

УДК 533.95

## МОДЕЛИРОВАНИЕ МУЛЬТИФРАКТАЛЬНОГО ТУРБУЛЕНТНОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В КОСМИЧЕСКОЙ ПЛАЗМЕ

© 2023 г. Н. Н. Левашов<sup>1, 2, \*</sup>, В. Ю. Попов<sup>1, 2, 3</sup>, Х. В. Малова<sup>2, 4</sup>, Л. М. Зеленый<sup>2</sup><sup>1</sup>Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия<sup>2</sup>Институт космических исследований РАН, Москва, Россия<sup>3</sup>Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Москва, Россия<sup>4</sup>Научно-исследовательский институт ядерной физики имени Д.В. Скобельцына МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

\*nn.levashov@physics.msu.ru

Поступила в редакцию 01.03.2022 г.

После доработки 23.10.2022 г.

Принята к публикации 24.10.2022 г.

Предложена двумерная модель мультифрактального турбулентного электромагнитного поля, позволяющая гибко варьировать ширину мультифрактального спектра и уровень перемежаемости. Моделирование электромагнитного поля происходит при помощи суперпозиции вейвлетов, которые распределяются равномерно по всей вычислительной области. Путем специального распределения амплитуд мы добиваемся того, чтобы результирующее поле было мультифрактальным и перемежаемым. При помощи данной модели исследовалось влияние мультифрактальности и перемежаемости на ускорение заряженных частиц в турбулентном поле в хвосте магнитосферы Земли. Показано, что в случае мультифрактального поля отдельные частицы способны достичь больших значений энергии по сравнению с монофрактальной турбулентностью.

DOI: 10.31857/S0023420622100089, EDN: LSFWRA

### ВВЕДЕНИЕ

Турбулентное электромагнитное поле в солнечном ветре является нестационарным, в нем могут появляться различные структуры, такие как токовые слои, вихри, жгуты, плазмоиды. Из-за наличия подобных локальных особенностей, поле неоднородно и имеет мультифрактальный перемежаемый характер [1–4]. Ранее уже разрабатывались модели турбулентного поля с перемежаемостью, например, в работах [5–7] моделирование производилось добавлением в однородное турбулентное поле, моделируемое при помощи суперпозиции фурье-гармоник, локальных структур – плазмоидов. Также были работы по исследованию ферми-ускорения между локальными структурами [8, 9]. Однако в указанных работах не учитывалось, что перемежаемое турбулентное поле в солнечном ветре имеет широкий мультифрактальный спектр. Мы предлагаем модель турбулентного поля с перемежаемостью, в которой можно легко варьировать ширину мультифрактального спектра. Свойство мультифрактальности заключается в локально нерегулярном поведении турбулентности, т.е. показатели Херста в разных точках могут различаться, поэтому для описания мультифрактальных процессов недостаточно одного параметра Херста. В связи с

этим используют локальные экспоненты Херста или экспоненты Гельдера  $h(x_0)$ , которые описывают поведение турбулентного поля в точке  $x_0$  [10]. Также удобным инструментом для описания мультифрактальной турбулентности представляется функция мультифрактального спектра  $f(h)$ , которая описывает спектр экспонент Гельдера [10–13].

В нашей модели турбулентное поле моделируется при помощи суперпозиции вейвлетов, равномерно распределенных по всей вычислительной области. Вейвлеты позволяют довольно гибко управлять амплитудой полученного поля в любой точке пространства и потому хорошо подходят для описания процессов с различными локальными особенностями. Благодаря специальному распределению амплитудных коэффициентов вейвлетов мы добиваемся того, что в моделируемом нами турбулентном поле появляется целый континуум показателей Гельдера, т.е. широкий мультифрактальный спектр  $f(h)$ , ширину которого легко варьировать. Полученное мультифрактальное поле также будет перемежаемым, ведь, как известно, для Колмогоровской неперемежаемой турбулентности характерна линейная зависимость показателей структурных

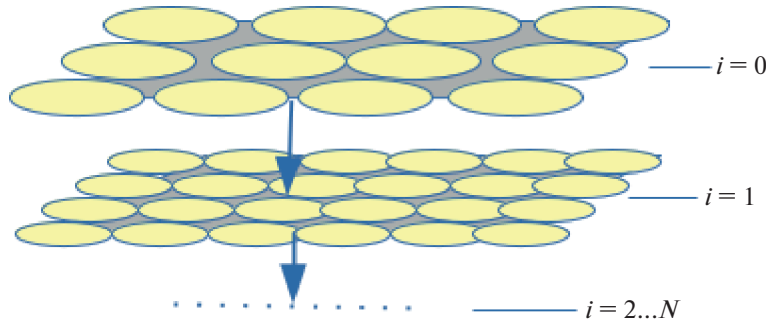


Рис. 1. Распределение вейвлетов по вычислительной области.

