ФИЗИКА МЕТАЛЛОВ И МЕТАЛЛОВЕДЕНИЕ, 2022, том 123, № 2, с. 200–206

ПРОЧНОСТЬ И ПЛАСТИЧНОСТЬ

УДК 539.374.1

ОБОБЩЕННЫЙ КРИТЕРИЙ МИЗЕСА КАК ИНСТРУМЕНТ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОЧНОСТНЫХ СВОЙСТВ ГЕКСАГОНАЛЬНЫХ МАТЕРИАЛОВ

© 2022 г. А. Г. Кесарев[a], А. М. Власова[a, b, *]

[a] *Институт физики металлов УрО РАН, ул. С. Ковалевской, 18, Екатеринбург, 620108 Россия*

[b] *Уральский федеральный университет им. Б.Н. Ельцина, ул. Мира, 19, Екатеринбург, 620002 Россия*

**e-mail: alisa@imp.uran.ru*

Поступила в редакцию 17.05.2021 г.
После доработки 29.09.2021 г.
Принята к публикации 07.10.2021 г.

С использованием предложенного ранее обобщения критерия текучести Мизеса на кристаллы с гексагональной решеткой найдена зависимость тензора напряжений от тензора деформаций и приложенного внешнего давления. Подробно рассмотрен случай плоской деформации при произвольной ориентации кристаллитов. Рассчитаны компоненты девиатора тензора напряжений для монокристаллов магния любых ориентировок и построены линии уровня напряжений для начала пластического течения.

Ключевые слова: магний, деформация, гексагональные кристаллы, прочность, критерий текучести

DOI: 10.31857/S0015323022020048

ВВЕДЕНИЕ

Описание деформационного поведения металлов с гексагональной плотноупакованной решеткой (ГПУ) представляет серьезные трудности из-за большого количества деформационных мод. В наших предыдущих работах [1, 2] для описания деформационного поведения монокристалла с ГПУ-решеткой предложен феноменологический критерий, являющийся обобщением известного критерия Мизеса.

По имеющимся в литературе экспериментальным данным по различным схемам деформирования монокристаллического магния при комнатной температуре сделана подгонка коэффициентов. Для перехода к модели поликристалла требуется подходящая процедура усреднения. Известно, что простейшие способы усреднения, дающие “вилку”: верхнюю и нижнюю границу эффективных свойств для механических или электрических свойств композитов, – это усреднения по Рейсу и Фойгту [3]. Применительно к нашему случаю, первый способ означает предположение, что все зерна испытывают одинаковые напряжения, а второй – одни и те же деформации. При пластической деформации усреднение по Рейсу невозможно, так как в рамках жесткопластической модели без упрочнения одни и те же напряжения при одной ориентировке зерна вообще не вызовут никаких деформаций, а при других окажутся просто не достижимыми. Усреднение по Фойгту применительно к жесткопластической модели использовали Тейлор, а также Бишоп и Хилл [4]. Его использование требует решения задачи о нахождении тензора напряжений по известному тензору деформации и приложенному гидростатическому давлению. Эта задача представляет большой практический интерес, решение ее в общем виде – цель данной работы.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОДИКА РАСЧЕТА

Зададим в лабораторной системе координат тензор скоростей деформации E_{ij} (Большими буквами обозначаем величины в лабораторной системе координат, маленькими – в кристаллографической, ось x_3 направлена вдоль нормали к базисной плоскости). Согласно теории пластичности, критерием текучести будет являться обращение в нуль некоторой функции текучести $f(p_{ij})$ [5]. Функция текучести, предложенная нами в предыдущей работе, является естественным обобщением известного критерия Мизеса с учетом анизотропии и симметрии гексагональной решетки:

$$f(p_{ij}) = a + kI_2 + I_1 + \alpha(I_2)^2 + \beta I_3, \qquad (1)$$

где инварианты тензора упругих напряжений относительно группы симметрии ГПУ-решетки:

$$I_1 = (p_{13})^2 + (p_{23})^2; \tag{2а}$$

$$I_2 = p_{33} - (p_{11} + p_{22})/2; \tag{2б}$$

$$I_3 = (p_{11} - p_{22})^2 + 4(p_{12})^2, \tag{2в}$$

a, k, α, β – коэффициенты модели.

Ассоциированный закон, связывающий тензор напряжений P_{ij} с тензором скоростей деформаций, имеет вид [5]:

$$E_{ij} = \dot{\Lambda}(t)\frac{\partial f}{\partial P^{ij}}, \tag{3}$$

где $\dot{\Lambda}(t)$ – произвольная функция времени.

