

УДК 544.638.2

## ЭЛЕКТРОКИНЕТИЧЕСКИЙ ТРАНСПОРТ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ ЧЕРЕЗ МЯГКИЙ НАНОКАНАЛ С рН-ЧУВСТВИТЕЛЬНЫМ И ЧАСТИЧНО ПРОНИЦАЕМЫМ ДЛЯ ИОНОВ ПОЛИМЕРНЫМ СЛОЕМ

© 2023 г. Деepak Kumar<sup>1</sup>, Bhanuman Varman<sup>1</sup>, \*

<sup>1</sup>Факультет математики, Национальный институт технологии Патны, Патна, 800005 Индия

\*e-mail: bhanuman@nitp.ac.in

Поступила в редакцию 07.12.2022 г.

После доработки 08.01.2023 г.

Принята к публикации 08.01.2023 г.

Статья посвящена всестороннему исследованию электроосмотического течения и транспорта ионов через заполненный неньютоновской жидкостью мягкий наноканал с привитым полимером. В работе рассматривается равновесное течение в шелевом прямоугольном канале, в котором заряженный полиэлектролитный слой (PEL) образуется за счет одновалентных кислотных ионизируемых групп, прикрепленных к жесткой стенке. В нашей работе рассматривается эффект ионного разделения, который возникает из-за разницы в относительной диэлектрической проницаемости области полиэлектролита и в объеме электролита. Для описания математической модели используются совместно нелинейное уравнение Пуассона–Больцмана и модифицированное уравнение движения сплошной среды. Основная цель этого анализа – продемонстрировать влияние объемного рН на регулирование заряда моноионных функциональных групп, находящихся в полиэлектролитном слое, влияние характеристического показателя потока жидкости и различных электрогидродинамических параметров, включая толщину двойного электрического слоя, параметр разделения ионов, длину Дебая, параметры мягкости и т.д., определяющие общие параметры модуляции потока и селективности. Ожидается, что это исследование станет значительным шагом вперед в реальном математическом моделировании электрогидродинамики непрерывных межфазных потоков в мягких наноканалах.

DOI: 10.31857/S0023291223700052, EDN: UVFIOX

### ВВЕДЕНИЕ

В последние годы явление электроосмотического течения через наноканалы находит широкое применение при создании устройств “лаборатория на кристалле”, которые часто используются в биологическом и химическом анализе, а также в промышленных исследованиях и разработках [1–4]. При контакте заряженной поверхности с раствором электролита непосредственно у поверхности образуется слой неподвижных ионов, толщина которого близка к диаметру ионов (несколько ангстрем). Такой слой известен как слой Штерна. Помимо этого, заряд поверхности притягивает противоионы и отталкивает ко-ионы. Наконец, подвижные ионы электролита находятся в тепловом движении. Из-за комбинированного воздействия этих двух факторов рядом со слоем Штерна образуется слой подвижных зарядов. Эти два слоя вместе называются двойным электрическим слоем (ДЭС). При приложении электрического поля, на общий заряд ДЭС действует движущая сила, создающая течение. Такое течение и называется электроосмотическим. Недавно было опубликовано це-

лый ряд работ по модуляции электроосмотического течения через микро/наноканалы [3, 5–14]. Кроме того, Виноградова и соавторы [15–17] внесли значительный вклад в исследование транспорта ионов в гидрофобных нанопорах.

Вышеупомянутые статьи посвящены электрокинетике переноса ньютоновских жидкостей через узкие полости. Однако существуют различные жидкости, для которых зависимость между напряжением и скоростью деформации уже не является линейной по своей природе. Такой широкий класс жидкостей, для которых скорость деформации перестает линейно зависеть от напряжения, часто называют неньютоновскими. В частности, неньютоновскими жидкостями являются растворы полимеров, коллоидные дисперсии, биологические жидкости и т.д. Для описания поведения таких жидкостей были предложены различные модели, в том числе степенная модель, модель Гершеля–Балкли, модель Кассона, модель Бингама, модель Карро и т.д., которые используются для изучения реологического поведения неньютоновских жидкостей [18]. Однако, степенная мо-

дель является наиболее популярной благодаря своей простоте и способности описывать широкий спектр неньютоновских жидкостей. Чжао и др. в работе [19] рассмотрели математическую модель для описания электроосмотического степенного течения жидкости в щелевом микроканале. Они получили аналитическое решение распределения скоростей для нескольких конкретных значений показателя потока. Дас и Чакраборти [20] предложили математическую модель электроосмотического течения неньютоновской жидкости в микроканале и получили аналитические решения для распределения температуры, скорости и концентрации растворенных веществ в приближении Дебая–Хюккеля. Большое количество работ посвящено исследованию электроосмотического течения неньютоновских жидкостей в узких каналах [20–26]. Во всех этих работах условия заряжения стенок полагались независимыми от рН в объеме жидкости. В то же время, в ряде работ показано влияние зависимости заряжения стенок от рН на модуляцию электроосмотического течения жидкости по микроканалам. Так, Садеги с соавт. [27] изучал электроосмотическое течение жидкости и ионную проводимость в прямоугольном канале при регулировании рН. Янг и др. [28] проанализировали влияние рН на течение в переменном электрическом поле. Группа Кимани [29] экспериментально и теоретически исследовала особенности заряжения мембран и обратного осмоса при варьировании рН и состава фильтруемого раствора. Ценг с соавт. [30] рассмотрел рН-модуляцию электроосмотического течения через цилиндрическую нанопору, а Шох и соавт. [31] изучили влияние рН-контролируемой диффузии белков в плоском наноканале.

Во всех вышеупомянутых исследованиях модуляции электроосмотического течения через микро/наноканал стенки считаются непроницаемыми по своей природе. Однако существует ряд приложений, когда стенки канала покрыты слоем полимерного материала. Наноканал, к стенкам которого привит слой полимера, часто называют мягким наноканалом, а сам полимерный слой, который часто называют полиэлектролитным слоем, позволяет частичное проникновение как подвижных ионов, так и жидкой среды в приповерхностный слой стенок канала. Проникновение ионов определяется диэлектрическим эффектом разделения ионов [32–34]. Отметим, что для полиэлектролитного слоя диэлектрическая проницаемость в целом ниже, чем у объемной водной среды, что приводит к различию собственной электростатической, или борновской, энергии ионов обеих фаз [35, 36]. В результате для полиэлектролитного слоя, частично проницаемого для ионов, проникновение ионов происходит неоднородным образом и проявляется значительный эффект разделения ионов. С другой стороны, проникновение и течение жидкости определяются длиной экраниро-

вания по Бринкману в полиэлектролитном слое [37]. Чем больше глубина проникновения, тем интенсивнее оказывается течение жидкости внутри полиэлектролитного слоя. Обратим внимание, что наличие в слое полимера функциональных групп приводит к ненулевому полному объемному заряду полиэлектролитного слоя. Однако такой объемный заряд сильно зависит от рН водной среды [38].

Исследованию модуляции потока ньютоновской жидкости через мягкий наноканал посвящен целый ряд работ [25, 39–50]. Однако, в литературе до сегодняшнего момента достаточно мало внимания уделялось электроосмотическому течению через мягкий наноканал, заполненный неньютоновской жидкостью. Так, Гайквэд и др. [51] анализировали в рамках степенной модели для жидкости модуляцию электроосмотического течения через мягкий наноканал. Ли и др. в [52] изучали течение жидкости Джеффри через мягкий наноканал под действием переменного электрического поля. Патель и др. в работе [53] изучали циркулярное электроосмотическое течение степенной жидкости через мягкий наноканал. В этих исследованиях считалось, что заряд полиэлектролитного слоя не зависит от рН фонового электролита, а сам слой полностью проницаем для ионов (т.е. не учитывается эффект разделения ионов). Барман и др. [54] изучали влияние зависимости заряда мягкого слоя от рН на модуляцию потока степенной жидкости через мягкий наноканал. Однако в этом исследовании они пренебрегли эффектом разделения ионов за счет диэлектрического градиента. Нужно обратить внимание, что для полиэлектролитного слоя с частичной проницаемостью для ионов эффект разделения ионов играет существенную роль. Чем сильнее эффект разделения ионов, тем выше потенциал двойного электрического слоя у полиэлектролитного слоя, что вызывает значительную модуляцию потока через мягкий наноканал.