функций  $\zeta_q$  от степени  $q$ , а при наличии перемежаемости будут наблюдаться отклонения кривой  $\zeta_q(q)$  от прямой  $\zeta_q \sim q$ . Чем сильнее отклонение, тем больше будет уровень перемежаемости [11]. Для мультифрактальной турбулентности, зависимость показателей структурных функций  $\zeta_q$  от степени  $q$  является нелинейной и имеет следующий вид:  $\zeta_q(q) = \inf_h (qh - f(h))$ . Таким образом, варьируя ширину мультифрактального спектра, мы можем управлять уровнем перемежаемости полученного поля. Разработанная модель является довольно гибкой, и пригодна к моделированию различных турбулентных систем. В частности, для моделирования турбулентного электромагнитного поля в хвосте магнитосферы во время суббурь.

### 1.1. ЧИСЛЕННАЯ МОДЕЛЬ

Для моделирования двумерного турбулентного электромагнитного поля сначала при помощи суперпозиции вейвлетов зададим компоненту магнитного поля  $B_z$ , затем при помощи уравнений Максвелла найдем электрическое поле. Распределение вейвлетов в вычислительной области происходит следующим образом: вейвлеты самого крупного масштаба равномерно распределяются по всей вычислительной области, затем берутся вейвлеты поменьше и тоже равномерно распределяются по вычислительной области. Число вейвлетов выбирается так, чтобы каждый масштабный класс вейвлетов полностью покрывал всю вычислительную область. На рис. 1 схематично изображено распределение вейвлетов по вычислительной области. Все они движутся в одном направлении и с одинаковой скоростью  $V = V_x + V_y$ .

В качестве базового вейвлета выбран Гауссов вейвлет:

$$Q_{i,j}(x, y, t) = r_{i,j} c_i \exp\left(\frac{-\pi d r_{i,j}^2(t)}{2a_i^2}\right), \quad (1)$$

где  $dr_{i,j}(t) = \sqrt{(x - x_{i,j}(t))^2 + (y - y_{i,j}(t))^2}$ ,  $x_{i,j}(t) = x_{i,j}^0 + V_x t$  и  $y_{i,j}(t) = y_{i,j}^0 + V_y t$  – координаты соответствующего вейвлета в зависимости от времени;  $x_{i,j}^0$  и  $y_{i,j}^0$  – начальные координаты вейвлетов;  $V_x$  и  $V_y$  – их скорости по осям  $x$  и  $y$  соответственно;  $a_i$  – параметр, характеризующий размер; индекс  $i$  характеризует класс вейвлетов с одинаковыми размерами;  $a_i, c_i$  – амплитудный коэффициент для каждого масштабного класса вейвлетов;  $r_{i,j} \in [-1; 1]$  – случайный коэффициент. Итоговое поле получается путем суперпозиции вейвлетов:

$$Q(x, y, t) = \sum_{i,j} Q_{i,j}(x, y, t). \quad (2)$$

Для того чтобы полученное таким образом поле было самоподобным, соотношение между размерами вейвлетов из соседних классов должно быть независимым от  $i$ . Для этого введем некоторое значение  $l$ , характеризующее соотношение размеров между соседними классами вейвлетов:  $a_{i+1}/a_i = l$ . Пусть  $N_i$  – количество вейвлетов  $i$ -го класса, а  $D$  – размерность пространства, в котором моделируется поле. Введем понятие площади  $S_i \sim N_i a_i^D$ , занимаемой  $i$ -м классом вейвлетов. Тогда в силу самоподобия отношение между площадями, занимаемыми соседними классами  $S_{i+1}/S_i$  должно иметь степенную зависимость от  $l$ :  $S_{i+1}/S_i = l^\beta$  ( $\beta$  – варьируемый степенной показатель). Соотношение между амплитудными коэффициентами соседних классов вейвлетов  $c_{i+1}/c_i$  так же должно иметь степенную зависимость от  $l$ . Определим степенной показатель  $\lambda$  как  $c_{i+1}/c_i = l^\lambda$ .

