

УДК 629.78

## ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ВЕКТОРОМ ТЯГИ ВОЗДУШНОГО ЭЛЕКТРОРЕАКТИВНОГО ДВИГАТЕЛЯ ДЛЯ НАИСКОРЕЙШЕГО ИЗМЕНЕНИЯ ВЫСОТЫ АПОГЕЯ ОРБИТЫ С УЛЬТРАНИЗКИМ ПЕРИГЕЕМ

© 2023 г. А. С. Филатьев<sup>1, 2</sup>, О. В. Янова<sup>2, 3, \*</sup>

<sup>1</sup>Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

<sup>2</sup>Московский авиационный институт, Москва, Россия

<sup>3</sup>Центральный аэрогидродинамический институт имени профессора Н.Е. Жуковского, Жуковский, Московская обл., Россия

\*yanova2007@yandex.ru

Поступила в редакцию 20.07.2022 г.

После доработки 04.10.2022 г.

Принята к публикации 08.10.2022 г.

Рассмотрена задача оптимального по быстродействию изменения высоты апогея орбит с ультранизким перигеем (высотой 120–250 км). Для компенсации аэродинамического сопротивления космического аппарата используется воздушный электрореактивный двигатель (ВЭРД), топливом для которого служат газы заборной атмосферы. Учтено падение эффективности ВЭРД с увеличением угла атаки и возможность работы ВЭРД только при достаточной концентрации газа в камере ионизации. Задача решена на основе принципа максимума Понтрягина в предположении малости аэродинамического сопротивления и тяги по сравнению с гравитационными силами. Представлены результаты исследований оптимальных программ управления вектором тяги ВЭРД в зависимости от параметров орбиты, компоновки КА, двигателя и мощности источника энергии.

DOI: 10.31857/S0023420622600222, EDN: LGTYMJ

### ВВЕДЕНИЕ

Значительное повышение эффективности выполнения космическими аппаратами (КА) целевых задач может быть обеспечено за счет использования ультранизких околоземных орбит высотой 120–250 км (УНОО) [1–3].

Для компенсации аэродинамического сопротивления на таких орбитах могут использоваться воздушные электрореактивные двигатели (ВЭРД), в которых топливом служат газы окружающей атмосферы [4–13]. В общем случае ВЭРД включают: воздухозаборник (ВЗ), обеспечивающий захват атмосферного газа; термализатор (накопитель), в котором частицы газа тормозятся до тепловых скоростей; ионизационную камеру (ИК), в которой газ ионизируется; зону разгона, в которой ионизированный газ ускоряется в электромагнитном поле; и нейтрализатор эжектируемой плазменной струи. Для функционирования последних трех систем необходим источник энергии (ИЭ), в качестве которого предполагается использовать солнечные батареи (СБ).

Отказ от запасенного топлива позволит повысить срок активного существования и эффектив-

ность выполнения задач наблюдения земной поверхности и связи. В то же время использование ВЭРД требует решения ряда проблем, связанных с особенностями орбитального полета на ультранизких высотах: значительно возросшим влиянием аэродинамических сил и аномалий гравитационного поля Земли.

Задачи оптимального управления низкоорбитальными КА с ВЭРД рассмотрены в ряде работ. В работах [6, 7] решалась задача оптимального управления тягой ВЭРД за счет изменения скорости истечения реактивной струи для поддержания КА на круговой УНОО, включая оптимизацию высоты орбиты в исследовании [7]. Оптимизация проводилась на основе принципа максимума Понтрягина [14] в предположении постоянных мощности бортового источника энергии и коэффициента аэродинамического сопротивления с учетом несферичности Земли. В работе [9] получены оценки требуемой тяги и предложен алгоритм адаптивного управления тягой электроракетного двигателя (ЭРД) для компенсации возмущений, обусловленных аэродинамическим сопротивлением КА и солнечной радиацией на круговых околоземных орбитах высотой 150–450 км. Работа [10] посвя-

шена анализу реализуемости полета на УНОО на основе статистического моделирования орбитального движения КА с адаптивным управлением тягой ЭРД на околоземных слабоэллиптических орбитах (разность высот апогея и перигея не превышает 9 км) высотой 160 и 225 км. В публикации [11] представлен обзор предложений по управлению аэродинамическим качеством аппарата для поддержания заданной орбиты, стабилизации КА, маневрирования для предотвращения столкновений с различными объектами, фазирования и схода с орбиты.