Чтобы восполнить существующий пробел в литературе, указанный выше, в данной работе мы рассмотрели модуляцию электроосмотического течения через мягкий наноканал, заполненный неньютоновской жидкостью, с учетом влияния как размера иона, так и определяемого рН заряжения поверхности. Для описания неньютоновской реологии жидкой среды применяется модель течения жидкости со степенным законом. Поток жидкости через полиэлектролитный слой и среду электролита описывается модифицированным уравнением движения сплошной среды. Пространственное распределение подвижных ионов соответствует распределению Больцмана, а потенциал двойного электрического слоя описывается с помощью нелинеаризованного уравнения Пуассона–Больцмана. Выходя за рамки широко используемого приближения Дебая–Хюккеля, мы представляем результаты для широкого диапазона параметров системы. Кроме того, было показано влияние па-

раметров модуляции потока на селективность подвижных ионов электролита.

### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Мы рассматриваем модуляцию электроосмотического течения через щелевой мягкий наноканал высотой  $h$ , с шириной канала много большей, чем высота. Толщина привитого полиэлектролитного слоя вдоль стенок канала обозначена  $\delta$ . Электрическое поле напряженности  $E_0$  приложено вдоль оси канала. Схематическое изображение системы показано на рис. 1.

Жидкая среда представляет собой бинарный раствор симметричного электролита с валентностью  $z_{(i=1,2)} = \pm 1$  и объемной концентрацией  $n_0$  (в мМ). Присутствие кислотной функциональной группы в полиэлектролитном слое приводит к зарядению поверхности, что, в свою очередь, приводит к ненулевой объемной плотности заряда  $\rho_{\text{fix}}$  (в мМ), которую можно записать в виде [54, 55]:

$$\rho_{\text{fix}} = \frac{z_A F N_A}{1 + 10^{\text{p}K_a - \text{pH}} \exp\left(-\frac{e\psi(y)}{k_B T}\right)}, \quad (1)$$

где  $e, F, z_A$  и  $N_A$  – элементарный заряд, постоянная Фарадея, валентность и концентрация в мМ кислотных неподвижных ионов в полиэлектролитном слое, соответственно;  $\psi(y)$  – электростатический потенциал ДЭС в точке  $y$ . Отметим, что когда  $\text{pH} \ll \text{p}K_a$ , плотность заряда полиэлектролитного слоя ( $\rho_{\text{fix}}$ ) стремится к нулю, тогда как в случае  $\text{pH} \gg \text{p}K_a$ ,  $\rho_{\text{fix}}$  стремится к своему максимальному значению  $z_A F N_A$ . Диэлектрическая проницаемость полиэлектролитного слоя,  $\epsilon_{\text{pel}}$ , в целом ниже, чем диэлектрическая проницаемость объемной жидкой среды  $\epsilon_f$ , что, в свою очередь, приводит к эффекту разделения ионов. Отметим, что параметр  $\xi$  является параметром разделения ионов и определяется как  $\xi = \epsilon_{\text{pel}}/\epsilon_f$ . Разницу в энергии Борна обеих фаз можно выразить как:

$$\Delta W_i = \frac{(z_i e)^2}{8\pi r_i} \left( \frac{1}{\epsilon_{\text{pel}}} - \frac{1}{\epsilon_f} \right).$$

Здесь  $r_i$  означает радиус гидратированного иона, который считается равным для катиона и аниона электролита [32]. Уравнение Пуассона–Больцмана для электростатического потенциала можно записать в виде [54]:

$$\left. \begin{aligned} -\epsilon_{\text{pel}} \frac{d^2 \psi}{dy^2} &= \rho_{\text{pel}}, & -h \leq y \leq -h + \delta \\ -\epsilon_e \frac{d^2 \psi}{dy^2} &= \rho_e, & -h + \delta \leq y \leq 0 \end{aligned} \right\}, \quad (2)$$

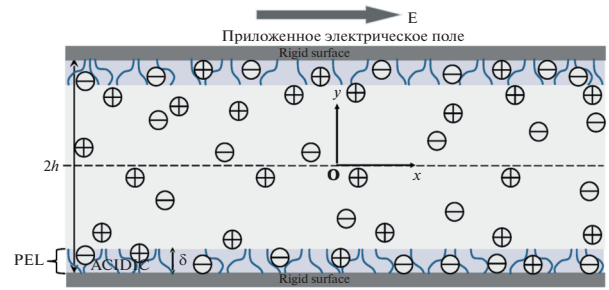


Рис. 1. Схематическое изображения течения по мягкому наноканалу (каналу, стенки которого покрыты полимером). Rigid surface – жесткая основа стенок канала; PEL – полиэлектролитный слой; остальные обозначения – в тексте.

где

$$\rho_e = z_A F \{n_+(x) - n_-(x)\}, \quad (3)$$

$$\rho_{\text{pel}} = \rho_e f_i + \rho_{\text{fix}},$$

и

$$f_i = \exp\left(-\frac{\Delta W_i}{k_B T}\right).$$

Пространственное распределение концентрации ионов каждого вида определяется распределением Больцмана:

$$f_i = \exp\left(-\frac{\Delta W_i}{k_B T}\right).$$

Для того, чтобы привести уравнения в безразмерный вид, мы введем параметр масштаба для потенциала  $\psi_0 = k_B T/e$ , в то время как  $y$  координаты нормируются на половину высоты канала. Таким образом, в безразмерном виде уравнение (2) записывается как:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \bar{\psi}}{d\bar{y}^2} &= \frac{(\kappa h)^2}{\xi} \left\{ \text{sh} \bar{\psi} \exp(-\Delta \bar{W}_i) - \left( \frac{z_A N_A}{2n_0} \right) \times \right. \\ &\times \left. \frac{1}{1 + 10^{\text{p}K_a - \text{pH}} \exp(-\bar{\psi})} \right\}, & -1 \leq \bar{y} \leq -1 + \bar{\delta} \\ \frac{d^2 \bar{\psi}}{d\bar{y}^2} &= (\kappa h)^2 \text{sh} \bar{\psi}, & -1 + \bar{\delta} \leq \bar{y} \leq 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Безразмерный коэффициент  $\kappa h$  соответствует параметру Дебая–Хюккеля, где обратная дебаевская длина  $\kappa$  определяется как  $\kappa = \left( \frac{2F^2 n_0}{\epsilon_e \psi_0} \right)^{1/2}$ . Приведенные величины определяются как  $\bar{y} = y/h$ ,  $\bar{\delta} = \delta/h$  и  $\bar{\psi} = e\psi/k_B T$ ,  $\Delta \bar{W}_i = \Delta W_i/k_B T$ . Граничные условия для потенциала двойного электрического слоя  $\psi(y)$  можно записать как

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{\Psi}}{d\bar{y}} \Big|_{\bar{y}=-1} &= 0 \\ \bar{\Psi} \Big|_{\bar{y}=-1+\bar{\delta}-} &= \bar{\Psi} \Big|_{\bar{y}=-1+\bar{\delta}+} \\ \frac{d\bar{\Psi}}{d\bar{y}} \Big|_{\bar{y}=-1+\bar{\delta}+} &= \xi \frac{d\bar{\Psi}}{d\bar{y}} \Big|_{\bar{y}=-1+\bar{\delta}-} \\ \frac{d\bar{\Psi}}{d\bar{y}} \Big|_{\bar{y}=0} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Скорость течения жидкости в объеме электролита определяется уравнением движения сплошной среды. Для описания течения в полиэлектролитном слое необходимо рассмотреть модифицированное уравнение движения сплошной среды с членом Дарси, учитывающим силу трения, которая действует на жидкость при течении сквозь полимерный слой [56, 57]. Кроме того, мы используем условие непрерывности несжимаемой жидкости. Таким образом, уравнения течения жидкости поперек всего профиля канала могут быть записаны в виде:

