ИЗВЕСТИЯ РАН. СЕРИЯ ФИЗИЧЕСКАЯ, 2021, том 85, № 10, с. 1501–1505

УДК 539.1.01:539.16:539.182

ОПИСАНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ЯДЕРНОМ РЕАКТОРЕ В ФОРМАЛИЗМЕ ТЕОРИИ КОГЕРЕНТНЫХ СОСТОЯНИЙ

М. О. Кравченко[1], $\boxed{\text{Э. А. Рудак}}$[1], Т. Н. Корбут[1, *], М. В. Бобкова[1]

[1]*Государственное научное учреждение "Объединенный институт энергетических и ядерных исследований — Сосны" Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь*

**E-mail: korbut@sosny.bas-net.by*

Поступила в редакцию 24.05.2021 г.
После доработки 01.06.2021 г.
Принята к публикации 28.06.2021 г.

Проанализирована возможность применения теории когерентных состояний при решении статистических задач в реакторной физике. Дано математическое описание теории как в формализме интегралов перекрытия, так и в формализме операторов рождения и гибели фононов. Проведено сравнение пуассоновского распределения с когерентными состояниями и исследована возможность использования формализма когерентных состояний в реакторной физике.

DOI: 10.31857/S0367676521100203

ВВЕДЕНИЕ

Главная цель настоящей работы состоит в разработке математического аппарата для вычисления средних значений различных физических величин в размножающей среде теплового реактора. Поскольку при этом возникают сложности, характерные для проблем многих тел, то для их устранения целесообразно использовать формализм когерентных состояний так, как это сделано в аналогичной ситуации в [1].

Когерентные состояния обладают следующим основным свойством: их фаза полностью известна, но неизвестно количество частиц в каждом когерентном состоянии. В то же время состояния системы, описываемые теоремой Фока—Крылова (далее фоковские состояния) и характеризуемые числами заполнения, имеют неизвестную фазу при вполне определенном общем числе частиц. Это подводит к мысли, что когерентные состояния настолько близки к классическим детерминистским состояниям, насколько это возможно для квантовых состояний.

Основным преимуществом когерентных состояний является сохранение информации о фазовых характеристика поля, теряемой при использовании фоковских состояний. Для сохранения фазовой информации, которая очень важна при описании явления когерентности, обусловленного совместным поведением большого числа частиц, необходимо определить все недиагональные элементы матрицы Фока, которых бесконечно много. В то же время в представлении когерентных состояний вся информация о свойствах ансамбля, обусловленных взаимодействием входящих в него частиц, содержится только в одном матричном элементе.

В краткой форме физическая суть когерентных состояний изложены в [2, 3] со ссылкой на работы Шрёдингера, в которых и были сформулированы свойства этих состояний. Свойства когерентных состояний в трактовке Глаубера [4] обсуждены в [1], где также отмечается, что их основная привлекательность состоит в том, что они настолько близки к классическим состояниям гармонического осциллятора, насколько это позволяет минимальное значение соотношения неопределенностей.

Подобные исследования когерентных состояний проводятся различными научными группами в самых разных аспектах и приложениях [5, 6]. Математический аппарат в терминах операторов рождения и гибели рассматривался в работах по изучению обобщенного осциллятора [7].

Учитывая возможность описания оптических систем через когерентные состояния, а также явную аналогию между лазерными системами и процессами эволюции нейтронов в активной зоне ядерного реактора [8], в данной работе продемонстрировано на качественном уровне, как метод когерентных состояний может быть использован для решения ряда задач в теории теплового реактора, в частности при описании статистических процессов.

ФОРМАЛИЗМ КОГЕРЕНТНЫХ СОСТОЯНИЙ В РАМКАХ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ ПЕРЕКРЫТИЯ

Основные формулы математического аппарата когерентных состояний, основанного на вычислении интегралов перекрытии волновой функции когерентного состояния и волновых функций гармонического осциллятора, можно записать, используя понятия и нотацию [2].