Рассчитаем спектр энергии поля, моделируемого таким способом. Фурье-спектр одного вейвлета:

$$\tilde{Q}_{i,j}(k) = a_i^D c_i \exp(-ikr_{i,j}) (\sqrt{2\pi})^D \exp\left(-\frac{(ka_i)^2}{2\pi}\right). \quad (3)$$

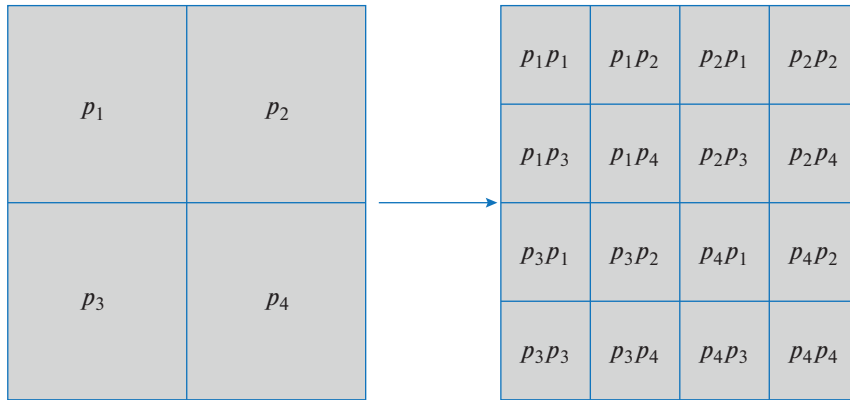


Рис. 2. Распределение весовых коэффициентов по ячейкам.

Спектр моделируемого турбулентного поля можно найти путем суперпозиции спектров отдельных вейвлетов:

$$\tilde{Q}(k) = \sum_{i,j} \tilde{Q}_{i,j}(k). \quad (4)$$

После некоторых преобразований, получаем спектр энергии полученного поля:

$$W(k) = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{(2\pi)^D}{S} |\tilde{Q}(k)|^2 \sim \left( \frac{ka_1}{\sqrt{\pi}} \right)^{-D-\beta-2\lambda}, \quad (5)$$

где \$S\$ – площадь нашей вычислительной области [15].

### 1.2. ПЕРЕМЕЖАЕМОСТЬ И МУЛЬТИФРАКТАЛЬНОСТЬ

Для того чтобы полученное поле было мультифрактальным, разобьем вычислительную область по следующей схеме: для класса самых крупных вейвлетов, вычислительная область разбивается на четыре одинаковых квадратных ячейки. Вейвлеты из каждой ячейки умножаются на свой весовой коэффициент \$p\_1 - p\_4\$, тем самым мы получим, что суммарный вклад в энергию поля от разных частей класса вейвлетов будет не одинаковым. Для класса вейвлетов размером вдвое меньше первоначально, каждая исходная ячейка разбивается еще на четыре квадратных ячейки, в каждой из которых весовой коэффициент исходной ячейки снова умножается на один из четырех весовых коэффициентов. На рис. 2 изображено разбиение вычислительной области с распределением весовых коэффициентов: слева – для класса самых крупных вейвлетов, справа – для класса вейвлетов, размером вдвое меньше. Для класса вейвлетов с еще вдвое меньшим размером вейвлета – снова разбиваем каждую ячейку на четыре части и т.д. При таком разбиении, показатели Гельдера будут распределены в интервале величин \$h\_{\min}\$ и \$h\_{\max}\$, значе-

ния которых зависят от выбора весовых коэффициентов \$p\_k\$.

Найдем значения \$h\_{\min}\$ и \$h\_{\max}\$. Учитывая, что амплитудные коэффициенты \$N\$-го класса вейвлетов будет относиться к амплитудным коэффициентам самого крупного класса вейвлетов как \$c\_N/c\_0 = l^{\lambda N}\$, рассчитаем обобщенную статистическую сумму:

$$Z(q, N) = \sum_i c_i^q = l^{\lambda N} (n_1^q + n_2^q + n_3^q + n_4^q)^N, \quad (6)$$

где \$n\_k = p\_k/4, k = 1, \dots, 4\$. Из обобщенной статистической суммы можно найти скейлинговую экспоненту \$\tau(q)\$: \$Z(q, N) = a\_N^{\tau(q)}\$, откуда \$\tau(q) = \lim\_{a\_N \rightarrow 0} \frac{\ln Z(q, N)}{\ln a\_N}\$. Получив выражение для скейлинговой экспоненты, можно найти значения \$h\_{\min}\$ и \$h\_{\max}\$:

$$\begin{cases} h_{\min} = \left. \frac{d\tau}{dq} \right|_{q \rightarrow \infty}, \\ h_{\max} = \left. \frac{d\tau}{dq} \right|_{q \rightarrow -\infty}, \\ \frac{d\tau}{dq} = \\ = \lambda - \frac{n_1^q \ln(n_1) + n_2^q \ln(n_2) + n_3^q \ln(n_3) + n_4^q \ln(n_4)}{(n_1^q + n_2^q + n_3^q + n_4^q) \ln(1/2)}. \end{cases} \quad (7)$$

Функция мультифрактального спектра, представляющая собой спектр фрактальных размерностей однородных подмножеств \$L\_h\$, на которые разбито исходное множество \$L\$, равна \$f(h) = q(d\tau/dq) - \tau\$. Данная функция выпуклая и может быть аппроксимирована параболой:

$$f(h) = D_0 - \frac{(h - h_0)^2}{2(2h_0 - D_0)}, \quad (8)$$

где  $D_0 = \lambda + \tau(q)/(q-1)$ ;  $h_0 = \left. \frac{d\tau}{dq} \right|_{q=0}$  [12, 16]. На рис. 3 изображена полученная функция мультифрактального спектра. Подобный колоколообразный спектр характерен для большинства турбулентных мультифрактальных полей [17].