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{Dq}{Dt} &= -\nabla p + \nabla \tau + \rho_{\text{pel}} E - \frac{\mu^*}{K^*} q |q|^{n-1}, & -h \leq y \leq -h + \delta \\ \rho \frac{Dq}{Dt} &= -\nabla p + \nabla \tau + \rho_e E, & -h + \delta \leq y \leq 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

и

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = 0 \quad (7)$$

где  $\mu^* = m\epsilon^n$ ,  $\tau$  и  $q$  – модифицированный коэффициент консистенции неньютоновской степенной жидкости в полиэлектролитном слое [56, 57], тензор напряжений и вектор скорости, соответственно. Модифицированная проницаемость  $K^*$ , согласно Кристоферу и Миддлмену, выражается как [54, 58]

$$K^* = \frac{6}{25} \left\{ \frac{n\epsilon}{3n+1} \right\}^n \left\{ \frac{\epsilon d_s}{3(1-\epsilon)} \right\}^{n+1}.$$

Здесь  $\epsilon$  определяет степень пористости полиэлектролитного слоя,  $d_s$  – диаметр сегмента полимерной молекулы. Компонента скорости вдоль аксиального направления зависит только от  $y$ :  $u = u(y)$ ,

а в поперечном направлении сводится к  $v = 0$  для полностью стационарного электроосмотического течения в условиях пренебрежимо малого давления. Тензор сдвиговых напряжений может быть рассчитан как  $\tau = \mu \left( \frac{du}{dy} \right)$ , где вязкость жидкости в рамках степенной модели жидкости может быть выражена, как:

$$\mu = m \left| \frac{du}{dy} \right|^{n-1}, \quad (8)$$

где  $m$  – коэффициент консистенции жидкости, подчиняющейся степенному закону (за пределами полиэлектролитного слоя), а  $n$  – характеристический показатель потока жидкости [22, 54]. Таким образом, аксиальная компонента скорости в рамках уравнения движения сплошной среды выражается [22, 57] в виде

$$\frac{d}{dy} \left( \mu \frac{du}{dy} \right) = \begin{cases} \left( \epsilon_{\text{pel}} \frac{d^2 \Psi}{dy^2} \right) E_0 + \frac{\mu^*}{K^*} u |u|^{n-1}; & -h \leq y \leq -h + \delta \\ \left( \epsilon_f \frac{d^2 \Psi}{dy^2} \right) E_0; & -h + \delta \leq y \leq 0 \end{cases} \quad (9)$$

В качестве характерной скорости используется обобщенная электроосмотическая скорость Гельмгольца–Смолуховского (ГС), определяемая как

$U_{\text{HS}}^N = n\kappa \frac{1-n}{n} (\epsilon_f E_0 \Psi_0 / m)^{\frac{1}{n}}$ , где  $U_{\text{HS}} = (\epsilon_f E_0 \Psi_0 / m)$  относится к эталонной скорости Гельмгольца–Смолуховского для ньютоновской жидкости ( $n = 1$ ). Таким образом, приведенная форма уравнения для скорости жидкости (9) для стационарных условий при низких значениях чисел Рейнольдса может быть записана в виде:

$$\frac{d}{d\bar{y}} \left( \frac{d\bar{u}}{d\bar{y}} \frac{d\bar{u}}{d\bar{y}} \right) = \begin{cases} \xi \frac{(\kappa h)^{n-1}}{n^n} \frac{d^2 \bar{\Psi}}{d\bar{y}^2} + \beta^2 \bar{u} |\bar{u}|^{n-1}, & -1 \leq \bar{y} \leq -1 + \bar{\delta} \\ \frac{(\kappa h)^{n-1}}{n^n} \frac{d^2 \bar{\Psi}}{d\bar{y}^2}, & -1 + \bar{\delta} \leq \bar{y} \leq 0 \end{cases} \quad (10)$$

где параметр мягкости  $\beta = 1/\sqrt{Da}$  определяет степень влияния дополнительной силы трения в поли-

электролитном слое, а величина  $Da = K^*/\varepsilon^n h^{n+1}$  соответствует поправке Дарси [32, 54]. Отметим, что увеличение  $\beta$  снижает полный поток через полиэлектролитный слой. Граничные условия для аксиальной скорости могут быть записаны в виде

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}|_{\bar{y} = -1} &= 0 \\ \bar{u}|_{\bar{y} = (-1 + \delta)-} &= \bar{u}|_{\bar{y} = (-1 + \delta)+} \\ \frac{d\bar{u}}{d\bar{y}}|_{\bar{y} = (-1 + \delta)-} &= \frac{d\bar{u}}{d\bar{y}}|_{\bar{y} = (-1 + \delta)+} \\ \frac{d\bar{u}}{d\bar{y}}|_{\bar{y} = 0} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Для решения связанного набора уравнений (4) и (10) с граничными условиями (5) и (11), мы использовали итеративную схему, основанную на методе конечных разностей. Так, сначала итеративно решались уравнения (4), затем полученное решение использовалось для решения уравнения для скоростей. Считалось, что решение сошлось при достижении абсолютной разницы между решениями последовательных итераций  $10^{-6}$ . Для валидации схемы численного решения мы сравнили численное решение с аналитическим решением для поля скоростей жидкости и потенциала ДЭС в пределе Дебая–Хюккеля. Результаты сравнения и код для валидации представлены в Приложении А.

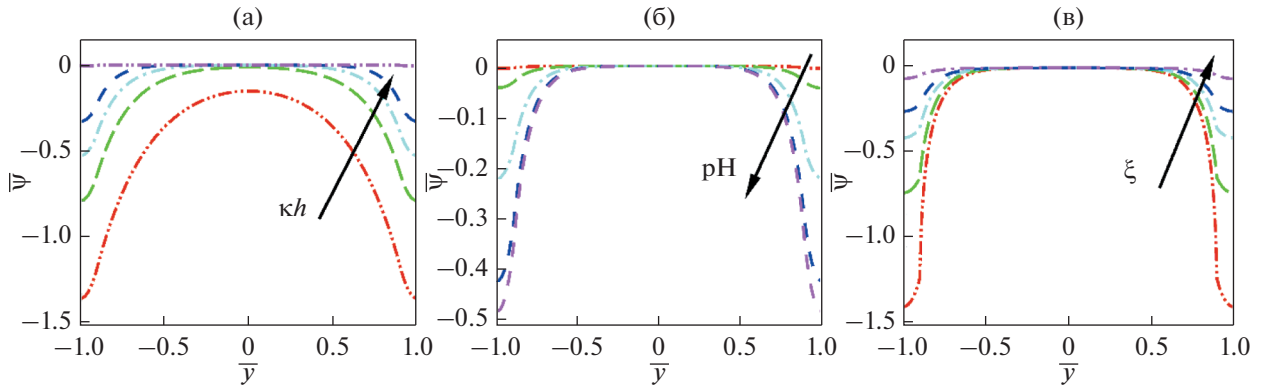
### ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

В этой работе изучено влияние различных электрогидродинамических параметров на течение жидкости и распределение потенциала в мягком наноканале. На наблюдаемую физику течения влияют такие параметры системы, как показатель мягкости  $\beta$ , рН-регулируемая ионизация моновалентных функциональных групп в полиэлектролитном слое, величина  $\xi$  (отношение диэлектрических проницаемостей полиэлектролитного слоя и электролита), характеризующая эффект разделения ионов,  $kh$  (параметр Дебая–Хюккеля, относящийся к концентрации раствора электролита), распределение мономеров в полиэлектролитном слое, влияющее на течение. Кроме того, мы дополнительно выявили эффект изменения сдвиговой вязкости жидкости, влияющего на общую модуляцию потока, которая, в свою очередь, регулируется характеристическим показателем жидкости  $n$ . В качестве электролита в работе рассматривается раствор КСl, при этом высота канала и толщина полиэлектролитного слоя берутся равными  $h = 100$  нм и  $\delta = 0.1h$  соответственно. Влияние рН на ионизируемые моновалентные функциональные группы колеблется от 2 до 12 при  $pK_a = 4$  (карбоксильные группы), параметр Дебая–

Хюккеля обычно колеблется от 1 до 100 при концентрации электролита от  $10^{-2}$  до  $10^2$  мМ. Известно, что параметр мягкости  $\beta$  обычно лежит в пределах от 1 до 10 и оказывает существенное влияние на модуляцию потока. Диэлектрическая проницаемость полиэлектролитного слоя изменяется таким образом, чтобы параметр распределения ионов находился в пределах от 0.1 до 1.