Оптимизация управления вектором тяги КА с ВЭРД рассматривалась авторами в работах [15–18]. В исследованиях [15–17] задачи максимизации изменения высоты апогея и изменения наклона орбит сведены к поиску локально оптимального управления, обеспечивающего максимальную скорость изменения максимизируемых параметров в каждый момент времени с учетом малости влияния на функционал возмущающего ускорения по сравнению с гравитационным. Эффективность оптимальности программы управления с подобным критерием при решении задачи в детерминированной постановке может рассматриваться как мера потенциальной возможности компенсации случайных возмущений. Переход к локальной оптимизации управления позволил получить аналитические соотношения для синтеза управления КА с ВЭРД и его эффективности в предположении постоянных скорости истечения и аэродинамического сопротивления без учета зависимости тяги ВЭРД от угла между продольной осью КА и вектором скорости (угла атаки) и ограничения на допустимый уровень концентрации газа в ИК.

Эффективность тяги ВЭРД существенно зависит от угла атаки вследствие уменьшения эффективной площади входа в ВЗ в плоскости, перпендикулярной вектору скорости, и относительного числа молекул, пролетающих через ВЗ без столкновения с его стенками при наличии угла атаки [8, 13, 19, 20]. В работе [18] при “локальной” оптимизации управления учитывалось снижение тяги при ненулевых углах атаки из-за изменения эффективной площади входа в ВЗ.

В настоящей работе рассматривается задача оптимального управления вектором тяги КА с ВЭРД для максимизации изменения высоты апогея орбиты с ультранизкой начальной высотой перигея с учетом ограничения на допустимый уровень концентрации газа в ИК и зависимости тяги ВЭРД и аэродинамического сопротивления от угла атаки КА. Решение задачи получено на основе принципа максимума Понтрягина [14] в предположении малости изменения параметров орбиты в правых частях уравнений движения за один виток. Приведены результаты исследований

оптимальных программ управления углом атаки и тягой в зависимости от параметров задачи: начальной высоты перигея и апогея, скорости истечения, параметров компоновки КА.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается движение центра масс КА с ВЭРД в плоскости эллиптической орбиты с начальными высотами перигея  $h_{pi}$  и апогея  $h_{oi}$ . Задача состоит в определении оптимального управления вектором тяги ВЭРД для максимального изменения высоты апогея  $h_{\alpha}$  без изменения высоты перигея  $h_{\pi}$  с учетом зависимости тяги и аэродинамического сопротивления от угла атаки и ограничения на допустимую концентрацию газа в ИК. Требование равенства конечной высоты перигея ее начальному значению обусловлено ограничениями на высоту полета КА с ВЭРД [16]. Ограничение сверху на высоту полета КА с ВЭРД следует из необходимости создания давления газа в камере ионизации не менее  $5 \cdot 10^{-5}$  торр для стабильной работы ВЭРД [4]. Ограничение снизу определяется располагаемой мощностью ИЭ (СБ) для компенсации аэродинамического сопротивления КА: ниже некоторой высоты не удается обеспечить требуемую мощность электропитания для создания тяги, так как увеличение площади СБ в свою очередь еще более увеличивает сопротивление.

Движение центра масс КА описывается в геоцентрической инерциальной системе координат с началом координат в центре Земли. Ось  $Ox$  направлена в перигей орбиты (в случае круговой орбиты – по начальному радиус-вектору), ось  $Oy$  параллельна вектору скорости в перигее орбиты.

Приняты следующие допущения:

1. Нормальная аэродинамическая сила пренебрежимо мала.
2. Скорость  $c$  истечения реактивной струи ВЭРД постоянна:  $c = \text{const}$ .
3. Вектор тяги ВЭРД направлен вдоль продольной оси КА.
4. Масса КА постоянна:  $m = \text{const}$ .
5. Форма Земли сферическая.

*Замечание.* Допущение о сферической форме Земли основано на инвариантности аэродинамического сопротивления КА и тяги ВЭРД по отношению к плотности атмосферы (см. далее соотношения для расчета тяги и сопротивления (5), (6)). Это принципиально важное отличие ВЭРД от электроракетного двигателя, поскольку плотность атмосферы даже при движении по круговой орбите может меняться во много раз.

С учетом соотношений [21]