Покажем, что полученное поле будет перемежаемым. Как известно, показатели структурной функции  $\zeta_q$ , для мультифрактального турбулентного поля рассчитываются следующим образом:  $\zeta_q(q) = \inf_h (qh - f(h))$  [11]. Изменением весовых коэффициентов  $p_1, p_2, p_3, p_4$  можно варьировать ширину спектра  $f(h)$ . Варьируя его ширину, мы можем изменять степень отклонения  $\zeta_q(q)$  от прямой  $\zeta_q(q) \sim q$ , и тем самым регулировать уровень перемежаемости моделируемого электромагнитного поля.

### 1.3. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Как уже было сказано выше, вейвлеты распределены равномерно по всей вычислительной области. При этом если вейвлеты будут двигаться и выходить за пределы области, то возникнут проблемы, поскольку вместо вейвлетов, вышедших за границу области, необходимо так ввести новые, чтобы в моделируемом поле не образовывалось резких скачков и неоднородностей, не свойственных турбулентному полю в хвосте магнитосферы. Один из способов сделать это – моделировать поле на небольшом участке за границей вычислительной области. Вклад вейвлета в поле при увеличении расстояния от его центра  $r$  падает довольно быстро и на расстоянии  $r \sim 2.5a$ , где  $a$  – параметр, характеризующий размер вейвлета, его вклад в поле упадет в  $10^{10}$  раз и будет несущественным, сравнимым с компьютерной ошибкой.

Координаты вейвлетов, в зависимости от времени задаются следующим образом:

$$\begin{aligned} x_{i,j}(t) &= f \bmod (x_{ij}^0 + vt, L + 2borderLen), \\ y_{i,j}(t) &= f \bmod (y_{ij}^0 + vt, L + 2borderLen), \end{aligned}$$

где  $v$  – скорость вейвлета;  $x_{ij}^0$  и  $y_{ij}^0$  – начальные координаты конкретного вейвлета;  $L$  – линейный размер вычислительной области;  $borderLen$  – размер области, за пределами вычислительной области, в которой мы продолжаем моделировать вейвлеты,  $f \bmod(A, B)$  – функция, возвращающая остаток от деления  $A$  на  $B$ . Таким образом, получается, что вейвлеты, которые выходят за пределы моделируемой области, сразу появляются с противоположной стороны.

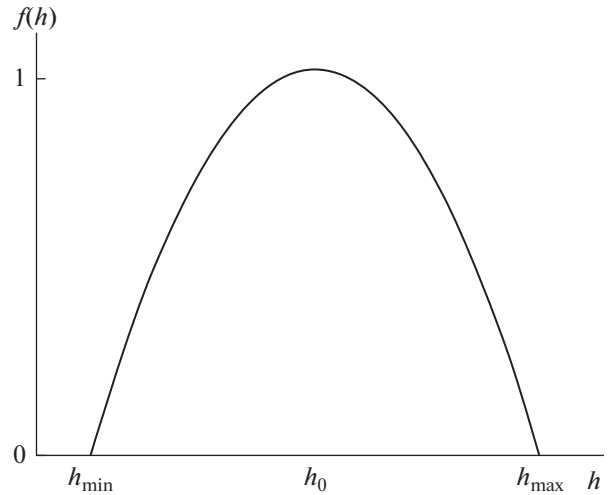


Рис. 3. Функция мультифрактального спектра.

### 2.1. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Положим далее, что  $l = (1/2)^{1/4}$ , т.е. размер вейвлетов будет уменьшаться вдвое через каждые четыре класса вейвлетов, а значит, и разбиение каждой квадратной ячейки на более мелкие будет также происходить через каждые четыре класса вейвлетов. Также положим  $\beta = 0$ , таким образом, каждый класс вейвлетов занимает одинаковую площадь в пространстве;  $D = 2$  – размерность пространства, в котором мы моделируем электромагнитное поле;  $\lambda = 1/3$  – показательный коэффициент для соотношений между амплитудами соседних классов вейвлетов.