Согласно [2] искомые волновые функции должны иметь вид

$$\begin{gathered}\Psi(x,t) = (m\omega/\pi\hbar)^{1/4}\times \\ \times\exp[i\langle p\rangle x/\hbar - m\omega(x-\langle x\rangle)^2/(2\hbar)\times. \\ \times\exp[-i\omega t/2 - i\langle p\rangle\langle x\rangle/(2\hbar)].\end{gathered} \tag{1}$$

При $\langle x\rangle = 0$ и $\langle p\rangle = 0$ эта функция переходит в $\Psi_0 = (x)\exp(-i\omega t/2)$ – волновую функцию основного состояния осциллятора.

Рассматривая классическую систему необходимо определить среднюю энергии осциллятора, находящегося в когерентном состоянии

$$\begin{gathered}\langle E\rangle = \langle p^2\rangle/2m + m\omega^2\langle x\rangle^2/2 = \\ = \langle p\rangle^2/2m + m\omega\langle x\rangle^2/2 + \hbar\omega/2 = \\ = \hbar\omega(\langle n\rangle + 1/2),\end{gathered} \tag{2}$$

где $\langle n\rangle$ – среднее “число квантов” $\hbar\omega$ в данном состоянии и определяется формулой

$$\langle n\rangle = [\langle p\rangle^2/2m + m\omega\langle x\rangle^2/2]/\hbar\omega. \tag{3}$$

Когерентное состояние следует определить заданием той или иной зависимости средней координаты $\langle x(t)\rangle$, удовлетворяющей классическому уравнению

$$\langle\ddot{x}\rangle + \omega^2\langle x\rangle = 0. \tag{4}$$

Уравнение (4) представим как следствие из условия $\langle p(t)\rangle = m\langle\dot{x}(t)\rangle$. Общий вид такой зависимости определяется в виде

$$(m\omega\langle x\rangle + i\langle p\rangle)/(2m\hbar\omega)^{1/2} = \alpha\exp(-i\omega t), \tag{5}$$

где α – комплексное число и $|\alpha|^2 = \langle n\rangle$ дает среднее число фононов в когерентном состоянии. Через временной интервал $\tau = 1/\omega$ в системе одним фононом становится больше.

Из (4) и (5) следует, что гармонический характер функции $\langle x\rangle$ обеспечивает сохранение во времени волнового пакета. Волновой пакет не расплывается, но “центр тяжести” его совершает колебания с частотой ω.

Смысл комплексного числа α в (5) может быть установлен следующим образом. Функция $\Psi(x,t)$ (1) раскладывается по волновым функциям стационарных состояний осциллятора Ψ_n

$$\begin{gathered}\Psi(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\Psi_n, \\ \Psi_n = \phi_n(x)\exp(-i[n+1/2]\omega t),\end{gathered} \tag{6}$$

где коэффициенты этого разложения

$$\alpha_n = \int_{-\infty}^{+\infty}\Psi_n^*\Psi dx. \tag{7}$$

Отсюда вероятность осциллятору находиться в n-м состоянии

$$w_n = |\alpha_n|^2 = (\langle n\rangle^n/n!)\exp(-\langle n\rangle), \tag{8}$$

т.е. дается известным распределением Пуассона (см. также [9]).

СВОЙСТВА КОГЕРЕНТНЫХ СОСТОЯНИЙ В ФОРМАЛИЗМЕ ОПЕРАТОРОВ РОЖДЕНИЯ И УНИЧТОЖЕНИЯ ФОНОНОВ

Вместо переменных “координата x–импульс p” в случае гармонического осциллятора широко используются и переменные “оператор рождения a^+ – оператор уничтожения a", применение свойства которых рассмотрены в ряде классических работ [1, 11, 12]. Связь между этими парами переменных дается соотношениями

$$a^+ = (1/2\,m\omega\hbar)^{1/2}(p - i\omega x), \tag{9}$$

$$a = -(1/2\,m\omega\hbar)^{1/2}(p + i\omega x), \tag{10}$$

$$[a, a^+] = 1, \tag{11}$$

где смысл обозначений очевиден.