$$r_{\pi} = \frac{p}{1+e}, \quad r_{\alpha} = \frac{p}{1-e} \quad (1)$$

и уравнений в оскулирующих переменных [22] запишем уравнения для изменения по времени радиуса перигея  $h_\pi$ , радиуса апогея  $h_\alpha$ , электрической энергии  $E$  для создания тяги и истинной аномалии  $\vartheta$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dr_\pi}{dt} &= \frac{1}{V} \left[ a_t \frac{2p}{(1+e)^2} (1 - \cos\vartheta) + a_s r \sin\vartheta \right], \\ \frac{dr_\alpha}{dt} &= \frac{1}{V} \left[ a_t \frac{2p}{(1-e)^2} (1 + \cos\vartheta) - a_s r \sin\vartheta \right], \\ \frac{dE}{dt} &= W_p, \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \frac{\sqrt{p}}{r^2}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где  $r$  – расстояние от центра Земли до центра масс КА,  $r = p/(1 + e \cos\vartheta) = \sqrt{(\mathbf{r}, \mathbf{r})}$ ;  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор КА;  $V = \sqrt{(1 + 2e \cos\vartheta + e^2)/p} = \sqrt{(\mathbf{V}, \mathbf{V})}$ ,  $\mathbf{V}$  – вектор скорости КА,  $\mathbf{V} = (V_r, V_n)$ ;  $V_r$  – составляющая вектора скорости, направленная по радиус-вектору  $\mathbf{r}$ ,  $V_r = (e \sin\vartheta)/\sqrt{p}$ ;  $V_n$  – составляющая вектора скорости, направленная по нормали к  $\mathbf{r}$  в сторону движения,  $V_n = (1 + e \cos\vartheta)/\sqrt{p}$ ;  $p$  – фокальный параметр;  $e$  – эксцентриситет;  $\mathbf{a} = (a_t, a_s)^T$ , с компонентами:  $a_t$  – касательная (направлена по вектору скорости),  $a_s$  – нормальная (направлена к центру кривизны траектории в плоскости орбиты);  $W_p$  – мощность, потребляемая ВЭРД;  $t$  – время.

Переменные в выражении (2) и далее используются в безразмерном виде, причем старые обозначения переменных сохраняются:

$$\left. \begin{aligned} r &= \left( \frac{r}{R_E} \right)_d, \quad V = \left( \frac{V}{V_R} \right)_d, \quad m = \left( \frac{m}{m_i} \right)_d, \\ t &= \left( \frac{t}{t_R} \right)_d, \quad g = \left( \frac{g}{g_o} \right)_d, \quad \mathbf{a} = \left( \frac{\mathbf{a}}{g_o} \right)_d, \\ P &= \left( \frac{P}{mg_o} \right)_d, \quad X = \left( \frac{X}{mg_o} \right)_d, \quad W_p = \left( \frac{W_p}{mg_o V_R} \right)_d, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где нижним индексом  $d$  обозначены размерные величины;  $R_E$  – средний радиус Земли;  $m_i$  – начальная масса КА (в силу допущения 4,  $m = (m/m_i)_d = 1$ );  $g_o$  – ускорение свободного падения на поверхности Земли,  $V_R = \sqrt{g_o R_E}$ ,  $t_R = \sqrt{R_E/g_o}$ ;  $P$  – тяга ВЭРД;  $X$  – аэродинамическое сопротивление КА.

Компоненты возмущающего ускорения создаются тягой ВЭРД  $P$  и аэродинамическим сопротивлением  $X$ :

$$\left. \begin{aligned} a_t &= \frac{P(\alpha) \cos\alpha - X(\alpha)}{m}, \\ a_s &= -\frac{P(\alpha) \sin\alpha}{m}, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где  $\alpha$  – угол между вектором скорости и вектором тяги – угол атаки.

Вектор тяги

$$\mathbf{P} = P \mathbf{e}_p = \left( \zeta \frac{\mu_{out}(\alpha) c}{mg_o} \right)_d \mathbf{e}_p, \quad (5)$$

где  $\mu_{out}(\alpha)$  – удельный расход массы топлива,  $\mu_{out}(\alpha) = \eta_c \mu_{in}(\alpha)$ ;  $\mu_{in}(\alpha)$  – скорость поступления массы газа в ВЗ,  $(\mu_{in}(\alpha))_d = \rho(h) V A_{in} k_p(\alpha) V_R$ ;  $\eta_c$  – эффективность забора газа,  $0 \leq \eta_c \leq 1$ ;  $h$  – высота полета КА;  $\rho(h)$  – плотность атмосферы;  $k_p(\alpha)$  – коэффициент эффективности ВЗ в зависимости от угла атаки [19, 20];  $A_{in}$  – площадь входного сечения ВЗ,  $\zeta$  – параметр включения двигателя, принимающий значение нуль при неработающем двигателе и единица при работающем;  $\mathbf{e}_p$  – единичный вектор тяги.

Потребляемая ВЭРД мощность  $W_p$  определяется по формуле  $W_p = \mu_{out} c^2 / 2\eta_T$ .

Вектор силы сопротивления

$$\mathbf{X} = -X \mathbf{e}_V = -\left( \frac{0.5 \rho(h) A_{SC} (V V_R)^2 c_{xa}(\alpha)}{mg_o} \right)_d \mathbf{e}_V, \quad (6)$$

где  $c_{xa}(\alpha)$  – коэффициент аэродинамического сопротивления КА;  $A_{SC}$  – площадь поперечного сечения КА;  $\mathbf{e}_V = \mathbf{V}/V$ .

Для создания тяги необходимо, чтобы концентрация газа в ИК  $n_{IC}(\alpha)$  была не меньше минимально допустимой  $n_{min}$ , при которой возможна его ионизация:

$$n_{IC}(\alpha) = n(h) k_c k_p(\alpha) \geq n_{min}, \quad (7)$$

где  $n(h)$  – концентрация газа в атмосфере;  $k_c$  – коэффициент компрессии газа в ИК, определяющий, во сколько раз увеличивается концентрация газа в ИК по сравнению с концентрацией во входном потоке.