При таком выборе параметров энергетический спектр полученного магнитного поля  $W(k) \sim k^{-5/3}$  [15], что соответствует колмогоровскому спектру, наблюдаемому в турбулентном поле в хвосте магнитосферы Земли [18]. Размер вычислительной области  $l = 2 \cdot 10^5$  км. Магнитное поле задается как суперпозиция вейвлетов:

$$B_z(x, y, t) = \sum_i \sum_j r_{i,j} c_0 l^{i/3} \exp\left(-\frac{\pi d r_{i,j}^2(t)}{2a_0^2 l^i}\right). \quad (9)$$

Скорость всех вейвлетов одинакова и равна 500 км/с. Электрическое поле можно найти при помощи уравнений Максвелла. Число вейвлетов для самого большого класса  $N = 14 \times 14$ , их размеры для самого большого класса  $a_0 = 2.5 \cdot 10^4$  км. Количество классов вейвлетов  $n = 24$ . При этом их размеры для самого маленького класса вейвлетов будут равны  $a_n = a_0 l^N = a_0 (1/2)^{(1/4) \times 24} = 0.4 \cdot 10^3$  км. Таким образом, частоты моделируемого поля соответствуют частотам турбулентного поля в хвосте магнитосферы, где наблюдаются колмогоровский спектр [19–21].

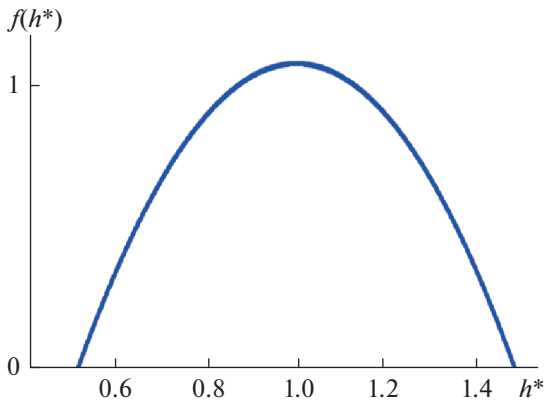


Рис. 4. Функция мультифрактального спектра для полученного мультифрактального поля.

Для моделирования мультифрактального поля выберем следующие значения весовых коэффициентов:  $p_1 = 1.4$ ,  $p_2 = 0.48$ ,  $p_3 = 1.6$ ,  $p_4 = 0.72$ . При таком выборе значения показателей Гельдера, центрированные на единицу, лежат в пределах от 0.45 до 1.4, что близко к наблюдаемым значениям ширины мультифрактального спектра для многих регистрируемых сигналов [22]. На рис. 4 показана функция мультифрактального спектра для выбранных весовых коэффициентов. На рис. 5а приведено сечение магнитного поля плоскостью  $XU$  для монофрактального поля, где  $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 1$ , и для мультифрактального поля рис. 5б с указанными ранее весовыми коэффициентами. Видно, что полученное нами мультифрактальное