В этих комплексных переменных для квадратичных по координате и импульсу систем гамильтониан имеет вид

$$H = (a^+a + 1/2\,\hbar\omega), \tag{12}$$

где a^+a – оператор числа частиц.

Операторы $a\exp(-i\omega t)$ и $a^+\exp(i\omega t)$ соответствуют гейзенберговским операторам гибели $a(t)$ и рождения $a^+(t)$ и соответственно увеличивают и уменьшают энергию состояния на энергию фонона $\hbar\omega$.

Данные операторы действуют на фоковские волновые функции в представлении чисел заполнения $|n\rangle$ с n частицами следующим образом

$$|n\rangle = (1/n^{1/2})(a^+)^n|0\rangle, \tag{13}$$

$$a|n\rangle = n^{1/2}|n-1\rangle, \tag{14}$$

$$a^+|n\rangle = n^{1/2}|n+1\rangle. \tag{15}$$

Операторы координаты и импульса можно найти из соотношений (9), (10)

$$x = x_0(a + a^+), \quad x_0 = (2m\omega)^{-1/2}, \tag{16}$$

$$p = -im\omega x_0(a - a^+), \tag{17}$$

где x_0 – среднеквадратичная флуктуация в нуле.

Когерентное состояние определим как собственные состояния оператора уничтожения [10]

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle. \tag{18}$$

Разложение когерентного состояния $|\alpha\rangle$ по состояниям гармонического осциллятора с n фононами $|n\rangle$ приводит к рекуррентным соотношениям, решение которых дает

$$|\alpha\rangle = \exp(-|\alpha|^2/2)\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha^n/[n!]^{1/2})|n\rangle. \tag{19}$$

Аналогичный результат получен ранее при вычислении интегралов перекрытия в формулах (7) и (8). Кроме того, для функции $|\alpha\rangle$ имеют место и соотношения

$$\begin{gathered}|\alpha\rangle = A(\alpha)|0\rangle,\\ A(\alpha) = \exp(\alpha a^+ - a^+\alpha),\end{gathered} \tag{20}$$

где $A(\alpha)$ – унитарный оператор ($A^+A = AA^+ = 1$), порождающий когерентные состояния. Все эти операторы имеют следующие свойства:

$$A^+aA = a + \alpha, \tag{21}$$

$$A^+a^+A = a^+ + \bar{\alpha}, \tag{22}$$

$$A(a) = A^+(-\alpha). \tag{23}$$

Из (19), (20) следует, что скалярное произведение когерентных состояний равно

$$\langle\alpha|\beta\rangle = \exp(\bar{\alpha}\beta - |\alpha|^2/2 - |\beta|^2/2), \tag{24}$$

$$|\langle\alpha|\beta\rangle|^2 = \exp(-|\alpha - \beta|^2), \tag{25}$$

т.е. соответствует интегралу перекрытий двух гауссовых функций в волновой картине Шрёдингера. Когерентные состояния полны, т.е.

$$\int d^2\alpha|\alpha\rangle\langle\alpha| = 1, \tag{26}$$

$$d^2\alpha = d\,\mathrm{Re}\,\alpha d\,\mathrm{Im}\,\alpha. \tag{27}$$

В [11] подчеркивалась практическая ценность когерентных состояний. Действительно, для когерентных состояний легко рассчитывать ожидаемые значения различных величин.

Ожидаемое значение любого полинома от a и a^+ (упорядоченного так, что все операторы рождения стоят слева от операторов уничтожения) получается просто подстановкой $a \to \alpha$, $a^+ \to \bar{\alpha}$. В частности, для координаты

$$\begin{gathered}\langle\alpha|x|\alpha\rangle = x_0\langle\alpha|a + a^+|\alpha\rangle =\\ = x_0(\alpha + \bar{\alpha}) = 2x_0\,\mathrm{Re}\,\alpha.\end{gathered} \tag{28}$$

Аналогично для импульса получаем

$$\langle\alpha|p|\alpha\rangle = 2m\omega x_0\,\mathrm{Im}\,\alpha. \tag{29}$$

Простое выражение получается также и для гамильтониана

$$\begin{gathered}\langle\alpha|H|\alpha\rangle = \hbar\omega\langle\alpha|(a^+a + 1/2)|\alpha\rangle =\\ = \hbar\omega(|a|^2 + 1/2)\end{gathered} \tag{30}$$

Выражение (30) показывает, что для гамильтониана можно получить любое значение.