Заметим, что критерий (1)–(2) обладает цилиндрической симметрией, следовательно, для задания ориентировки зерна достаточно знать единичный вектор нормали к базисной плоскости $\vec{n}$. В используемой прямоугольной системе координат верхние и нижние индексы не различимы (наличие двух повторяющихся латинских индексов означает суммирование по ним).

Выразим инварианты (2) через компоненты тензора напряжений и вектора нормали к базисной плоскости. Инвариант I_1 равен разности квадрата модуля вектора напряжений, действующего на базисную плоскость, и нормальной компоненты этого напряжения:

$$I_1 = P_{ij}n_jP_{ik}n_k - (P_{ij}n_in_j)^2. \tag{4}$$

Инвариант I_2 имеет вид:

$$I_2 = \frac{3p_{33} - (p_{11} + p_{22} + p_{33})}{2} = \frac{1}{2}(3P_{ij}n_jn_i - P_{ii}). \tag{5}$$

Инвариант I_3 – это максимальная разность растягивающих напряжений, действующих вдоль базисной плоскости. Эти напряжения могут быть найдены, как экстремумы функции $P_{ij}\tau_i\tau_j$, где $\vec{\tau}$ – единичный вектор, перпендикулярный $\vec{n}$, что можно записать в виде ограничений $\tau_in_i = 0$, $\tau_i\tau_i - 1 = 0$. Задача поиска таких экстремумов, как известно, сводится к задаче о поиске экстремумов (без ограничений), для функции

$$P_{ij}\tau_i\tau_j + \eta(\tau_i\tau_i - 1) + \mu(\tau_in_i), \tag{6}$$

которые достигаются на векторах $\vec{\tau}$, удовлетворяющих уравнениям:

$$2P_{ij}\tau_j + 2\eta\tau_i + \mu n_i = 0, \quad (i = 1,2,3). \tag{7}$$

η, μ – неизвестные параметры в методе множителей Лагранжа поиска условного экстремума.

Для решения системы уравнений (7) введем оператор проектирования на базисную плоскость:

$$\Pi_{ij}x_j = \delta_{ij}x_j - n_in_jx_j, \tag{8}$$

δ_{ij} – символ Кронекера.

Подействовав оператором Π на уравнение (7), получим:

$$\begin{aligned} &2\Pi_{ik}P_{kj}\tau_j + 2\eta\Pi_{ik}\tau_k + \mu\Pi_{ik}n_k = \\ &= 2\Pi_{ik}P_{kj}\tau_j + 2\eta\Pi_{ik}\tau_k = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Так как по определению $\Pi(\vec{n}) = 0$ и $\Pi(\vec{\tau}) = \vec{\tau}$, то выражение (9) в виде задачи на собственные значения и векторы для оператора $A = \Pi P$ представимо в виде:

$$A_{ij}\tau_j + \eta\tau_k = 0, \tag{10}$$

A – симметрический вырожденный оператор, значит его характеристический полином имеет вид [6]:

$$-(\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)\lambda = -\lambda^3 + \mathrm{I}_A\lambda^2 - \mathrm{II}_A\lambda + \mathrm{III}_A, \tag{11}$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – собственные значения оператора А, λ – произвольная переменная,

$$\mathrm{I}_A = a_{11} + a_{22} + a_{33} = \lambda_1 + \lambda_2 = trA, \tag{12}$$

$$\begin{gathered} \mathrm{II}_A = \frac{1}{2}\left[(trA)^2 - trA^2\right] = a_{ii}a_{jj} - a_{ij}a_{ji} = \lambda_1\lambda_2, \\ \mathrm{III}_A = \det A, \quad A = (a_{ij}), \end{gathered} \tag{13}$$

где $trA = a_{ii}$ – шпур матрицы. Тогда, из (2в), (12), (13) и определения оператора A:

$$\begin{aligned} I_3 = (\lambda_1 - \lambda_2)^2 = 2(P_{il} - n_in_kP_{kl})\times \\ \times(P_{li} - n_ln_sP_{si}) - (P_{ii} - n_in_sP_{si})^2. \end{aligned} \tag{14}$$

Теперь, используя выражения для инвариантов (4), (5) и (14), запишем критерий текучести (1) через компоненты тензора напряжений в лабораторной системе координат при произвольной ориентировке кристалла:

$$\begin{gathered} f(P_{ij}) = a + k\frac{3P_{ij}n_in_j - P_{ii}}{2} + P_{ij}P_{ik}n_jn_k - \\ - (P_{ij}n_in_j)^2 + \frac{\alpha}{4}(3P_{ij}n_in_j - P_{ii})^2 + \beta\times \\ \times 2\left[(P_{il} - n_in_kP_{kl})(P_{li} - n_ln_sP_{si}) - (P_{ii} - n_in_sP_{si})^2\right], \\ (i = 1,2,3). \end{gathered} \tag{15}$$