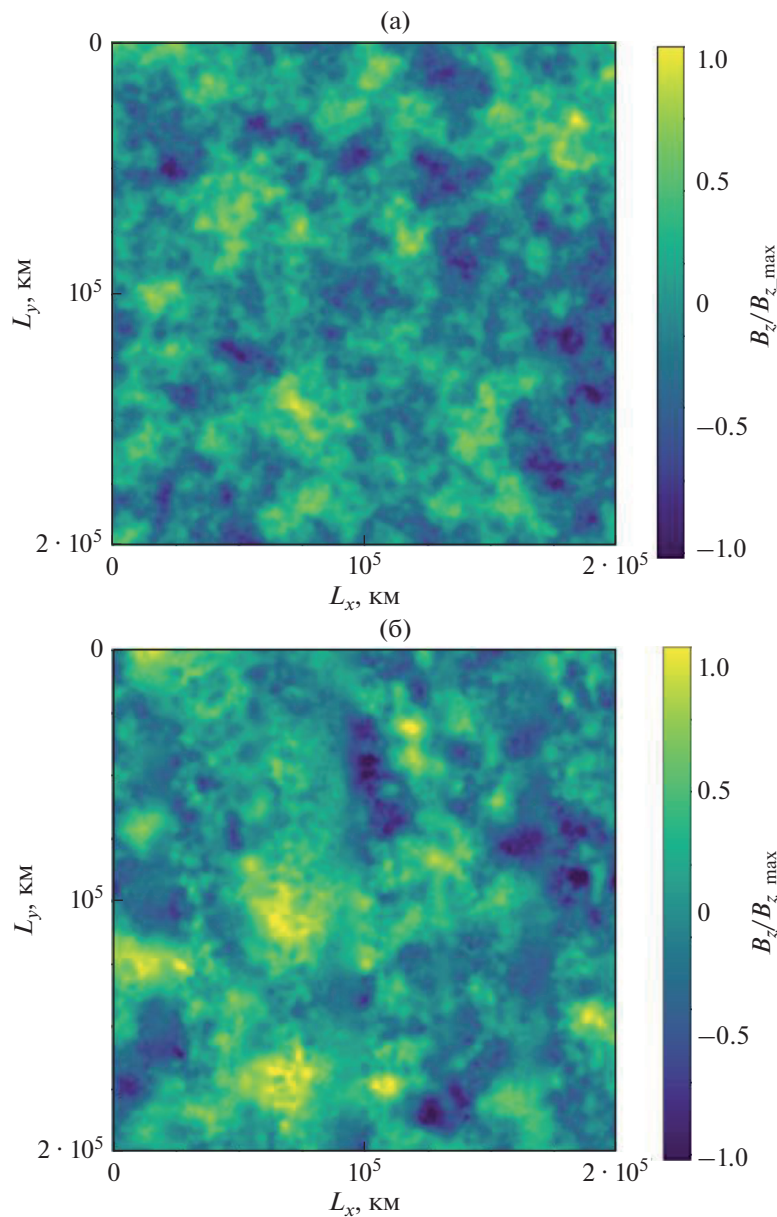
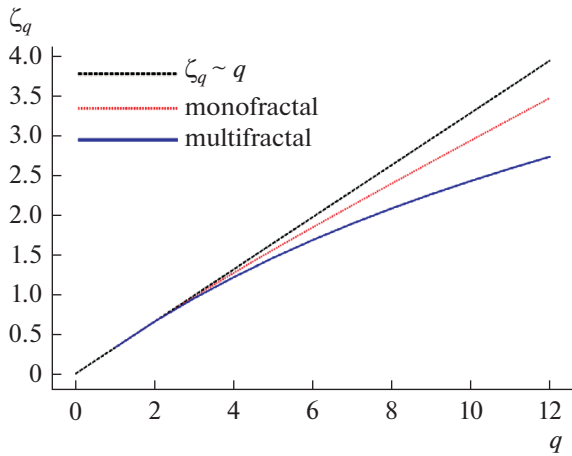


Рис. 5. Компонента  $B_z$  магнитного поля в сечении плоскостью  $XU$ : а – для монофрактального поля; б – для мультифрактального поля.



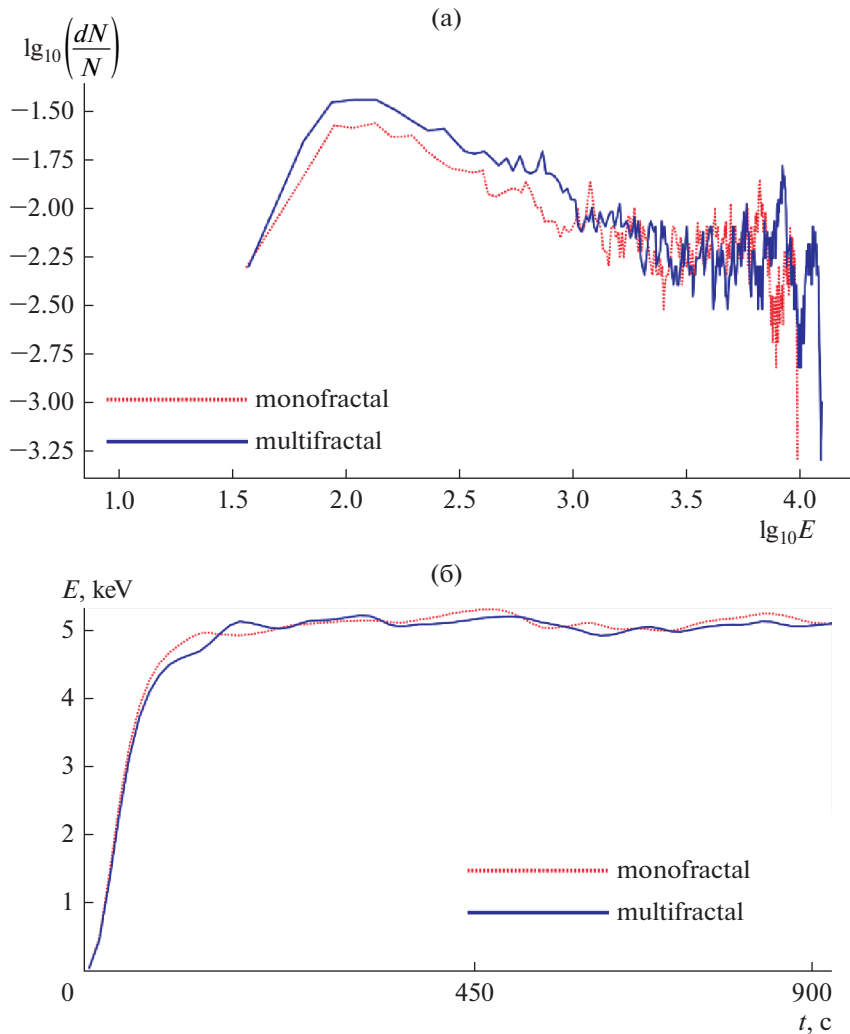
**Рис. 6.** Зависимость степенного показателя  $\zeta_q$  от степени  $q$ , для мультифрактального и монофрактального случаев.