Отсюда следует, что  $\xi \equiv 0$  при  $n_{IC} < n_{min}$ .

На угол атаки КА наложено ограничение

$$|\alpha| \leq \alpha_{max}, \quad (8)$$

где  $\alpha_{max}$  – максимально допустимый угол атаки.

Ограничение (8) угла атаки КА с ВЭРД в первую очередь обусловлено снижением эффективности поступления атмосферных газов в ВЗ, что показано далее.

В качестве компонент вектора управления  $\mathbf{u}$  приняты угол атаки  $\alpha$  и параметр включения двигателя  $\zeta$ :

$$\mathbf{u} \equiv \{\alpha, \zeta\}^T, \quad \mathbf{u} \in \mathbf{U}, \quad (9)$$

$$\mathbf{U} = \{|\alpha| \leq \alpha_{\max}, n_{IC}(\alpha) \geq n_{\min}, \zeta = \{0, 1\}\}.$$

Реализация заданных углов атаки может обеспечиваться известными средствами стабилизации и управления движением КА вокруг центра масс, достоинства и недостатки использования которых для управления вектором тяги рассматривались в исследовании [23]. Отметим, что возрастание аэродинамических моментов на УНОО относительно возмущающих моментов других типов увеличивает влияние аэродинамической компоновки КА и возможности использования специальных аэродинамических поверхностей (например, [24]).

В начальный момент времени  $t_i = 0$ ,

$$\vartheta(t_i) = \vartheta_i = 0, \quad h_{\pi}(t_i) = h_{\pi i}, \quad (10)$$

$$h_{\alpha}(t_i) = h_{\alpha i}, \quad E(t_i) = E_i = 0.$$

В силу сделанных допущений достаточно рассмотреть движение КА с ВЭРД на одном витке орбиты  $\vartheta \in [0, 2\pi]$ . В конечный момент времени  $t_f$ :

$$\vartheta(t_f) = \vartheta_f = 2\pi, \quad h_{\pi}(t_f) = h_{\pi f} = h_{\pi i}. \quad (11)$$

Функционал задачи – максимум изменения высоты апогея за виток орбиты при условии равенства начальной  $h_{\pi i}$  и конечной  $h_{\pi f}$  высоты перигея:

$$\Phi = \Delta h_{\alpha f} \Big|_{h_{\pi f} = h_{\pi i}} \Rightarrow \max_{\mathbf{u} \in U}, \quad (12)$$

где  $\Delta h_{\alpha f} = h_{\alpha f} - h_{\alpha i}$ ,  $h_{\alpha f} = h_{\alpha}(t_f)$ .

### Модель аэродинамического сопротивления

Аэродинамическое сопротивление – одно из основных слагаемых возмущающего воздействия на движение КА на высотах менее 300 км. Оценка аэродинамического сопротивления КА зависит от принятой модели взаимодействия молекул с поверхностью, температуры и молекулярного состава атмосферы, температуры и шероховатости материала поверхности и т.д. Обзор различных моделей взаимодействия молекул с поверхностью и сравнение полученных с их использованием коэффициентов аэродинамических сил приведены в публикациях [24–27]. Наиболее простой представляется максвелловская модель взаимодействия, в которой используется единственный коэффициент  $\sigma$ , определяющий долю молекул, испытывающих диффузное отражение от поверхности [28]. Результаты анализа движения аппаратов на высотах менее 300 км показывают, что наиболее точное описание аэродинамических сил может быть получено в предположении практически полностью

диффузного отражения молекул ( $\sigma \approx 1$ ) [29–32]. Доминирование диффузного отражения означает возрастание роли поверхностей КА, параллельных потоку, в аэродинамическом сопротивлении.

При оптимизации управления углом атаки КА на основе принципа максимума Понтрягина использование аэродинамического сопротивления КА в форме представленных в работах [24–32] моделей приведет к существенному усложнению математической и численной процедуры решения краевой задачи, к которой сводится оптимизационная. В связи с этим для регуляризации исследований в настоящей работе предложена модель аэродинамического сопротивления КА, позволяющая без существенной потери точности использовать простые аналитические зависимости аэродинамического сопротивления от характеристик атмосферы и угла атаки КА.