Выражение (15) позволяет, с использованием ассоциированного закона (3), установить связь между компонентами тензоров напряжений и скоростей деформации в лабораторной системе координат. Дифференцирование проводится с учетом симметрии тензора P_{ij}. Следуя [7], находим:

$$d(P_{rs}n_rn_s) = \frac{d}{d\xi}(P_{rs} + \xi\delta P_{rs})n_rn_s = n_rn_s\delta P_{rs}, \tag{16}$$

где ξ – произвольная переменная,

$$\delta P_{rs} = \delta P_{ij}\left[\delta_{ir}\delta_{js} + \delta_{is}\delta_{jr}\right]/2. \tag{17}$$

Подставляя выражение (17) в (16), получаем:

$$\frac{\partial P_{rs}n_r n_s}{\partial P_{ij}} = n_i n_j. \tag{18}$$

Аналогично находим:

$$\begin{aligned} d\left(P_{lr}P_{rl}\right) &= \left(P_{lr}\delta P_{rl} + P_{rl}\delta P_{lr}\right) = \\ &= P_{lr}\left(\delta_{ir}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jr}\right)\delta P_{ij}/2 + \\ &+ P_{rl}\left(\delta_{il}\delta_{jr} + \delta_{ir}\delta_{jl}\right)\delta P_{ij}/2 = \left(P_{ji} + P_{ij}\right)\delta P_{ij} \end{aligned} \tag{19}$$

и

$$\frac{\partial\left(P_{rs}P_{rk}n_s n_k\right)}{\partial P_{ij}} = \left(n_s n_j P_{is} + n_i n_s P_{js}\right), \tag{20}$$

а также

$$\frac{\partial\left(P_{rs}n_r n_s\right)^2}{\partial P_{ij}} = 2\left(P_{rs}n_r n_s\right)n_i n_j. \tag{21}$$

Кроме того, заметим, что

$$\begin{aligned} 2\left(P_{rl} - n_r n_k P_{kl}\right)\left(P_{lr} - n_l n_s P_{sr}\right) &= \\ = 2\left[P_{rl}P_{lr} - n_r n_k P_{kl}P_{lr} - \right. & \\ \left. - n_l n_s P_{rl}P_{sr} + \left(n_r n_l P_{kl}\right)^2\right], & \end{aligned} \tag{22}$$

$$\frac{\partial\left(P_{rl}P_{lr}\right)}{\partial P_{ij}} = \left(P_{ij} + P_{ji}\right), \tag{23}$$

$$\frac{\partial\left(P_{rl}P_{sr}n_l n_s\right)}{\partial P_{ij}} = \left(n_j n_l P_{il} + n_i n_l P_{jl}\right). \tag{24}$$

Используя выражения (21)–(24) и группируя слагаемые сходного вида, окончательно запишем тензор скоростей деформации в лабораторной системе координат:

$$\begin{aligned} E_{ij} = \dot{\Lambda}\Big\{ & k\frac{3n_i n_j - \delta_{ij}}{2} + P_{ik}n_k n_j + P_{jk}n_k n_i - \\ & - 2\left(P_{kl}n_k n_l\right)n_i n_j + \frac{\alpha}{2}(3P_{kl}n_k n_l - P_{kk})\times \\ & \times\left(3n_i n_j - \delta_{ij}\right) + \beta\left[4\left(P_{ij} - P_{kj}n_i n_k - \right.\right. \\ & - P_{ki}n_j n_k + 4\left(P_{kl}n_k n_l n_i n_j\right) - 2\left(P_{ll} - n_l n_k P_{lk}\right)\times \\ & \left.\left.\times\left(\delta_{ij} - n_i n_j\right)\right]\Big\}, i, \quad j = 1,2,3. \end{aligned} \tag{25}$$

Для нахождения тензора напряжений при известном тензоре деформации и гидростатическом давлении необходимо разрешить систему уравнений (25) относительно компонент тензора напряжений P_{ij}.

Учитывая, что

$$n_j n_j = 1, \quad \delta_{ij}n_j = n_i, \tag{26}$$

умножим обе части уравнения (26) на компоненты вектор нормали к базисной плоскости n_j и проведем свертку по индексу j:

$$\begin{aligned} E_{ij}n_j = \dot{\Lambda}\Big\{ & k\frac{3n_i n_j - \delta_{ij}}{2}n_j + n_s n_j P_{is}n_j + \\ & + n_i n_s P_{sj}n_j - 2\left(P_{rs}n_r n_s\right)n_i n_j n_j + \frac{\alpha}{2}\times \\ & \times\left(3P_{rs}n_r n_s - P_{rr}\right)\left(3n_i n_j n_j - \delta_{ij}n_j\right) + \\ & + \beta\left[4P_{ji}n_j - 4P_{jl}n_i n_l n_j - 4P_{ki}n_j n_k n_j + \right. \\ & + 4P_{rs}n_r n_s n_i n_j n_j - 2\left(P_{rr} - n_r n_s P_{rs}\right)\times \\ & \left.\times\left(\delta_{ij}n_j - n_i n_j n_j\right)\right]\Big\} = \dot{\Lambda}\left\{kn_i + P_{is}n_s - \right. \\ & \left. - \left(P_{rs}n_r n_s\right)n_i + \alpha\left(3P_{rs}n_r n_s - P_{ss}\right)n_i\right\}. \end{aligned} \tag{27}$$