На рис. 2 показано распределение электростатического потенциала ДЭС при различных физико-химических параметрах, а именно  $kh$ , рН и  $\xi$ , соответственно. На рис. 2а представлены результаты для различных значений  $kh$  при фиксированных значениях других параметров. При этом низкие значения  $kh$  соответствуют низкой концентрации электролита и, соответственно, толстому ДЭС, поскольку чем выше значения  $kh$ , тем выше концентрация противоионов вблизи поверхности и ниже потенциал ДЭС. На рис. 2б представлен электростатический потенциал для различных значений рН электролита. Представленные данные показывают, что с повышением рН растет и величина потенциала ДЭС. Это можно объяснить тем, что функциональная группа, находящаяся в полиэлектролитном слое, имеет кислую природу, и, таким образом, общее количество заряда полиэлектролитного слоя увеличивается с повышением рН. Однако влияние рН незначительно, когда  $pH \geq 8$ . При этом критическом значении рН зарядение полиэлектролитного слоя достигает своего максимального значения, и, таким образом, дальнейшее увеличение рН не приводит к изменению электростатического потенциала. На рис. 2в представлены результаты для различных значений  $\xi$ . Разница в значениях энергии Борна в полиэлектролитном слое и растворе электролита уменьшается по мере увеличения  $\xi$ , что снижает электростатическую мягкость полиэлектролитного слоя и, следовательно, увеличивает его проницаемость для противоионов. В результате по мере роста  $\xi$  быстрее происходит нейтрализация полиэлектролитного слоя, и, следовательно, снижается величина потенциала ДЭС.

Теперь обратимся к реологическому поведению жидкости при модуляции потока через мягкие наноканалы. На рис. 3, 4 и 5 показаны распределения средней скорости для степенного индекса  $n < 1$  (псевдопластическая жидкость),  $n = 1$  (ньютоновская жидкость) и  $n > 1$  (дилатантная жидкость). Для возможности сравнения, средний профиль скорости показан в размерных значениях. На рис. 3 результаты для средней скорости потока в зависимости от  $kh$  показаны для различных вариантов выбора объемного рН. Влияние рН на заряд полиэлектролитного слоя, состоящего из моновалентных ионизируемых функциональных групп (карбоксильных групп) [55], играет существен-



**Рис. 2.** Распределение потенциала в мягком наноканале (а)  $\kappa h = 3, 5, 7, 10$  и  $100$  при значениях остальных параметров:  $\xi = 1$ , pH 7; (б) pH 2, 3, 4, 5 и 12,  $\kappa h = 10$  и  $\xi = 1$ ; (в)  $\xi = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$  и  $1$ ,  $\kappa h = 10$ . Во всех системах использовались следующие валентность, концентрация электролита и параметр мягкости:  $z = -1$ ,  $N_A = 1$  mM, и  $\beta = 1$ .

ную роль в модуляции потока. Так, величина потенциала ДЭС увеличивается по мере увеличения pH при фиксированном значении параметра степенного закона, что приводит к увеличению общего потока через канал. Видно, что при увеличении значения pH наблюдается рост скорости, однако при  $\text{pH} \geq 8$  изменение скорости с ростом pH становится незначительным. При этом средняя скорость потока уменьшается по мере роста  $\kappa h$  за счет уменьшения полного заряда полиэлектролитного слоя. На рис. 4 показаны результаты для усредненной скорости течения в зависимости от pH при различных значениях  $\xi$ . Мы видим, что при увеличении  $\xi$  скорость потока также уменьшается. Это объясняется тем, что по мере увеличения проникновения противоионов через границу раздела полиэлектролитный слой - электролит величина потенциала ДЭС и, следовательно, полная скорость потока через канал, уменьшается. На рис. 5 показана средняя скорость потока в зависимости от pH при различных параметрах мягкости. Заметим, что с увеличением  $\beta$  поток также уменьшается. Это можно объяснить тем, что по мере увеличения проникновения противоионов через границу раздела полиэлектролитный слой - электролит величина потенциала ДЭС и, следовательно, полная скорость потока через пройденный канал, уменьшается. Кроме того, существенное влияние на общий поток оказывает характеристический показатель жидкости. С увеличением  $n$  вязкость жидкости увеличивается, что уменьшает суммарный поток ионизированной жидкости через мягкий наноканал.

#### Селективность подвижных ионов

Селективность подвижных ионов определяется как

$$S = \frac{|I_c| - |I_a|}{|I_c| + |I_a|},$$

где  $I_j$  представляет собой среднюю плотность тока для  $j$ -го ( $j = c, a$ ) вида ионов в канале. Плотности ионного тока для катиона ( $j = c$ ) и аниона ( $j = a$ ) можно записать как:

$$I_j = z_j F M_j, \quad (12)$$

а поток  $M_j$  определен как:

$$M_{j,x} = -D_j \frac{\partial n_j}{\partial x} + [\mu_j E_0 + u(y)] n_j, \quad (13)$$

где  $q$  – поле скоростей,  $\mu_j (z_j D_j F / RT)$  – электрофоретическая подвижность и  $D_j$  – коэффициент диффузии. Аксиальную компоненту потока можно записать как:

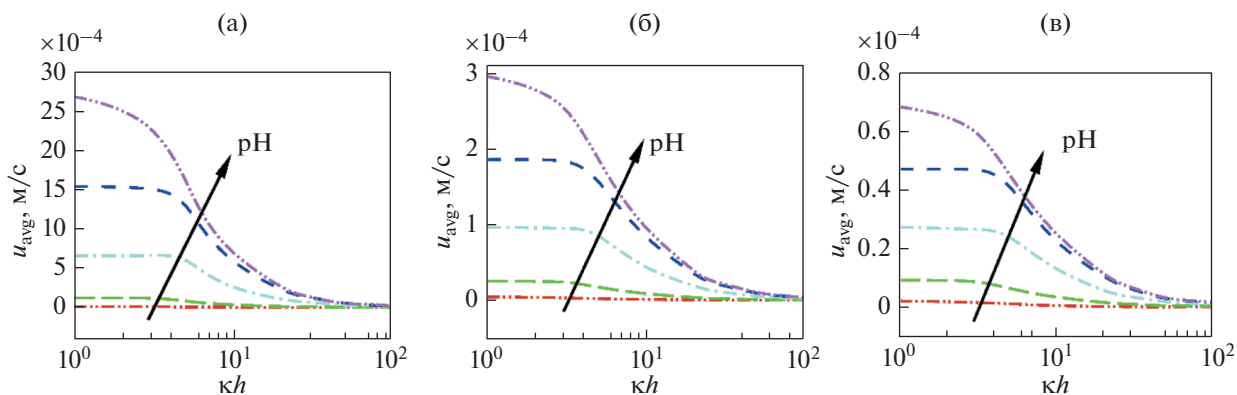
$$M_{j,x} = -D_j \frac{\partial n_j}{\partial x} + [\mu_j E_0 + u(y)] n_j, \quad (14)$$