Для наглядности формирования модели аэродинамического сопротивления определим проекции сечений КА плоскостями, параллельными и перпендикулярными продольной оси КА и плоскости орбиты  $\pi_{orb}$  (рис. 1):  $A_{SC}$  – площадь и обозначение поперечного сечения КА,  $A_{pn}$  – площадь и обозначение проекции сечений КА на плоскость  $\pi_{pn}$ , параллельную продольной оси КА и перпендикулярную  $\pi_{orb}$ ,  $A_{pp}$  – площадь и обозначение проекции сечений КА на плоскость  $\pi_{pp}$ , параллельную продольной оси КА и  $\pi_{orb}$ . Тогда, предполагая, что движение КА происходит без скольжения (плоскость симметрии КА проходит через вектор скорости) и, принимая  $A_{SC}$  в качестве характерной площади, коэффициент аэродинамического сопротивления КА с учетом исследований [28, 33] представим в виде

$$c_{xa} = c_{xa\_n} + c_{xa\_par}, \quad (13)$$

где  $c_{xa\_n}$  – коэффициент аэродинамического сопротивления,  $c_{xa\_n} = c_{x_0} \cos \alpha$ , характеризующегося проекцией  $A_{SC}$ ,  $c_{x_0}$  – коэффициент аэродинамического сопротивления КА при нулевом угле атаки;  $c_{xa\_par}$  – коэффициент аэродинамического сопротивления,  $c_{xa\_par} = c_{xa\_pn} + c_{x\_pp}$ , характеризующегося проекциями  $A_{pn}$  и  $A_{pp}$  соответственно:  $c_{xa\_pn} = k_{pn} c_{x_0} |\sin \alpha|$ ,  $k_{pn} = A_{pn} / A_{SC}$ ,  $c_{x\_pp} = k_{pp} c_{x_{||}}$ ,  $k_{pp} = A_{pp} / A_{SC}$ ,  $c_{x_{||}} = 1 / (\sqrt{\pi} S_{\infty})$  – коэффициент аэродинамического сопротивления пластины при нулевом угле атаки;  $S_{\infty}$  – скоростное соотношение, равное отношению скорости набегающего потока  $V$  к тепловой скорости молекул в ИК.

Из приведенных соотношений видно, что  $c_{xa\_pn} = 0$  при  $\alpha = 0$ , что не соответствует режиму диффузного отражения молекул. Для учета вклада проекций  $A_{pn}$  в сопротивление при  $\alpha = 0$  предложена аппроксимация  $|\sin \alpha|$ :

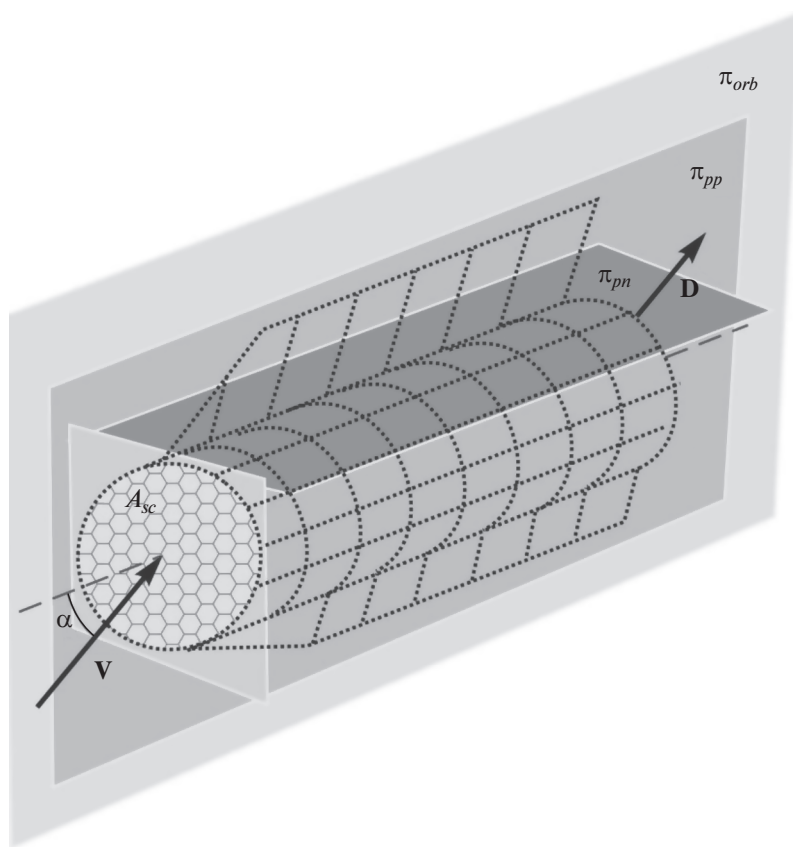


Рис. 1. Схема расположения плоскостей, на которые проецируются поверхности КА при создании модели аэродинамических сил, по отношению к продольной оси КА и плоскости орбиты π<sub>orb</sub>.

$$\tilde{f}(\alpha) \approx c_{x//} \sqrt{1 + (\sin\alpha/c_{x//})^2}. \quad (14)$$