поле менее однородно и склонно к образованию локализованных структур.

Вычислим структурную функцию для магнитного поля для различных степенных показателей  $q$ :

$$S_q = \sum_n \sum_m (|B_z(x_n + \delta, y_m) - B_z(x_n, y_m)| + |B_z(x_n, y_m + \delta) - B_z(x_n, y_m)|)^q$$

и найдем показатели структурной функции  $\zeta_q$  из выражения  $S_q \sim \delta^{\zeta_q}$ . На рис. 6 изображена зависимость  $\zeta_q(q)$  для монофрактального и мультифрактального случаев. Видно, что для мультифрактального случая отклонение зависимости показателя структурной функции  $\zeta_q$  от степени  $q$  довольно сильно отличается от линейной, из чего можно сделать вывод, что полученное мультифрактальное поле является перемежаемым.



**Рис. 7.** Распределение частиц по энергиям после 15 мин ускорения в турбулентном поле (а), зависимости средней энергии ансамбля частиц от времени (б).

## 2.2. УСКОРЕНИЕ ЧАСТИЦ

На первом этапе исследования модели рассмотрим нерелятивистское ускорение частиц в полученном турбулентном поле для мультифрактального и монофрактального режимов и проведем сравнение между ними. Для этого введем 2000 протонов в вычислительную область со случайными начальными координатами. Начальные скорости частиц распределены по Гауссу с пиковым значением скорости 120 км/с. На границе используются периодические граничные условия. На рис. 7а изображено распределение частиц по энергиям после 15 мин ускорения в турбулентном поле. Видно, что для мультифрактального случая отдельные частицы набрали чуть большую энергию по сравнению с монофрактальной турбулентностью. Мы также рассчитали изменение средней энергии введенных частиц. На рис. 7б показан график средней энергии ансамбля частиц в зависимости от времени. Как видно, средняя энергия частиц для мультифрактального и монофрактального случаев практически одинакова. Подобный характер ускорения можно объяснить следующим образом: когда пространственные или временные масштабы турбулентности близки к гирорадиусам частиц  $r_g \sim v_{particle}/B_z$ , эти частицы будут ускоряться. Как только частицы набирают столько энергии, что их гирорадиус начинает превышать размер системы или самую длинную существующую длину волны, ускорение становится неэффективным, и процесс почти насыщается.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе построена двумерная модель турбулентного мультифрактального электромагнитного поля. Модель позволяет гибко управлять наклоном энергетического спектра, а также шириной мультифрактального спектра и уровнем перемежаемости, которая в турбулентных полях достаточно тесно связана с мультифрактальностью. Тем самым разработанная модель применима ко многим типам турбулентных полей, в частности к турбулентному полю в хвосте магнитосферы Земли и других планет. При помощи данной модели исследовано ускорение частиц в мультифрактальном и монофрактальном турбулентном поле. Показано, что при ускорении в мультифрактальном турбулентном поле максимальная энергия, которую способны набрать отдельные частицы немного больше, по сравнению с монофрактальной турбулентностью.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lui A.* Multifractal and intermittent nature of substorm-associated magnetic turbulence in the magnetotail // *J. Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics*.