И, таким образом, приведенный ионный ток  $\bar{I}_{j,x}$  равен:

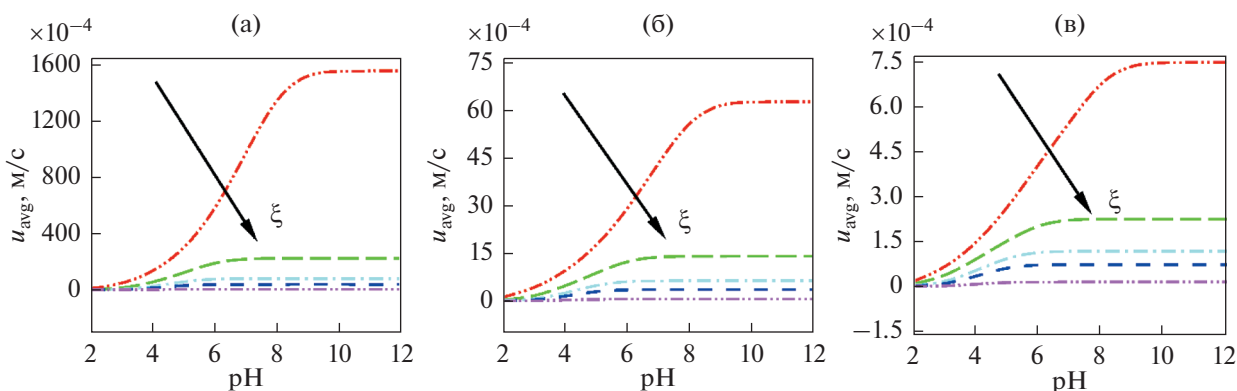
$$\bar{I}_{j,x} = -\frac{z_j}{Pe_j} \frac{\partial \bar{n}_j}{\partial x} + \Lambda \frac{z_j^2 \bar{n}_j}{Pe_j} + z_j \bar{n}_j \bar{u}, \quad (15)$$

где ток нормирован на  $I_0 = F n_0 U_{\text{HS}}$ , скорость нормируется на  $U_{\text{HS}}$  – скорость Гельмгольца–Смолуховского, а  $Pe_j (U_{\text{HS}} h / D_j)$  – число Пекле для ньютоновской жидкости. Число  $\Lambda (E_0 h / \psi_0)$  дает нормированное значение напряженности приложенного электрического поля. В данном исследовании мы рассматриваем модуляцию потока через бесконечно длинный щелевой мягкий наноканал, таким образом, вклад диффузионного тока вдоль аксиального направления пренебрежимо мал [48]. Если им пренебречь, то уравнение (15) сводится к:

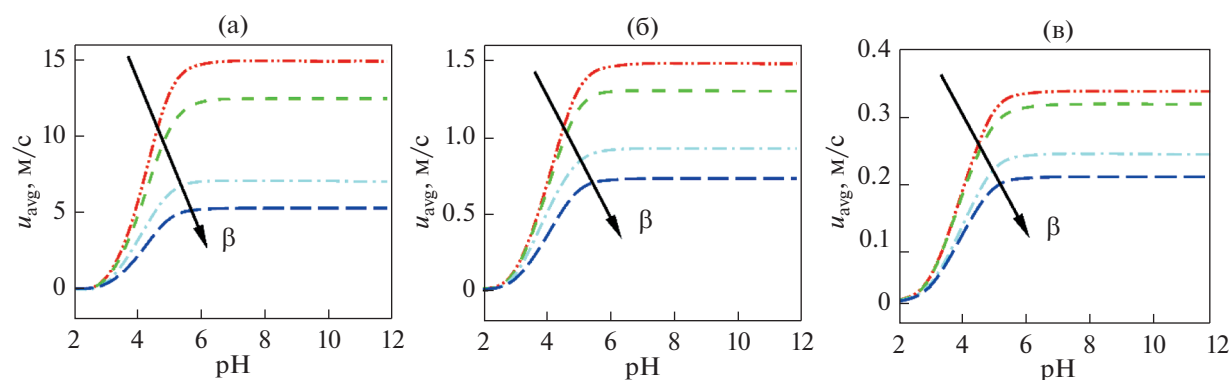
$$\bar{I}_{j,x} = \frac{\Lambda z_j^2 \bar{n}_j}{Pe_j} + z_j \bar{n}_j \bar{u}, \quad (16)$$



**Рис. 3.** Распределение средней аксиальной скорости как функция от параметра Дебая–Хюккеля в мягком наноканале с полимерными стенками для (а)  $n = 0.8$ , (б)  $n = 1$ , и (в)  $n = 1.2$ , при pH 2, 3, 4, 5 и 12. Направление роста pH указано стрелками на графиках. Значения остальных параметров модели брались следующими:  $z = -1$ ,  $\xi = 1$ ,  $N_A = 1$  mM, и  $\beta = 1$ .

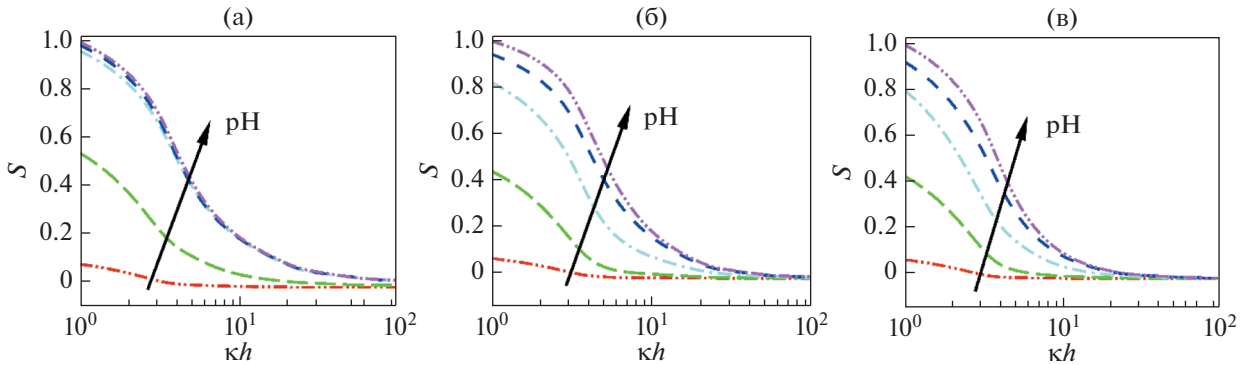


**Рис. 4.** Распределение средней аксиальной скорости как функции pH в мягком наноканале с полимерными стенками, для (а)  $n = 0.8$ , (б)  $n = 1$  и (в)  $n = 1.2$ , при значениях  $\xi = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$  и  $1$ . Направление увеличения  $\xi$  показано стрелкой. Постоянные параметры модели брались следующими:  $z = -1$ ,  $N_A = 1$  mM,  $\beta = 1$ .



**Рис. 5.** Распределение средней аксиальной скорости как функции pH в мягком наноканале с полимерными стенками, для (а)  $n = 0.8$ , (б)  $n = 1$  и (в)  $n = 1.2$ , при значениях  $\beta = 1, 3, 5$  и  $10$ . Направление увеличения  $\beta$  показано стрелкой. Постоянные параметры модели брались следующими:  $z = -1$ ,  $N_A = 1$  mM,  $\xi = 1$ .





**Рис. 6.** Распределение селективности как функция параметра Дебай–Хюккеля для мягкого наноканала с полимерными стенками для (а)  $n = 0.8$ , (б)  $n = 1$  и (в)  $n = 1.2$  при значениях рН 2, 3, 4, 5 и 12. Направление роста рН указано стрелками на графиках. Постоянные параметры модели брались следующими  $z = -1$ ,  $\xi = 1$ ,  $N_A = 1$  мМ и  $\beta = 1$ .