Теперь уравнение (27) еще раз умножим на n_i и свернем по индексу i:

$$E_{ij}n_j n_i = \dot{\Lambda}\left\{k + \alpha\left(3P_{kl}n_k n_l - P_{kk}\right)\right\}. \tag{28}$$

Заметим, что след тензора напряжений есть взятое с обратным знаком утроенное гидростатическое давление p:

$$P_{kk} = -3p. \tag{29}$$

Эту величину нельзя найти, зная только тензор скоростей деформации – она должна быть задана внешними условиями. Гидростатическое давление не зависит от выбора системы координат.

После некоторых преобразований получаем выражение для тензора напряжений:

$$\begin{aligned} P_{ij} = {} & \frac{E_{ij}}{4\beta\dot{\Lambda}} + \frac{E_{ir}n_r n_j + E_{rj}n_r n_i}{\dot{\Lambda}}\times \\ & \times\left(1 - \frac{1}{4\beta}\right) + An_i n_j + B\delta_{ij}, \end{aligned} \tag{30}$$

$$A = -\frac{k}{2\alpha} + \frac{E_{rs}n_r n_s}{\dot{\Lambda}}\left(\frac{1}{8\beta} + \frac{1}{2\alpha} - 2\right), \tag{31а}$$

$$B = -p + \frac{k}{6\alpha} + \left(\frac{1}{8\beta} - \frac{1}{6\alpha}\right)\frac{E_{rs}n_r n_s}{\dot{\Lambda}}. \tag{31б}$$

Для нахождения $\dot{\Lambda}$ сперва выразим инварианты I_1–I_3 через компоненты тензора скоростей деформации и, подставляя полученные инварианты в критерий (1), группируя члены при одинаковых степенях $\dot{\Lambda}$ и умножая на $\dot{\Lambda}^2$, находим уравнение для нахождения $\dot{\Lambda}$, которое имеет единственное положительное решение:

$$\begin{aligned} \dot{\Lambda} = \Bigg\{ & \left[\frac{E_{il}E_{li}}{8\beta} + \left(1 - \frac{1}{4\beta}\right)E_{ir}E_{is}n_r n_s + \right. \\ & \left. + \left(-1 + \frac{1}{4\alpha} + \frac{1}{16\beta}\right)\left(E_{lr}n_r n_l\right)^2\right] \Bigg/ \left(\frac{k^2}{4\alpha} - a\right)\Bigg\}^{1/2}. \end{aligned} \tag{32}$$

Уравнения (30)–(32) решают поставленную задачу – определение тензора напряжений при известном тензоре пластической деформации. Их можно упростить, если задать тензор скоростей деформации в главных осях. С учетом условия несжимаемости получим:

$$E = \begin{pmatrix} E_x & 0 & 0 \\ 0 & E_y & 0 \\ 0 & 0 & -E_x - E_y \end{pmatrix}. \quad (33)$$

В этом случае (32) примет вид:

$$\dot{\Lambda} = \left\{ \left[E_x^2 n_x^2 + E_y^2 n_y^2 + \left(E_x + E_y\right)^2 n_z^2 \right] \times \left(1 - \frac{1}{4\beta}\right) + \frac{\left(E_x + E_y\right)^2 - E_x E_y}{4\beta} + \left(-1 + \frac{1}{4\alpha} + \frac{1}{16\beta}\right) \times \left[E_x \left(n_x^2 - n_z^2\right) + E_y \left(n_y^2 - n_z^2\right) \right]^2 \right\}^{1/2} \Bigg/ \sqrt{\left(\frac{k^2}{4\alpha} - a\right)} \quad (34)$$

