученные из условия (10) как функции от параметра  $b$  при различных значениях параметра  $a$   $0.5 \leq a \leq 10$  представлены на рис. 2 кривыми (1–10).

Из графиков  $\xi_* = \xi_*(a, b)$  видно, что для каждого фиксированного значения параметра  $a$  функция  $\xi_*(a, b)$  имеет только один минимум  $\xi_{*min}(a) = \min_b \xi_*(a, b)$ . Следовательно, можно найти однозначную зависимость между параметрами  $b$  и  $a$ , при которых функция сдвига будет принимать минимальное значение  $\min_b \xi_*(a, b)$ . Данная зависимость, позволяющая выполнить замыкание задачи Энгелунда–Фредсо представлена ниже в табличном виде. В табл. 1 приведены значения

Таблица 1

$a$	$b$	$\min_b \xi_*(a, b)$	$a$	$b$	$\min_b \xi_*(a, b)$
0.5	0.016	-0.016	6.0	0.518	-0.203
1.0	0.033	-0.056	7.0	0.755	-0.213
2.0	0.064	-0.104	8.0	1.064	-0.220
3.0	0.139	-0.141	9.0	1.252	-0.226
4.0	0.237	-0.168	10.0	1.6	-0.230
5.0	0.351	-0.188			

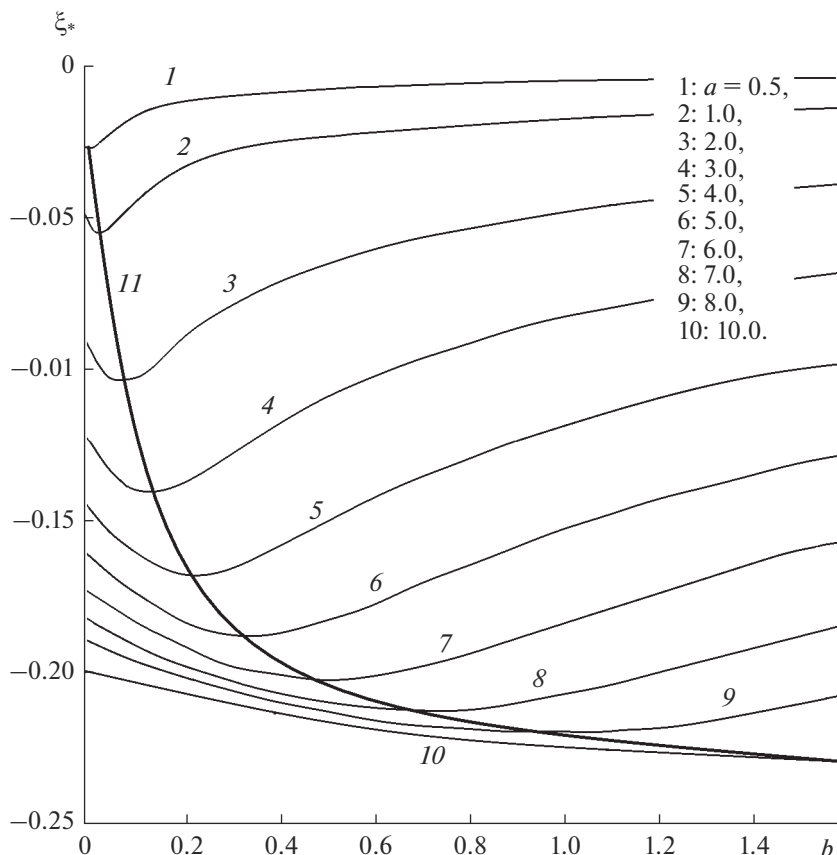


Рис. 2. Зависимость величины сдвига  $\xi_*$  от параметра относительной шероховатости дна  $b$  при различных значениях их относительной крутизны  $a$ .

точек минимума  $\min_b \xi_*(a, b)$ , найденные с помощью графиков 1–10 (рис. 2).