а средняя аксиальная плотность тока за счет  $j$ -го типа ионов через весь наноканал с полимерными стенками выражается как

$$I_j = \int_0^1 \bar{I}_{j,x} d\bar{y}, \quad (17)$$

На рис. 6а–6в показаны результаты для параметра селективности в зависимости от  $\kappa h$  и различных значениях  $n = 0.8, 1$  и  $1.2$ .

Влияние рН на полиэлектролитный слой с одновалентными ионизируемыми функциональными группами (карбоксылными группами) играет важную роль в модуляции потока по всему каналу. Величина потенциала ДЭС увеличивается по мере увеличения рН при фиксированном значении характеристического показателя потока, что приводит к повышению общей селективности через канал. Видно, что с увеличением значения рН наблюдается рост селективности, но при  $\text{pH} \geq 8$  селективности практически не отличаются. Распределение селективности уменьшается с увеличением  $\kappa h$  из-за уменьшения суммарного заряда полиэлектролитного слоя. Основное наблюдение состоит в том, что  $|S(n)| < 1$  для всех  $n = 0.8, 1$  и  $1.2$ ; а также в том, что для жидкостей с  $n < 1$  часто появляется профиль селективности.

## ВЫВОДЫ

В этой работе была исследована модуляция электроосмотического течения и ионной селективности в мягком наноканале. Для моделирования неньютоновской жидкости в канале используется хорошо известная степенная модель. Математическая модель в нашей работе основана на нелинейном уравнении Пуассона–Больцмана для

потенциала двойного электрического слоя (ДЭС) и уравнении движения сплошной среды в объеме наноканала и полиэлектролитном слое. Мы используем численную схему на основе конечных разностей для получения скорости потока и других неизвестных величин для широкого диапазона параметров системы. Кроме того, были получены аналитические результаты для скорости потока и потенциала ДЭС при слабом зарядении. Было показано, что эффект разделения ионов, вызываемый наличием градиента диэлектрической проницаемости, оказывает существенное влияние на модуляцию потока и, следовательно, на параметр ионной селективности. Влияние эффекта разделения ионов еще более усиливается при увеличении значений объемного рН. Однако при  $\text{pH} \geq 8$  его воздействие постепенно выходит на плато. Влияние эффекта разделения ионов играет заметную роль для толстых ДЭС, в которых заряд полиэлектролитного слоя нейтрализуется слабее. Также было показано влияние реологического поведения жидкости и параметра мягкости полиэлектролитного слоя на модуляцию потока и селективность подвижных ионов электролита.

## ПРИЛОЖЕНИЕ А

### *Аналитический результат для потенциала ДЭС и аксиальной скорости при слабом потенциале*

Мы получили замкнутое решение связанного набора уравнений для электростатического потенциала и аксиальной скорости для ньютоновской жидкости (т.е. показатель потока  $n = 1$ ) в случае, когда заряд полиэлектролитного слоя мал, так что потенциал ДЭС меньше, чем тепловой потенциал. В рамках этих предположений уравнение ДЭС-потенциала может быть линеаризовано в следующем виде:



$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\bar{\Psi}}{d\bar{y}^2} &= P_1^2\bar{\Psi} - Q_A, & -1 \leq \bar{y} \leq -1 + \bar{\delta} \\ \frac{d^2\bar{\Psi}}{d\bar{y}^2} &= (\kappa h)^2 \bar{\Psi}, & -1 + \bar{\delta} \leq \bar{y} \leq 0 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Используя линеаризованное уравнение Пуассона–Больцмана, мы можем дополнительно вывести линеаризованную форму уравнения потока жидкости:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\bar{u}}{d\bar{y}^2} - \beta^2\bar{u} &= b_1\bar{\Psi}, & -1 \leq \bar{y} \leq -1 + \bar{\delta} \\ \frac{d^2\bar{u}}{d\bar{y}^2} &= b_2\bar{\Psi}, & -1 + \bar{\delta} \leq \bar{y} \leq 0 \end{aligned} \right\}, \quad (19)$$

где  $b_1$  и  $b_2$  определяются как  $b_1 = (\kappa h)^2 \exp(-\Delta\bar{W}_i)$  и  $b_2 = (\kappa h)^2$ . Решая уравнение (18) вместе с граничным условием (5), можно получить потенциал ДЭС в виде:

$$\bar{\Psi} = \begin{cases} C_{11} \exp\{P_1\bar{y}\} + C_{12} \exp\{-P_1\bar{y}\} + \frac{Q_A}{P_1^2}, & -1 \leq \bar{y} \leq -1 + \bar{\delta} \\ C_{13} \exp\{(\kappa h)\bar{y}\} + C_{14} \exp\{-(\kappa h)\bar{y}\}, & -1 + \bar{\delta} \leq \bar{y} \leq 0 \end{cases}, \quad (20)$$

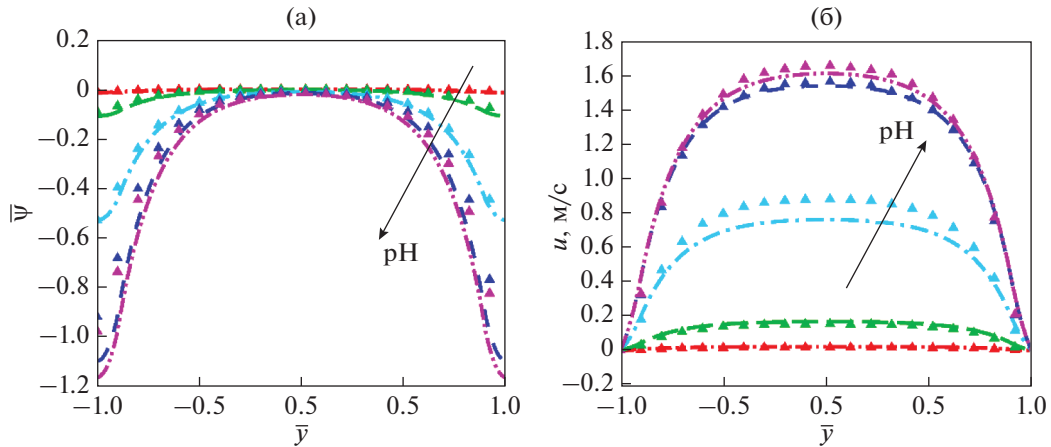
где

$$\begin{aligned} P_1^2 &= \frac{(\kappa h)^2}{\xi} \exp(-\Delta\bar{W}_i); \\ Q_A &= \frac{(\kappa h)^2}{\xi} \left( \frac{z_A N_A}{2n_0} \right) \frac{1}{1 + 10^{pK_a - \text{pH}}}; \\ C_{11} &= C_{12} \exp(2P_1); \quad C_{12} = -\frac{A_{11}B_{13}}{A_{12}B_{13} - A_{13}B_{12}}; \\ C_{13} &= C_{14} = \frac{A_{11}B_{12}}{A_{12}B_{13} - A_{13}B_{12}}; \\ A_{11} &= \frac{Q_A}{P_1^2}; \quad A_{12} = 2\exp(P_1) \text{ch}(P_1\bar{\delta}); \\ A_{13} &= -2\text{ch}(\kappa h(-1 + \bar{\delta})); \\ B_{12} &= 2\left(\frac{P_1\xi}{\kappa h}\right) \exp(P_1) \text{sh}(P_1\bar{\delta}); \\ B_{13} &= -2\text{sh}(\kappa h(-1 + \bar{\delta})). \end{aligned} \quad (21)$$

Решая уравнение (19) с учетом граничных условий (11), можно получить аксиальную составляющую скорости для ньютоновской жидкости в следующем виде:

$$\bar{u} = \begin{cases} d_{11} \exp(\beta\bar{y}) + d_{12} \exp(-\beta\bar{y}) + S(\bar{y}); & -1 \leq \bar{y} \leq -1 + \bar{\delta} \\ d_{13} + d_{14}\bar{y} + T(\bar{y}); & -1 + \bar{\delta} \leq \bar{y} \leq 0 \end{cases}, \quad (22)$$