Как следует из выражения (14),  $\tilde{f}(0) = c_{x//}$ , а при  $\alpha > 0$  функция  $\tilde{f}(\alpha)$  позволяет аппроксимировать  $|\sin\alpha|$  с достаточной точностью (рис. 2). В результате получаем модель аэродинамического сопротивления КА (6) с коэффициентом  $c_{xa}(\alpha)$  в виде

$$c_{xa}(\alpha) = c_{x0} \left( \cos\alpha + k_{pn} c_{x//} \sqrt{1 + (\sin\alpha/c_{x//})^2} \right) + k_{pp} c_{x//}. \quad (15)$$

Для верификации сформированной модели (15) проведено ее сравнение с аэродинамическим сопротивлением, рассчитываемым по широко используемой при исследованиях движения в верхних слоях атмосферы модели “Diffuse Reflection with Incomplete Accommodation” (DRIA) [27, 29, 31]. Результаты сравнения с моделью DRIA для полностью диффузного отражения на рис. 3, рассчитанные для двух значений удлинения КА  $\lambda_{SC} = 2$  и 4 при  $k_{pn} = k_{pp}$ , подтверждают возможность применения модели (15) для описания аэродинамического сопротивления аппаратов в свободномолекулярном потоке.

Модель тяги ВЭРД

Влияние угла атаки на величину тяги ВЭРД определяется уменьшением [18–20]:

- 1) эффективной площади входа в ВЗ  $A_{in} \cos\alpha$ ,

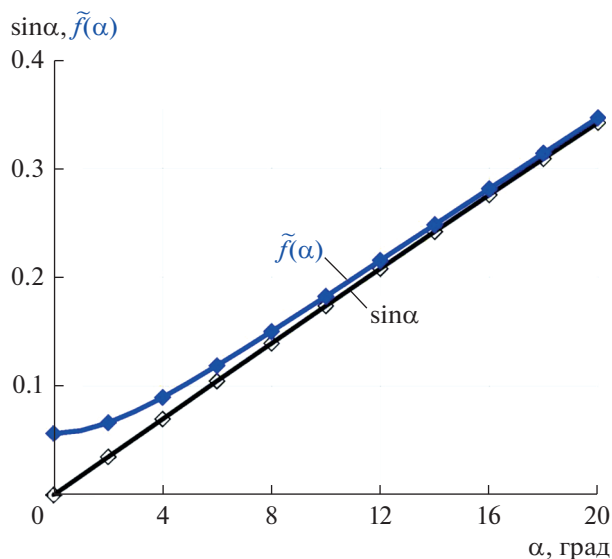


Рис. 2. Зависимости  $\sin\alpha$  и его аппроксимации  $\tilde{f}(\alpha)$  от угла атаки.

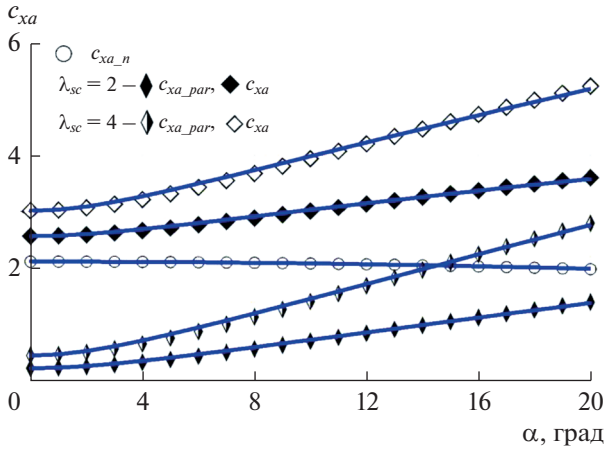


Рис. 3. Зависимости коэффициентов аэродинамического сопротивления от угла атаки модели (15) показаны сплошными линиями, маркерами отмечены расчеты по модели DRIA.

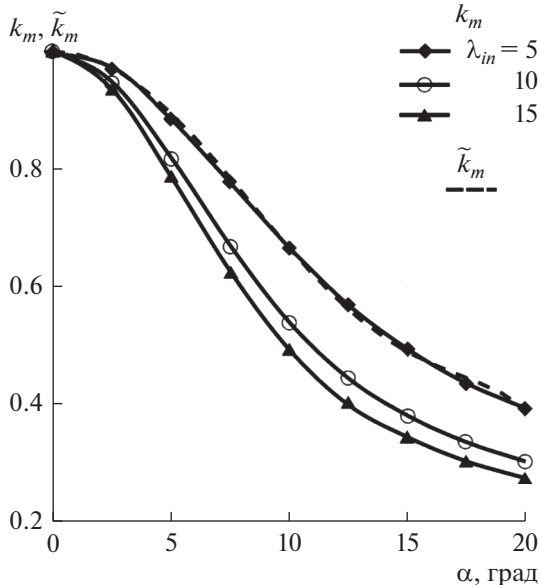


Рис. 4. Относительное снижение эффективности ВЭРД  $k_m$  из-за угла атаки  $\alpha$  для цилиндрического канала ВЗ удлинением  $\lambda_{in} = 5, 10, 15$  и аппроксимация  $\tilde{k}_m(\alpha)$  для  $\lambda_{in} = 5$ .