2001. V. 63. Iss. 13. P. 1379–1385. [https://doi.org/10.1016/S1364-6826\(00\)00239-X](https://doi.org/10.1016/S1364-6826(00)00239-X)
2. *Wawrzaszek A., Echim M., Bruno R.* Multifractal Analysis of Heliospheric Magnetic Field Fluctuations Observed by Ulysses // *The Astrophysical J.* 2019. V. 876. № 2. P. 153–166. <https://doi.org/10.3847/1538-4357/ab1750>
3. *Chang T.* Self-organized criticality, multi-fractal spectra, sporadic localized reconnections and intermittent turbulence in the magnetotail // *Physics of Plasmas*. 1999. № 6. P. 4137–4145. <https://doi.org/10.1063/1.873678>
4. *Zelenyi L.M., Bykov A.M., Uvarov Y.A. et al.* Intermittency of magnetic field turbulence: Astrophysical applications of in-situ observations // *J. Plasma Physics*. 2015. V. 81. № 4. Art. № 395810401. <https://doi.org/10.1017/S0022377815000409>
5. *Zelenyi L.M., Rybalko S.D., Artemyev A.V. et al.* Charged particle acceleration by intermittent electromagnetic turbulence // *Geophysical Research Letters*. 2011. V. 38. Iss. 17. Art. № L17110. <https://doi.org/10.1029/2011GL048983>
6. *Левашов Н.Н., Попов В.Ю., Малова Х.В., Зеленый Л.М.* Моделирование турбулентности с перемежаемостью в космической плазме // *Космич. исслед.* 2022. Т. 60. № 1. С. 11–16. <https://doi.org/10.31857/S0023420622010083>. (*Cosmic Research*. 2022. V. 60. № 1. С. 9–14).
7. *Левашов Н.Н., Попов В.Ю., Малова Х.В., Зеленый Л.М.* Исследование процессов ускорения заряженных частиц в турбулентной космической плазме с перемежаемостью // *Ученые записки физ. фак. Московского ун-та.* 2021. № 4. № 2140802.
8. *Perri S., Lepreti F., Carbone V. et al.* Position and velocity space diffusion of test particles in stochastic electromagnetic fields // *Europhysics Letters*. 2007. V. 78. № 4. Art. № 40003. <https://doi.org/10.1209/0295-5075/78/40003>
9. *Perri S., Greco A., Zimbardo G.* Stochastic and direct acceleration mechanisms in the Earth's magnetotail // *Geophysical Research Letters*. 2009. V. 36. Iss. 4. Art. № L04103. <https://doi.org/10.1029/2008GL036619>
10. *Павлов А.Н., Анищенко В.С.* Мультифрактальный анализ сигналов на основе вейвлет-преобразования // *Изв. Саратовского ун-та.* 2007. Т. 7. № 1. С. 3–25.
11. *Frisch U.* Turbulence: The Legacy of A.N. Kolmogorov. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995. 296 p. <https://doi.org/10.1017/CBO9781139170666>
12. *Божокин С.В., Паршин Д.А.* Фракталы и мультифракталы. Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2001. 128 с.
13. *Короленко П.В., Маганова М.С., Меснянкин А.В.* Новационные методы анализа стохастических процессов и структур в оптике. М.: НИИЯФ МГУ, 2004. 82 с.
14. *Dudok de Wit T., Krasnosel'skikh V.V.* Non-Gaussian statistics in space plasma turbulence: Fractal properties and pitfalls // *Nonlinear Processes Geophysics*. 1996. V. 3. № 6. P. 262–273. <https://doi.org/10.5194/npg-3-262-1996>

15. *Keith D.W., Pettit C.L., Vechev S.N.* Wavelet-based cascade model for intermittent structure in terrestrial environments // *Data Analysis, Statistics and Probability*. 2013. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1312.5649>
16. *Федер Е.* Фракталы. М.: Мир, 1991. 254 с.
17. *Будаев В.П., Савин С.П., Зелёный Л.М.* Наблюдения перемежаемости и обобщенного самоподобия в турбулентных пограничных слоях лабораторной и магнитосферной плазмы: на пути к определению количественных характеристик переноса // *УФН*. 2011. Т. 181. № 9. С. 905–952. <https://doi.org/10.3367/UFNr.0181.201109a.0905>
18. *Kozak L.V., Petrenko B.A., Lui A.* Turbulent processes in the Earth's magnetotail: spectral and statistical research // *Annales Geophysicae*. 2018. V. 36. № 5. P. 1303–1318. <https://doi.org/10.5194/angeo-36-1303-2018>
19. *Zelenyi L.M., Artemyev A.V., Malova H.V. et al.* Particle transport and acceleration in a time-varying electromagnetic field with a multi-scale structure // *Physics Letters*. 2008. V. 372. Iss. 41. P. 6284–6287. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2008.08.035>
20. *Artemyev A.V., Zelenyi L.M., Malova H.V. et al.* Acceleration and transport of ions in turbulent current sheets: formation of non-Maxwellian energy distribution // *Nonlinear Processes in Geophysics*. 2009. V. 16. P. 631–639. <https://doi.org/10.5194/npg-16-631-2009>
21. *Chiaravalloti F., Milovanov A.V., Zimbardo G.* Self-similar transport processes in a two-dimensional realization of multiscale magnetic field turbulence // *Physica Scripta*. 2006. V. 122. P. 79–88. <https://doi.org/10.1088/0031-8949/2006/T122/012>
22. *Зелёный Л.М., Милованов А.В.* Фрактальная топология и странная кинетика. От теории перколяции к проблемам космической электродинамики // *УФН*. 2004. Т. 174. № 8. С. 809–852.