Из приведенных выше формул (16), (17) также следует, что среднеквадратичные флуктуации координаты и импульса для когерентного состояния имеют вид

$$(\Delta x)^2_{coh} = x_0^2 = (2m\hbar\omega)^{-1}, \tag{31}$$

$$(\Delta p)^2_{coh} = m^2\hbar^2\omega^2x_0^2 = m\hbar\omega/2. \tag{32}$$

Следовательно, для всех когерентных состояний

$$(\Delta x)^2(\Delta p)^2_{coh} = \hbar^2/4 \tag{33}$$

соотношение неопределенностей имеет минимальное значений.

Очевидно, что и в этом формализме сохраняются трудности привязки расчетов к модели гармонического осциллятора. Поэтому ниже будет показан классический аналог рассмотренного выше когерентного состояния гармонического осциллятора, который и может быть использован в физике теплового реактора. Это известное распределение Пуассона [13].

В конечном итоге, в рамках классического подхода будет найден аналог разложения функции когерентного состояния $\Psi(t) = \sum an\Psi n$ (6), комплексного числа α (5,19) и квадрата модуля $|\alpha|2 = \langle n\rangle$ (5), равного среднему числу частиц в когерентном состоянии.

СВЯЗЬ С ПУАССОНОВСКИМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

В работе [13] отмечается, что существует две трактовки закона Пуассона, физический смысл которых раскрывается на примере процесса распада радиоактивных ядер – регистрации актов распада ядер на экспериментальной установке.

Согласно одной из трактовок на одной установке производится большое число измерений k в разное время t_i, но в равные временные интервалы $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$. При этом интенсивность распада ядер в образце должна оставаться примерно постоянной.

Во втором случае имеется большое количество идентичных установок, на которых одновременно производятся измерения в равные временные интервалы Δt. При этом интенсивность распада ядер в образце в пределах временного интервала Δt может меняться (более подробно этот случай анализируется в [14]). Можно предположить, что трактовка свойств когерентных состояний в работах [2, 11] связана со второй трактовкой закона Пуассона в [13].

Радиоактивный распад атомных ядер описывается формулой

$$n(t) = n_0 e^{-\lambda t} \quad (34)$$

где $\lambda = 1/\tau$ – константа распада и τ – среднее время жизни ядра, n_0 и $n(t)$ – число ядер в начальный момент и время t соответственно.

Для того, чтобы применить закон Пуассона в случае радиоактивного распада ядер в рамках рассматриваемой теории, рассмотрим тождество

$$1 = e^{-\lambda t} e^{\lambda t} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k = p_{tot}, \quad (35)$$

которое связывает парциальные вероятности распада k-го ядра p_k и суммарную вероятность p_{tot} распада ядра.

Это следует из соотношения

$$e^{-\lambda t} e^{\lambda t} = e^{-\lambda t} \cdot \left(1 + \lambda t + \frac{(\lambda t)^2}{2!} + \ldots + \frac{(\lambda t)^k}{k!} + \ldots\right). \quad (36)$$

Сравнивая формулы (35) и (36), видно, что парциальная вероятность распада равна

$$p_k = e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^k}{k!}, (37) \quad (37)$$

а суммарная вероятность распада равна

$$p_{tot} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k. \quad (38)$$

Здесь λt среднее число распавшихся ядер.

Из тождества (35) можно получить в аналитическом виде выражения для величин p_k (37) и p_{tot} (38) без решения системы связанных уравнений, как это сделано в [13]. Можно отметить, что в формулах (38) и (37) величины p_k и p_{tot} входят при одном и том же значении времени t. Следовательно, в случае радиоактивного распада атомных ядер верна вторая трактовка закона Пуассона.