2) относительного числа молекул, пролетающих через ВЗ без столкновения с его стенками при наличии угла атаки  $k_m(\alpha)$ .

Тогда общий коэффициент, характеризующий уменьшение эффективности ВЗ, а, следовательно, и концентрации молекул в ИК и пропорциональной ей тяги (5), равен:

$$k_p(\alpha) = k_m(\alpha) \cos \alpha. \quad (16)$$

В работе [19] представлены рассчитанные методом Монте-Карло и полученные эксперимен-

тально значения  $k_m(\alpha)$  для цилиндрического ВЗ из нержавеющей стали удлинением  $\lambda_{in} = 9.4$ , которые практически совпали.

В работе [20] приведены рассчитанные методом Монте-Карло зависимости  $k_m(\alpha)$  для цилиндрических ВЗ удлинением  $\lambda_{in} = 5, 10, 15$  (рис. 4). Для использования в условиях оптимальности там же представлена аппроксимация  $\tilde{k}_m(\alpha)$  зависимости  $k_m(\alpha)$  для цилиндрического ВЗ с  $\lambda_{in} = 5$  степенным многочленом с коэффициентами, полученными методом наименьших квадратов:

$$\tilde{k}_m(\alpha) = 1 + \sum_{i=1}^3 k_i \alpha^{2i}, \quad (17)$$

где  $k_1 = -14.8094, k_2 = 142.150, k_3 = -504.470$ , радиус апогея  $\alpha$  в рад.

### Модель атмосферы

Используется модель атмосферы ISO/FDIS 14222 (Space environment (natural and artificial) – Earth upper atmosphere. ISO/FDIS 14222, ISO 2013) для средней солнечной активности. Для использования в расчетах построены аппроксимации зависимости плотности и концентрации атмосферы от высоты полиномами 4-й степени.

## РЕШЕНИЕ ОПТИМИЗАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ

### Условия оптимальности

Решение задачи (12) основано на применении принципа максимума Понтрягина [14].

В силу малости возмущающего ускорения по сравнению с гравитационным  $|a| \ll |g|$ , фокальный параметр  $p$  и эксцентриситет  $e$  орбиты в правых частях системы уравнений (2) будем считать постоянными на протяжении одного витка орбиты:

$$p = \text{const}, \quad e = \text{const}.$$

Гамильтониан  $H$  системы (2) с учетом ограничений (7), (8):

$$H = \psi_\pi \dot{\pi} + \psi_\alpha \dot{\alpha} + \psi_E \dot{E} + \psi_\vartheta \dot{\vartheta} + \lambda_n(n_{\min} - n_{IC}) + \lambda_\alpha(|\alpha| - \alpha_{\max}), \quad (18)$$

где  $\lambda_n, \lambda_\alpha$  – множители Лагранжа;  $\psi$  – вектор сопряженных переменных,  $\psi = (\psi_\pi, \psi_\alpha, \psi_E, \psi_\vartheta)^T$ , удовлетворяющий системе уравнений:

$$\dot{\psi}^T = -\frac{\partial H}{\partial z}, \quad z = (r_\pi, r_\alpha, E, \vartheta)^T. \quad (19)$$

Из уравнений (19) и условия трансверсальности  $[-\delta r_\alpha - H \delta t + (\psi, \delta z)]|_{t_f} = 0$  следует:

$$\psi_\alpha = \text{const} = 1, \quad \psi_E = \text{const} = 0. \quad (20)$$

**Таблица 1.** Варианты вычислений  $\Delta H(\alpha, \zeta)$

$\Delta H_{opt H} = \Delta H \left( \alpha_{opt} = \alpha_{opt H} : \left\{ \frac{\partial \Delta H}{\partial \alpha} = 0, \frac{\partial^2 \Delta H}{\partial \alpha^2} < 0 \right\}, \zeta = 1 \right)$
$\Delta H_{11} = \Delta H(\alpha_{opt} = \pm \alpha_{max}, \zeta = 1)$
$\Delta H_{10} = \Delta H(\alpha_{opt} = \pm \alpha_{max}, \zeta = 0)$
$\Delta H_{00} = \Delta H \left( \alpha_{opt} = 0 : \left\{ \frac{\partial \Delta H}{\partial \alpha} = 0, \frac{\partial^2 \Delta H}{\partial \alpha^2} < 0 \right\}, \zeta = 0 \right)$
$\Delta H_{n_1} = \Delta H(\alpha_{opt} = \alpha_{opt n} : n_{IC}(\alpha_{opt n}) = n_{min}, \zeta = 1)$

В соответствии с условиями оптимальности [14]

$$\mathbf{u}_{opt} = \arg \max_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}} H, \quad (21)$$

что приводит к определению максимума не дифференцируемой функции двух переменных

$$\Delta H(\alpha, \zeta) = \psi_\pi \dot{r}_\pi + \psi_\alpha \dot{r}_\alpha + \lambda_n(n_{min} - n_{IC}) + \lambda_\alpha(|\alpha| - \alpha_{max}), \quad (22)$$

который в данном случае находится в результате сравнения его значений для вариантов  $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$  (9), указанных в табл. 1.