и компоненты искомого тензора напряжений с учетом (33):

$$P_{xx} = \frac{E_x}{4\beta\dot{\Lambda}} + \frac{2E_x n_x^2}{\dot{\Lambda}}\left(1 - \frac{1}{4\beta}\right) + An_x^2 + B, \quad (35)$$

$$P_{yy} = \frac{E_y}{4\beta\dot{\Lambda}} + \frac{2E_y n_y^2}{\dot{\Lambda}}\left(1 - \frac{1}{4\beta}\right) + An_y^2 + B, \quad (36)$$

$$P_{zz} = -\frac{\left(E_x + E_y\right)}{4\beta\dot{\Lambda}} - \frac{2\left(E_x + E_y\right) n_z^2}{\dot{\Lambda}} \times \left(1 - \frac{1}{4\beta}\right) + An_z^2 + B, \quad (37)$$

$$P_{xy} = \left[\frac{E_x + E_y}{\dot{\Lambda}}\left(1 - \frac{1}{4\beta}\right) + A \right] n_x n_y, \quad (38)$$

$$P_{xz} = \left[A - \frac{E_y}{\dot{\Lambda}}\left(1 - \frac{1}{4\beta}\right) \right] n_x n_z, \quad (39)$$

$$P_{yz} = \left[A - \frac{E_x}{\dot{\Lambda}}\left(1 - \frac{1}{4\beta}\right) \right] n_y n_z. \quad (40)$$

РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Рассмотрим теперь в главных осях случай плоской деформации:

$$E_x = -E_z = E, \quad E_y = 0. \quad (41)$$

Этот случай представляет большой практический интерес и, кроме того, во многих экспериментальных работах [8, 9], посвященных изучению механических свойств монокристаллов магния, последние подвергаются плоской деформации. В этом случае уравнение (34) принимает вид:

$$\dot{\Lambda} = \left[\frac{E^2}{4\beta} + \left(1 - \frac{1}{4\beta}\right) E^2 \left(n_x^2 + n_z^2\right) + E^2 \left(n_x^2 - n_z^2\right)^2 \times \left(-1 + \frac{1}{4\alpha} + \frac{1}{16\beta}\right) \right]^{1/2} \Bigg/ \left(\frac{k^2}{2\alpha} - a\right)^{1/2} = E \left\{ \left[\frac{1}{4\beta} + \left(1 - \frac{1}{4\beta}\right)\left(1 - n_y^2\right) + \left(n_x^2 - n_z^2\right)^2 \times \left(-1 + \frac{1}{4\alpha} + \frac{1}{16\beta}\right) \right] \Bigg/ \left(\frac{k^2}{4\alpha} - a\right) \right\}^{1/2}, \quad (42)$$

а уравнения для компонент тензора напряжений (35)–(40) принимают вид:

$$P_{xx} = \frac{E}{4\beta\dot{\Lambda}} + \frac{2En_x^2}{\dot{\Lambda}}\left(1 - \frac{1}{4\beta}\right) + An_x^2 + B, \quad (43а)$$

$$P_{yy} = An_y^2 + B, \quad (43б)$$

$$P_{zz} = -\frac{E}{4\beta\dot{\Lambda}} - \frac{2En_z^2}{\dot{\Lambda}}\left(1 - \frac{1}{4\beta}\right) + An_z^2 + B, \quad (43в)$$

$$P_{xy} = \left[\frac{E}{\dot{\Lambda}}\left(1 - \frac{1}{4\beta}\right) + A \right] n_x n_y, \quad (44)$$

$$P_{xz} = An_x n_z, \quad (45)$$

$$P_{yz} = \left[-\frac{E}{\dot{\Lambda}}\left(1 - \frac{1}{4\beta}\right) + A \right] n_y n_z, \quad (46)$$

где:

$$A = -\frac{k}{2\alpha} + \frac{E\left(n_x^2 - n_z^2\right)}{\dot{\Lambda}}\left(\frac{1}{8\beta} + \frac{1}{2\alpha} - 2\right), \quad (47а)$$

$$B = -p + \frac{k}{6\alpha} + \frac{E\left(n_x^2 - n_z^2\right)}{\dot{\Lambda}}\left(\frac{1}{8\beta} - \frac{1}{6\alpha}\right). \quad (47б)$$

В наших предыдущих работах [1, 2] ориентировка кристалла задается углами Эйлера следующим способом, широко используемым в кристаллографии [10]: кристалл, кристаллографические оси которого первоначально совпадают с осями лабораторной системы координат X, Y, Z, (ось Z совпадает с кристаллографической осью c) последовательно поворачивается на угол φ_1 вокруг оси Z, затем на угол Φ вокруг оси X' (положение, которое принимает ось X после первого поворота), затем вокруг оси Z'' (новое положение оси Z после двух предыдущих поворотов) на угол φ_2. Поскольку критерий (1) обладает цилиндрической симметрией вращения вокруг кристаллографической оси c, последнее вращение на угол φ_2 и сам этот угол можно не рассматривать и задавать ориентировку кристалла парой углов (φ_1, Φ). Согласно нашей предыдущей работе [2], единичный, нормальный к базисной плоскости, вектор $\vec{n}$ имеет вид:

$$\vec{n} = -\sin\varphi_1 \sin\Phi \vec{e}_1 + \cos\varphi_1 \sin\Phi \vec{e}_2 + \cos\Phi \vec{e}_3, \quad (48)$$