где



**Рис. 7.** Тестирование программ расчета на основе сопоставления теоретических и расчетных результатов для (а) распределения потенциала и (б) распределения скорости в мягком наноканале с привитым полимером проиллюстрировано с использованием приближения Дебая–Хюккеля для  $\kappa h = 3$  для ньютоновской жидкости ( $n = 1$ ) при различных рН 2, 3, 4, 11 и 12. Постоянные параметры модели брались следующими:  $z = -1$ ,  $N_A = 1$  мМ,  $\beta = 1$ . Пунктирными линиями показаны результаты расчета, а треугольниками – аналитические результаты.

$$\begin{aligned}
 S(\bar{y}) &= \frac{b_1}{P_1^2 - \beta^2} (C_{11} \exp(P_1 \bar{y}) + C_{12} \exp(-P_1 \bar{y})) - \\
 &\quad - \left( \frac{b_1 Q_A}{P_1^2 \beta^2} \right) + \frac{b_2}{\beta^2}; \\
 T(\bar{y}) &= (C_{13} \exp((\kappa h) \bar{y}) + C_{14} \exp(-(\kappa h) \bar{y})) \\
 d_{11} &= -d_{12} \exp(2\beta) - S(-1) \exp(\beta); \\
 d_{12} &= \frac{1}{2\beta \exp(\beta) \operatorname{ch}(\beta \bar{\delta})} (-S(-1) \beta \exp(\beta \bar{\delta}) + \\
 &\quad + T'(0) - T'(-1 + \bar{\delta}) + S'(-1 + \bar{\delta})); \\
 d_{13} &= -2d_{14} \exp(\beta) \operatorname{sh}(\beta \bar{\delta}) - T(-1 + \bar{\delta}) - \\
 &\quad - S(-1) \exp(\beta \bar{\delta}) + (-1 + \bar{\delta}) T'(0) + S(-1 + \bar{\delta}); \\
 d_{14} &= -T'(0)
 \end{aligned} \quad (23)$$

На рис. 7 показана достоверность численно рассчитанных электростатического потенциала и аксиальной скорости. Используемые параметры модели показаны в подписях к рисункам. Согласно рис. 7, для слабозаряженного ДЭС численные результаты хорошо согласуются с теоретическими. Когда есть значительный эффект рН и эффект разделения ионов, потенциал ДЭС может превышать предел Дебая–Хюккеля, для изучения проблемы необходимо использовать нелинейную модель, а в аналитических и численных результатах обнаруживается расхождение. Эти результаты показывают, что данная численная схема способна точно отражать явления электрокинетического переноса в мягком наноканале.

#### КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Figey D., Pinto D.* Lab-on-a-chip: a revolution in biological and medical sciences // *Analytical Chemistry*. 2000. V. 72. P. 330A–335A.
2. *Zeng S., Chen C.H., Mikkelsen Jr, J.C., Santiago J.G.* Fabrication and characterization of electroosmotic micropumps // *Sensors and Actuators B: Chemical*. 2001. V. 79. № 2–3. P. 107–114.
3. *Howard A.S., Abraham D.S., Armand A.* Engineering flows in small devices: microfluidics toward a lab-on-a-chip // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 2004. V. 36. P. 381–411.
4. *Xiayan W., Chang Ch., Shili W., Shaorong L.* Electroosmotic pumps and their applications in microfluidic systems // *Microfluidics and Nanofluidics*. 2009. V. 6. № 2. P. 145–162.
5. *Dutta P., Beskok A.* Analytical solution of combined electroosmotic/pressure driven flows in two-dimensional straight channels: finite Debye layer effects // *Analytical Chemistry*. 2001. V. 73. № 9. P. 1979–1986.
6. *Bhattacharyya S., Zheng Z., Conlisk A.T.* Electro-osmotic flow in two-dimensional charged micro- and nanochannels // *Journal of Fluid Mechanics*. 2005. V. 540. P. 247–267.
7. *Bhattacharyya S., Ameeray Kumar Nayak.* Electroosmotic flow in micro/nanochannels with surface potential heterogeneity: an analysis through the Nernst-Planck model with convection effect // *Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects*. 2009. V. 339. № 1–3. P. 167–177.
8. *Bhattacharyya S., Ameeray Kumar Nayak.* Combined effect of surface roughness and heterogeneity of wall potential on electroosmosis in microfluidic/nanofluidic channels // *Journal of Fluids Engineering*. 2010. V. 132. № 4. P. 041103.
9. *Alireza Ahmadian Yazdi, Arman Sadeghi, Mohammad Hassan Saidi.* Electrokinetic mixing at high zeta potentials: ionic size effects on cross stream diffusion //