Используя метод наименьших квадратов для обработки табличных данных, получим аналитическую форму зависимость между параметрами  $a$  и  $b$  (рис. 2, кривая 11)

$$a \approx 8\sqrt{b}. \tag{11}$$

**3. Анализ.** Из зависимости (11) следует, что для каждого набора  $a$  и  $b$  существует минимальное отрицательное значение функции сдвига  $\xi_*$ , при котором в линейных моделях донной устойчивости донные волны будут расти максимально быстро. Преобразуя зависимость (11) к размерному виду, получим формулу

$$L \approx 8\sqrt{b}H, \tag{12}$$

связывающую длину волны максимально быстро растущих донных волн  $L$  с глубиной  $H$ . Данная формула хорошо согласуется с известными экспериментальными данными, например зависимостью Снищенко Б.Ф. [21], полученной им с коэффициентом корреляции 0.85 на основе более чем 500 экспериментальных точек

$$L \approx 4.3H, \tag{13}$$

или формулой Клавена А.Б.–Копалиани З.Д. [22]

$$L \approx 5H. \tag{14}$$

Обе феноменологические формулы (13), (14) согласуются с теоретической формулой (12) в области изменения параметра  $0.3 \leq b \leq 0.4$ , которая соответствует экспериментам [21, 22]. Зависимость напряжения  $\tau(\xi, a, b)$ , приведенная на рис. 1, согласуется с экспериментальными данными [14] и с формулой (14) при значении  $b = 0.4$ , принадлежащем указанной области параметров.

**Заключение.** Для периодических донных волн малой амплитуды и крутизны предложена математическая модель, позволяющая найти аналитическую зависимость для функции сдвига  $\xi_*$  и замкнуть задачу русловой устойчивости Энгелунда–Фредсо.

В частном случае для синусоидального периодического дна показано, что экстремальное значение  $\min_b \xi_*(a, b)$  получаемой функция сдвига  $\xi_*$  отражает зависимость между длиной развивающейся донной волны  $L$  и глубиной слоя вытеснения  $H$ . Данная зависимость качественно и количественно согласуется с известными феноменологическими формулами Клавена А.Б. и Копалиани З.Д.

Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ № 18-05-00530 А.