где $\varphi_1 \in [0, 2\pi]$, $\Phi \in [0, \pi]$. Поскольку в формулы (42)–(47) компоненты вектора $\vec{n}$ и, следовательно синусы и косинусы углов φ_1 и Φ, входят только в квадрате, т.е. фактически могут быть выражены через $\cos 2\varphi_1$, $\cos 2\Phi$, то параметры A, B и $\dot{\Lambda}$ являются четными периодическими функциями с периодом π как по углу φ_1, так и по углу Φ. Следовательно, они не меняются при заменах $\varphi_1 \to \pi - \varphi_1$, $\Phi \to \pi - \Phi$, т.е. их графики симметричны относительно осей $\varphi_1 = \pi/2$ и $\Phi = \pi/2$. То же можно сказать и о диагональных компонентах тензора напряжений. Компонента P_{xy}, в отличие от них, нечетна по углу φ_1 (за счет множителя $\sin 2\varphi_1$), компонента P_{xz} нечетна и имеет период 2π по φ_1 (за счет множителя $\sin\varphi_1$), компонента P_{yz} – нечетна и периодична с периодом 2π по φ_1 (за счет $\cos\varphi_1$). Поэтому графики компонент P_{xy}, P_{yz} и P_{xz} симметричны относительно оси $\varphi_1 = \pi/2$. При замене $\varphi_1 \to \pi + \varphi_1$ компоненты P_{xy}, P_{xz} меняют знак.

Эти замечания позволяют ограничиться рассмотрением компонент тензора напряжений в области $0 < \varphi_1 < \pi$, $0 < \Phi < \pi/2$.

Большой интерес представляет случай, когда недиагональные компоненты равны нулю и таким образом, главные оси тензоров напряжений и деформаций совпадают. Таким случаям, в частности соответствуют значения углов $\Phi = 0°, 180°$. Недиагональные члены обращаются в ноль, когда

$$n_y = 0 \quad \text{и} \quad A = 0. \quad (49)$$

Тогда из уравнений (48), (50) следует:

$$\cos\varphi_1 = 0, \quad \sin\varphi_1 = \pm 1. \quad (50)$$

$$(n_x)^2 - (n_z)^2 = -\cos 2\Phi. \quad (51)$$

Тогда уравнения (47а), (42) можно записать как

$$A = -\frac{k}{2\alpha} - \frac{E\cos 2\Phi}{\dot{\Lambda}}\left(\frac{1}{8\beta} + \frac{1}{2\alpha} - 2\right), \quad (52)$$

$$\dot{\Lambda} = E\sqrt{\left[1 + \cos^2 2\Phi\left(-1 + \frac{1}{4\alpha} + \frac{1}{16\beta}\right)\right]} \Big/ \sqrt{\left(\frac{k^2}{4\alpha} - a\right)}, \quad (53)$$

а второе условие (50) – в виде:

$$\frac{k}{2\alpha} = -\frac{\left(\frac{1}{8\beta} + \frac{1}{2\alpha} - 2\right)\sqrt{\left(\frac{k^2}{4\alpha} - a\right)}\cos 2\Phi}{\sqrt{\left[1 + \cos^2 2\Phi\left(-1 + \frac{1}{4\alpha} + \frac{1}{16\beta}\right)\right]}}, \quad (54)$$

причем $\cos 2\Phi < 0$. Разрешая уравнение (54) относительно $\cos 2\Phi$, находим:

$$\cos 2\Phi = -\left[\left(\frac{1}{8\beta} + \frac{1}{2\alpha} - 2\right)^2 \times \left(\alpha - \frac{4\alpha^2}{k^2}a\right) - \left(-1 + \frac{1}{4\alpha} + \frac{1}{16\beta}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (55)$$

Значения определенных параметров взяты из нашей предыдущей работы [2] и равны $a = -0.28$ МПа, $\alpha = 7.07 \times 10^{-7}$, $\beta = 5.36 \times 10^{-4}$, $k = 6.37 \times 10^{-2}$ МПа. Так как для определения диагональных компонент тензора деформаций необходимо знание приложенного гидростатического давления, ограничимся построением графиков для компонент девиаторов напряжений S_{ij}, совпадающих с соответствующими компонентами тензора напряжений в случае недиагональных компонент, а для диагональных – отличающихся на величину гидростатического давления:

$$S_{ij} = P_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}P_{kk} = P_{ij} + \delta_{ij}p. \quad (56)$$

Линии уровней компонент S_{ij} даны на рис. 1–2. Зависимости компонент от углов φ_1 и Φ являются достаточно сложными, имеют большое количество локальных максимумов и минимумов и нулевые изолинии достаточно сложного вида, особенно S_{yz} и S_{xz}, за исключением компоненты S_{zz}, которая всегда отрицательна.