- Journal of Colloid and Interface Science. 2015. V. 442. P. 8–14.
10. Partha P. Gopmandal, Ohshima H. Modulation of electroosmotic flow through electrolyte column surrounded by a dielectric oil layer // Colloid and Polymer Science. 2017. V. 295. № 7. P. 1141–1151.
  11. Santanu Saha, Partha P. Gopmandal, Ohshima H. Steady/unsteady electroosmotic flow through nanochannel filled with electrolyte solution surrounded by an immiscible liquid // Colloid and Polymer Science. 2017. V. 295. № 12. P. 2287–2297.
  12. Milad Azari, Arman Sadeghi, Suman Chakraborty. Electroosmotic flow and heat transfer in a heterogeneous circular microchannel // Applied Mathematical Modelling. 2020. V. 87. P. 640–654.
  13. De Simanta, Gopmandal Partha P., Kumar B., Sinha R.K. Effect of hydrophobic patch on the modulation of electroosmotic flow and ion selectivity through nanochannel // Applied Mathematical Modelling. 2020. V. 87. P. 488–500.
  14. Mathias Dietzel, Steffen Hardt. Electroosmotic flow in small-scale channels induced by surface-acoustic waves // Physical Review Fluids. 2020. V. 5. № 12. P. 123702.
  15. Feuillebois F., Bazant M.Z., Vinogradova O.I. Effective slip over superhydrophobic surfaces in thin channels // Physical Review Letters. 2009. V. 102. № 2. P. 026001.
  16. Vinogradova O.I., Silkina E.F., Asmolov E.S. Enhanced transport of ions by tuning surface properties of the nanochannel // Physical Review E. 2021. V. 104. № 3. P. 035107.
  17. Vinogradova O.I., Silkina E.F., Asmolov E.S. Transport of ions in hydrophobic nanotubes // Physics of Fluids. 2022. V. 34. № 12. P. 122003.
  18. Chhabra R.P., Richardson J.F. Non-Newtonian flow and applied rheology: engineering applications // Butterworth-Heinemann, 2011.
  19. Zhao C., Zholkovskij E., Masliyah J.H., Yang Ch. Analysis of electroosmotic flow of power-law fluids in a slit microchannel // Journal of Colloid and Interface Science. 2008. V. 326. № 2. P. 503–510.
  20. Das Siddhartha, Chakraborty Suman. Analytical solutions for velocity, temperature and concentration distribution in electroosmotic microchannel flows of a non-Newtonian bio-fluid // Analytica Chimica Acta. 2006. V. 559. № 1. P. 15–24.
  21. Chakraborty Suman. Electroosmotically driven capillary transport of typical non-Newtonian biofluids in rectangular microchannels // Analytica Chimica Acta. 2007. V. 605. № 2. P. 175–184.
  22. Babaie A., Sadeghi A., Saidi M.H. Combined electroosmotically and pressure driven flow of power-law fluids in a slit microchannel // Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics. 2011. V. 166. № 14–15. P. 792–798.
  23. Zhao C., Yang Ch. An exact solution for electroosmosis of non-Newtonian fluids in microchannels // Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics. 2011. V. 166. № 17–18. P. 1076–1079.
  24. Zhao C., Yang Ch. Electro-osmotic mobility of non-Newtonian fluids // Biomicrofluidics. 2011. V. 5. № 1. P. 014110.
  25. Bag Naren, Bhattacharyya S., Gopmandal P.P., Ohshima H. Electroosmotic flow reversal and ion selectivity in a soft nanochannel // Colloid and Polymer Science. 2018. V. 296. № 5. P. 849–859.
  26. Bhattacharyya S., Kundu D. Enhanced electroosmotic flow, conductance and ion selectivity of a viscoplastic fluid in a hydrophobic cylindrical pore // Applied Mathematical Modelling. 2022. V. 111. P. 802–817.
  27. Sadeghi M., Saidi M.H., Sadeghi A. Electroosmotic flow and ionic conductance in a pH-regulated rectangular nanochannel // Physics of Fluids. 2017. V. 29. № 6. P. 062002.
  28. Yang M., Buren M., Chang L., Zhao Y. Time periodic electroosmotic flow in a pH-regulated parallel-plate nanochannel // Physica Scripta. 2022. V. 97. № 3. P. 030003.
  29. Kimani E.M., Pranić M., Porada S., Kemperman A.J.B., Ryzhkov I.I., van der Meer W.G.J., Biesheuvel P.M. The influence of feedwater pH on membrane charge ionization and ion rejection by reverse osmosis: an experimental and theoretical study // Journal of Membrane Science. 2022. V. 660. P. 120800.
  30. Tseng Shiojenn, Tai Yi-Hsuan, Hsu Jyh-Ping. Electrokinetic flow in a pH-regulated, cylindrical nanochannel containing multiple ionic species // Microfluidics and Nanofluidics. 2013. V. 15. № 6. P. 847–857.
  31. Schoch R.B., Bertsch A., Renaud Ph. pH-controlled diffusion of proteins with different pi values across a nanochannel on a chip // Nano Letters. 2006. V. 6. № 3. P. 543–547.
  32. Poddar A., Maity D., Bandopadhyay A., Chakraborty S. Electrokinetics in polyelectrolyte grafted nanofluidic channels modulated by the ion partitioning effect // Soft Matter. 2016. V. 12. № 27. P. 5968–5978.
  33. Gopmandal P.P., De S., Bhattacharyya S., Ohshima H. Impact of ion-steric and ion-partitioning effects on electrophoresis of soft particles // Physical Review E. 2020. V. 102. № 3. P. 032601.
  34. Mahapatra P., Gopmandal P.P., Duval J.F.L. Effects of dielectric gradients-mediated ions partitioning on the electrophoresis of composite soft particles: an analytical theory // Electrophoresis. 2021. V. 42. № 1–2. P. 153–162.
  35. Born M. Volumen und hydrationswärme der ionen // Zeitschrift für Physik. 1920. V. 1. № 1. P. 45–48.
  36. Coster H.G.L. The double fixed charge membrane: solution-membrane ion partition effects and membrane potentials // Biophysical Journal. 1973. V. 13. № 2. P. 133–142.
  37. Ohshima H. Electrophoresis of soft particles // Advances in Colloid and Interface Science. 1995. V. 62. № 2–3. P. 189–235.
  38. Gopmandal P.P., Ohshima H. Importance of pH-regulated charge density on the electrophoresis of soft particles // Chemical Physics. 2017. V. 483. P. 165–171.
  39. Donath E., Voigt A. Streaming current and streaming potential on structured surfaces // Journal of Colloid and Interface Science. 1986. V. 109. № 1. P. 122–139.
  40. Wu Jan H., Keh Huan J. Diffusioosmosis and electroosmosis in a capillary slit with surface charge layers // Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects. 2003. V. 212. № 1. P. 27–42.

41. *Keh Huan J., Ding Jau M.* Electrokinetic flow in a capillary with a charge-regulating surface polymer layer // *Journal of Colloid and Interface Science*. 2003. V. 263. № 2. P. 645–660.
42. *Duval J.F.L., van Leeuwen H.P.* Electrokinetics of diffuse soft interfaces. 1. Limit of low Donnan potentials // *Langmuir*. 2004. V. 20. № 23. P. 10324–10336.
43. *Ma Hsien Chen, Keh Huan J.* Diffusioosmosis of electrolyte solutions in a capillary slit with adsorbed polyelectrolyte layers // *Journal of Colloid and Interface Science*. 2007. V. 313. № 2. P. 686–696.
44. *Dukhin S.S., Zimmermann R., Duval J.F.L., Werner C.* On the applicability of the Brinkman equation in soft surface electrokinetics // *Journal of Colloid and Interface Science*. 2010. V. 350. № 1. P. 1–4.
45. *Duval J.F.L., Kuttner D., Nitschke M., Werner C., Zimmermann R.* Interrelations between charging, structure and electrokinetics of nanometric polyelectrolyte films // *Journal of Colloid and Interface Science*. 2011. V. 362. № 2. P. 439–449.
46. *Chanda S., Sinha Sh., Das S.* Streaming potential and electroviscous effects in soft nanochannels: towards designing more efficient nanofluidic electrochemomechanical energy converters // *Soft Matter*. 2014. V. 10. № 38. P. 7558–7568.
47. *Chen G., Das S.* Streaming potential and electroviscous effects in soft nanochannels beyond Debye–Hückel linearization // *Journal of Colloid and Interface Science*. 2015. V. 445. P. 357–363.
48. *Saha S., Gopmandal P.P., Ohshima H.* Electroosmotic flow and transport of ionic species through a slit soft nanochannel filled with general electrolytes // *Meccanica*. 2019. V. 54. № 14. P. 2131–2149.
49. *Silkina E.F., Bag N., Vinogradova O.I.* Electro-osmotic properties of porous permeable films // *Physical Review Fluids*. 2020. V. 5. № 12. P. 123701.
50. *Silkina E.F., Bag N., Vinogradova O.I.* Surface and zeta potentials of charged permeable nanocoatings // *The Journal of Chemical Physics*. 2021. V. 154. № 16. P. 164701.
51. *Gaikwad Harshad Sanjay, Kumar Gaurav, Mondal Pranab Kumar.* Efficient electroosmotic mixing in a narrow-fluidic channel: the role of a patterned soft layer // *Soft Matter*. 2020. V. 16. № 27. P. 6304–6316.
52. *Li Fengqin, Jian Yongjun, Xie Zhiyong, Liu Yongbo, Liu Quansheng.* Transient alternating current electroosmotic flow of a Jeffrey fluid through a polyelectrolyte-grafted nanochannel // *RSC Advances*. 2017. V. 7. № 2. P. 782–790.
53. *Patel Maneesh, Kruthiventi S.S., Kaushik P.* Polyelectrolyte layer grafting effect on the rotational electroosmotic flow of viscoplastic material // *Microfluidics and Nanofluidics*. 2021. V. 25. № 2. P. 1–20.
54. *Barman Bhanuman, Kumar Deepak, Gopmandal P.P., Ohshima H.* Electrokinetic ion transport and fluid flow in a pH-regulated polymer-grafted nanochannel filled with power-law fluid // *Soft Matter*. 2020. V. 16. № 29. P. 6862–6874.
55. *Ohshima H.* Approximate analytic expression for the pH-dependent electrophoretic mobility of soft particles // *Colloid and Polymer Science*. 2016. V. 294. № 12. P. 1997–2003.
56. *Shenoy A.V.* Darcy–Forchheimer natural, forced and mixed convection heat transfer in non-Newtonian power-law fluid-saturated porous media // *Transport in Porous Media*. 1993. V. 11. № 3. P. 219–241.
57. *Shenoy A.V.* Non-Newtonian fluid heat transfer in porous media // *Advances in Heat Transfer*. 1994. V. 24. P. 101–190.
58. *Christopher Robert H., Middleman Stanley.* Power-law flow through a packed tube // *Industrial & Engineering Chemistry Fundamentals*. 1965. V. 4. № 4. P. 422–426.