Работа выполнена в рамках госзадания (№ государственной регистрации АААА-А20-120011690138-6).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Fromant G., Hurther D., J. van der Zanden, D.A. van der Cáceres A, I., O'Donoghue T., Ribberink J.S.* Wave boundary layer hydrodynamics and sheet flow properties under large-scale plunging-type breaking waves // *J. Geophysical Res.: Oceans*, 2018. V. 124. P. 75–98.
2. *Van M., Armelle J., Sophie Le Bot, Yann F., Francois M.* Bedload transport and bedforms migration under sand supply limitation // *Environmental Fluid Mechanics*. 2020. 22 p.
3. *Mieras R.S., Puleo J.A., Anderson D., Hsu T.-J., Cox D.T., Calantoni J.* Relative contributions of bed load and suspended load to sediment transport under skewed asymmetric waves on a sandbar crest // *J. Geophysical Res. Ocean*: 2019. V. 124. P. 1294–1321.
4. *Di Cristo C., Iervolino M., Vacca A.* Linear stability analysis of a 1-D model with dynamical description of bed load transport // *J. Hydraulic Res.* 2006. V. 44. P. 480–487.
5. *Kennedy J.F.* The mechanics of dunes and antidunes in erodible-bed channels // *J. Fluid Mech.* 1963. V. 16. № 4. P. 521–544.
6. *Гришанин К.В.* Устойчивость русел рек и каналов. Л.: Гидрометеиздат, 1974. 144 с.
7. *Петров А.Г., Потапов И.И.* Избранные разделы русловой динамики. М: ЛЕНАНД, 2019. 244 с.
8. *Великанов М.А.* Динамика русловых потоков. Л.: Гидрометеиздат. 1949. 475 с.
9. *Михайлова Н.А.* О механизме образования и движения песчаных волн // *Изв. АН СССР. Серия геофиз.* 1952. № 1. С. 53–58.
10. *Россинский К.И., Дебольский В.К.* Речные наносы. М.: Наука, 1980. 214 с.
11. *Шуляк Б.А.* Физика волн на поверхности сыпучей среды и жидкости. М.: Наука, 1971. 299 с.
12. *Повало-Швейковский Н.Т.* Статистические методы в теории турбулентности: монография / Н.Т. Повало-Швейковский. М; Л: Изд-во Акад. наук СССР, 1938. 102 с.
13. *Гришанин К.В.* Динамика русловых потоков. Л.: Гидрометеиздат, 1979. 311 с.
14. *Снищенко Б.Ф.* О связи высоты песчаных гряд с параметрами речного потока и русла // *Метеорология и гидрология*. 1980. № 6. С. 84–90.
15. *Koller D., Manica R., Borges A., Fedele J.* Experimental bedforms by saline density currents // *Braz. J. Geol.*, 2019. V. 42. № 2. P. 1–10.
16. *Kima Y., Mieras R. S., Cheng Z., Anderson D., Hsua T.-J., Puleo J. A., Cox D.* A numerical study of sheet flow driven by velocity and acceleration skewed near breaking waves on a sandbar using SedWaveFoam // *Coastal Engineering*. 2019. V. 152. P. 1–18.
17. *Benjamin T. B.* Shearing flow over a wavy boundary // *J. Fluid Mech.* 1959. № 6. P. 161–205.
18. *Engelund F., Fredsoe J.* Sediment ripples and dunes // *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 1982. V. 14. P. 13–37.
19. *Петров А.Г., Потапов И.И.* Моделирование обтекания турбулентным потоком периодической донной поверхности // *Физика атмосферы и океана*. 2017. Т. 53. № 3. С. 415–421.
20. *Buckles J., Hanratty T.J., Adrian R.J.* Turbulent flow over large-amplitude wavy surfaces // *J. Fluid Mech.* 1984. V. 140. P. 27–44.
21. *Снищенко Б.Ф.* К расчету длины песчаных гряд в открытых потоках // *Метеорология и гидрология*. 1980. № 2. С. 89–96.
22. *Клаузен А.Б., Копалиани З.Д.* О связи длины гряд с продольным размером крупномасштабных элементов турбулентности // *Тр. ГГИ*. 1974. Вып. 219. С. 19–24.

## About the Problem of River Bed Stability Engelunda–Fredso

A. G. Petrov<sup>1,\*</sup> and I. I. Potapov<sup>2,\*\*</sup>

<sup>1</sup>*Institute of Mechanics Problems, Russian Academy of Sciences A. Yu. Ishlinsky, ave. Vernadsky, 101, bldg. one, Moscow, 119526 Russia*

<sup>2</sup>*Computing center FEB RAS, st. Kim Yu Chen, 65, Khabarovsk, 680000 Russia*

\**e-mail: petrov@ipmnet.ru*

\*\**e-mail: potapov2i@gmail.com*

In order to close the Engelund–Fredso channel stability problem, the condition is defined in the paper, which made it possible to determine the value of the phase shift between the flow rate of sediment load and the maximum of the bottom tangential stresses arising in a turbulent hydrodynamic flow when it flows around gentle shallow periodic waves of low steepness. The analysis of the dependence of the phase shift for bottom waves of small steepness on the geometric and physico-mechanical parameters of the problem. For the distribution of shear stresses on the bottom surface, a regularity is established that relates the length of bottom waves to the depth of flow. This pattern generalizes a number of previously obtained phenomenological models and is consistent with known experimental data.

**Keywords:** flow around periodic waves, bottom stresses, bottom stability