Компонента S_{xx} положительна почти для всех ориентировок кристаллов, кроме малых окрестностей точек минимума; достигает максимальных значений при углах Φ, близких к 45° и 135°, $\varphi_1 = 0°, 180°$. Эти ориентировки для свободного зерна являются наиболее легкими для пластической деформации, но здесь направление легкого скольжения заблокировано приложенной ограничивающей силой, обеспечивающей плоскую геометрию деформации.

Наибольшее значение S_{yy} соответствует ориентировке, близкой к ориентировке, соответствующей наибольшему значению S_{xx}. Наибольшее по абсолютной величине значение компоненты S_{zz} соответствуют сжатию в направлении нормали к базисной плоскости (значение угла $\Phi = 0°, 180°$). Рассматривая кривые изолиний недиагональных компонент (рис. 2а–2в) и формулы (44), (45),

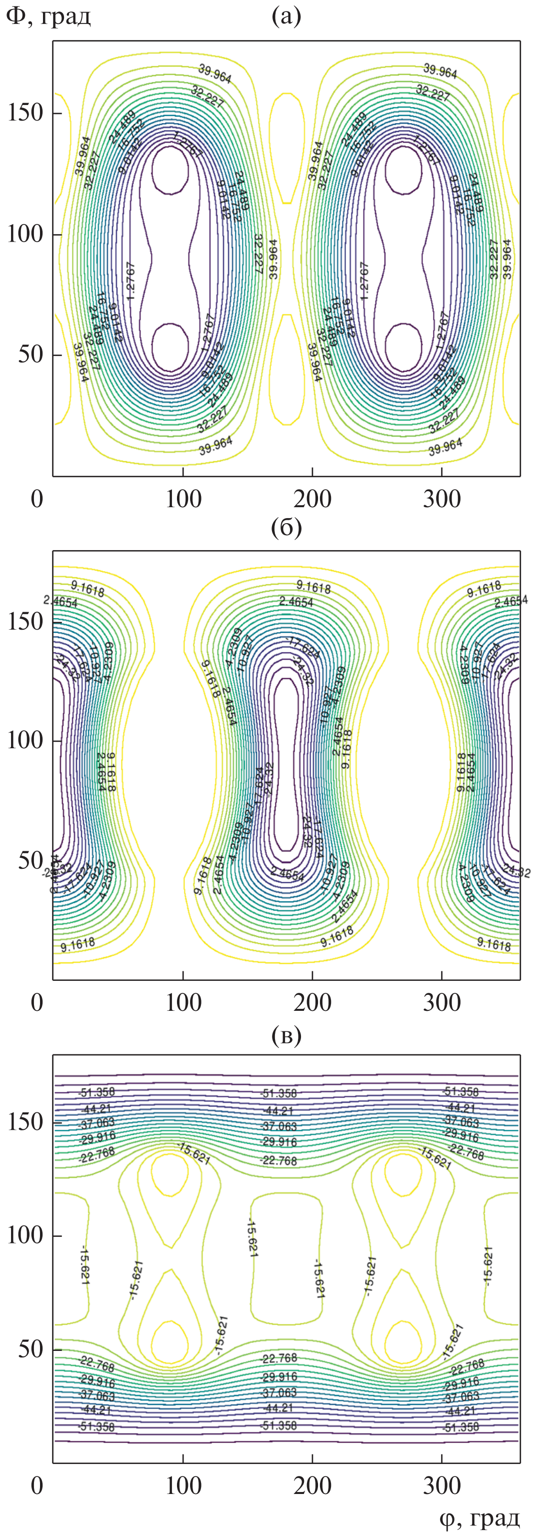

Рис. 1. Линии уровня: а – S_{xx}; б – S_{yy}; в – S_{zz}.