С точки зрения квантовой механики, если система образована из взаимодействующих микрочастиц, то она сразу описывается сложной волновой функцией. При этом переход из одного состояния в другое (чем является любая ядерная реакция), как и переход от одной волновой функции к другой, происходит мгновенно, что отличается, например, от классического описания процесса деления через составное ядро в теории ядерных реакций Бора. В случае радиоактивного распада вычисление среднего числа частиц $\langle n \rangle$, соответствующего суммарной вероятности p_{tot} (38), происходит через выражение p_{tot} в представлении Фока, т.е. через расчет среднего значения величины

$$\langle k \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p_k. \quad (39)$$

Не трудно заметить, что $\langle k \rangle = \lambda t$ и является аналогом формулы $|\alpha|^2 = \langle n \rangle$ (5).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе изложенных умозаключений видно, что когерентные состояния в трактовке Шредингера есть не что иное, как пример проявления распределения Пуассона в физике микромира, а показанный формализм когерентных состояний по сути дела совпадает формализмом одномерного распределения Пуассона для описания радиоактивного распада атомных ядер.

При описании статистических характеристик размножающей среды в тепловом реакторе можно по усмотрению пользоваться обоими формализмами. При этом, очевидно, проще пользоваться распределением Пуассона, для описания статистических свойств распадающихся систем, но с оглядкой на квантовый характер поведения таких объектов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Перина Я.* Квантовая статистика линейных и нелинейных оптических явлений, М.: Мир, 1987. 386 с.
2. *Ландау Л.Д.* Теоретическая физика. Т. 3. Квантовая механика, нерелятивистская теория. М.: Наука, 1974. 752 с.
3. *Давыдов А.С.* Квантовая механика. М.: Наука, 1973. 704 с.
4. *Глаубер Р.* Квантовая оптика и квантовая радиофизика. М.: Наука,1966. с. 91.
5. *Курочкин Ю.А.* // Докл. НАН Беларуси. 2019. Т. 63. № 3. С. 278.
6. *Громов Н.А., Манько В.И.* // Тр. ФИАН. 1991. Т. 200. С. 3.
7. *Борзов В.В.* Когерентные состояния для обобщенного осциллятора. Автореф. дис. ... докт. физ.-мат. наук. СПб: СПбГУ, 2007. 32 с.
8. *Корбут Т.Н., Кузьмин А.В., Рудак Э.А.* // Изв. РАН. Сер. физ. 2015. Т. 79. № 4. С. 503; *Korbut T.N., Kuz'min A.V., Rudak E.A.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2015. V. 79. No. 4. P. 461.
9. *Галицкий В.М.* Задачи по квантовой механике. М.: Наука, Физматгиз, 1981. 848 с.

10. *Базь А.И. Зельдович Я.Б., Переломов А.М.* Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике: 2-е издание. М.: Книга по требованию, 2013. 544 с.
11. Новости фундаментальной физики (ННФ). Вып. 1. Когерентные состояния в квантовой теории. М.: Мир, 1972. 232 с.
12. *Люиселл У.* Излучение и шумы в квантовой электронике. М.: Наука, 1972. 398 с.
13. *Гольданский В.И.* Статистика отсчетов при регистрации ядерных частиц. М.: Физматгиз, 1959. 412 с.
14. *Тихонов В.И.* Марковские процессы. М.: Сов. радио, 1977. 488 с.

Nuclear reactor statistical processes description within coherent states notions

M. O. Kravchenko[a], **Ed. A. Rudak**[a], **T. N. Korbut**[a, *], **M. V. Bobkova**[a]

[a] *Joint Institute for Power and Nuclear Research — Sosny, National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, BY-220109 Belarus*

**e-mail: korbut@sosny.bas-net.by*

We consider the possibility of applying the coherent states theory in solving statistical problems for the reactor physics needs. A mathematical description of the theory is given both in the formalism of overlap integrals and in the formalism of phonon birth and death operators. An analogy of the Poisson distribution with coherent states is made and the possibilities of using the latter in reactor physics are determined.