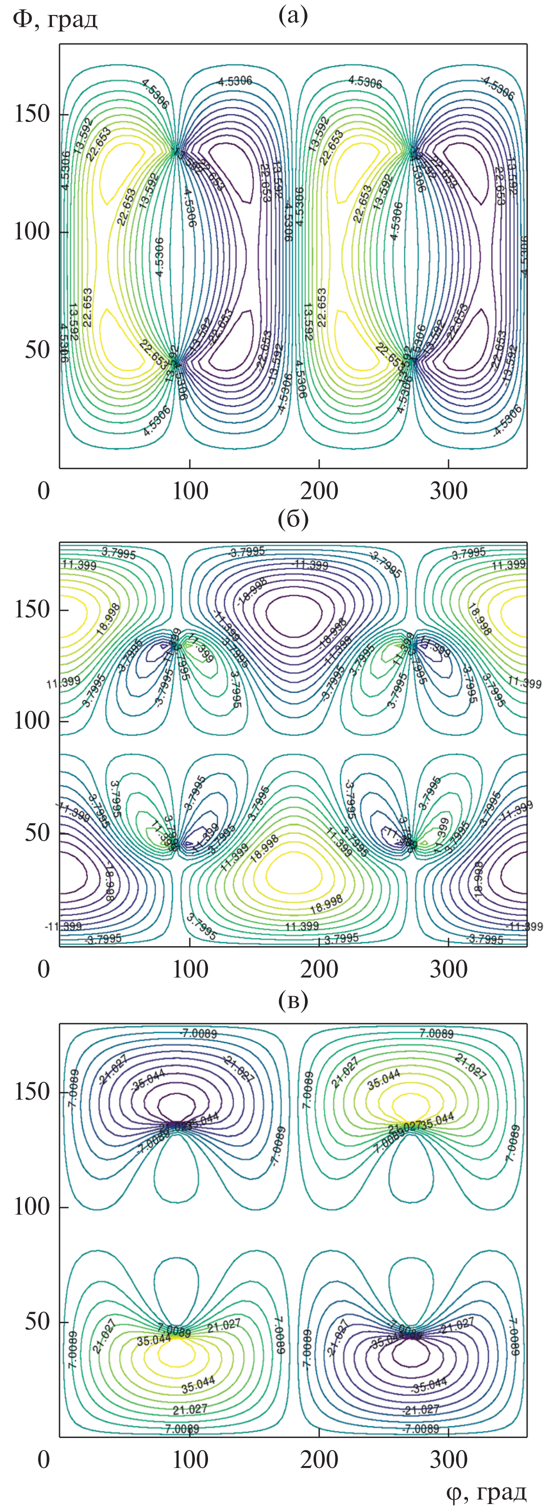

Рис. 2. Линии уровня: а – S_{xy}; б – S_{yz}; в –S_{xz}.

(46), (48) и (54), легко убедиться, что недиагональные компоненты обращаются в ноль при $\Phi = 0°, 180°$, а также при четырех ориентировках, соответствующих всем возможным комбинациям углов $\varphi_1 = 90°, 270°$; $\Phi = 46°, 134°$.

ВЫВОДЫ

На основе разработанной деформационной модели монокристаллического гексагонального материала решена одна из задач теории пластичности — рассчитано напряжение начала пластического течения монокристаллов различных ориентировок при заданных тензорах скорости пластической деформации и приложенного внешнего давления.

Подробно исследован случай плоской деформации и найдены условия, когда главные оси тензора напряжений и деформаций совпадают.

Впервые обобщенный критерий текучести Мизеса применен для расчета компонентов девиатора тензора напряжений S_{xx}, S_{yy}, S_{zz}, S_{xy}, S_{yz}, S_{xz}, необходимых для начала пластического течения, и построены линии уровня напряжений в случае плоской деформации для любых ориентировок монокристаллов магния.

Результат, полученный в исследовании, является основой для построения деформационной модели поликристаллического тела с гексагональной кристаллической решеткой на основе обобщенного критерия Мизеса.

Работа выполнена в рамках государственного задания по теме “Давление” № АААА-А18-118020190104-3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Власова А.М., Кесарев А.Г.* Модель деформации монокристаллического магния // Изв. Вузов. Физика. 2018. Т. 61 № 7. С. 68–78.
2. *Власова А.М., Кесарев А.Г.* Обобщение критерия Мизеса на монокристаллы с гексагональной решеткой // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2019. № 6. С. 86–98.
3. *Победря Б.Е.* Механика композиционных материалов. Изд-во московского ун-та. 1984. 336 с.
4. *Трусов П.В., Волегов П.С., Кондратьев Н.С.* Физические теории пластичности. Пермь: Изд-во пермского национального исследовательского политехнического ун-та, 2013. 244 с.
5. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды, т. 2. М.: Наука, 1994. 560 с.
6. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды, т. 1. М.: Наука, 1994. 528 с.
7. *Победря Б.Е.* Лекции по тензорному анализу. Издательство московского университета. 1986. 264 с.
8. *Kelly E.W., Hosford W.F.* Plane-strain compression of magnesium and magnesium alloy crystals // Trans. Metal. Soc. AIME. 1968. V.242. P. 5–15.
9. *Wonsiewicz B.C., Backofen W.A.* Plasticity of magnesium crystals // Trans AIME. 1967. V. 239. P. 1422–1431.
10. *Уманский Я.С., Скаков Ю.А., Иванов А.Н., Расторгуев Л.Н.* Кристаллография, рентгенография и электронная микроскопия. М.: Металлургия, 1982. 631 с.