В табл. 1  $\alpha_{opt H}$  вычисляется с помощью рекуррентной формулы:

$$\alpha_{opt H}^{k+1} = \frac{\partial \Delta H_{opt H}}{\partial \alpha}(\alpha_{opt H}^k) + \alpha_{opt H}^k, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (23)$$

где с учетом (2), (5), (6), (15), (17), (18)

$$\left. \begin{aligned} \Delta H_{opt H} &= \\ &= \tilde{k}_m(\alpha) \cos \alpha (A \cos \alpha + F \sin \alpha) + B \cos \alpha + C, \\ A &= 2\eta_C a_\vartheta c, \quad B = -a_\vartheta c_{x0} V, \\ C &= C_0 c_{x0} \sqrt{1 + \left( \frac{\sin \alpha}{c_{x0}} \right)^2}, \quad C_0 = -k_{pn} a_\vartheta c_{x0} V, \\ F &= \eta_C b_\vartheta c, \quad a_\vartheta = \frac{1 + \cos \vartheta}{(1 - e)^2} + \psi_\pi \frac{1 - \cos \vartheta}{(1 + e)^2}, \\ b_\vartheta &= \frac{\sin \vartheta}{1 + e \cos \vartheta} (1 - \psi_\pi). \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Начальное приближение  $\alpha_{opt H}^0 = (F + C_0)/(4A(1 - k_1) + B)$  в выражении (23) определяется из решения уравнения

$$\frac{\partial \Delta H_{appr}}{\partial \alpha}(\alpha_{opt H}^0) = 0, \quad (25)$$

где  $\Delta H_{appr}$  – аппроксимация (24) с учетом равенств (14), (17) путем разложения в ряд функций

угла атаки  $\alpha$  в окрестности  $\alpha = 0$  до  $\alpha^2$  включительно.

Для обеспечения требуемой точности численного интегрирования моменты, соответствующие угловым точкам в правых частях систем уравнений (2) и (19), определяются с достаточной точностью из решения в общем случае нелинейных уравнений методом хорд. Появление угловых точек связано с выходом на ограничения (7), (8) и сходом с них и сменой режимов полета в соответствии с условиями оптимальности (21) и табл. 1. Соответствующие невязки  $\varepsilon$  указаны в табл. 2.

При активном ограничении (7) угол атаки  $\alpha_{opt n}$  определяется из решения нелинейного уравнения  $n_{IC}(\alpha) = n_{min}$  методом хорд с невязкой

$$\varepsilon = \left| k_p(\alpha) - \frac{n_{min}}{n(h)k_c} \right|.$$

*Решение краевой задачи*

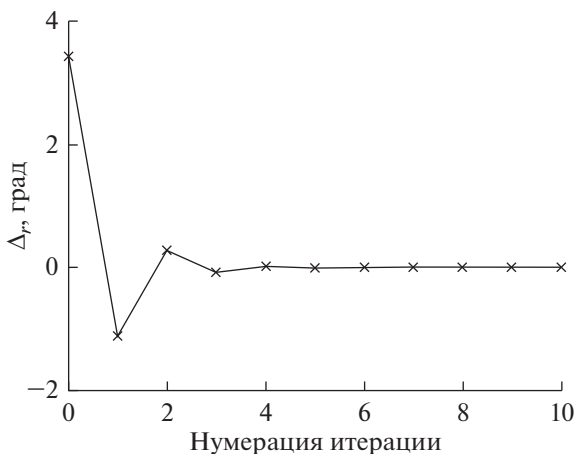
Использование принципа максимума Понтрягина позволяет свести исходную задачу поиска оптимального управления в функциональном пространстве к решению краевой задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (2), (19). Для решения двухточечной краевой задачи применяются модифицированный метод Ньютона и метод гомотопии. При сделанных допущениях и с учетом равенств (20) варьируемым параметром выступает сопряженная переменная  $\psi_n = \text{const}$ , а соответствующая невязка  $\Delta_\pi$  следует из условия (11):  $\Delta_\pi = h_{\pi f} - h_{\pi i}$ . Для определения оптимального управления в каждой точке траектории вычисляется оптимальный угол атаки  $\alpha_{opt}$  в соответствии с условиями оптимальности (21) и табл. 1. На рис. 5 показано изменение невязки  $\Delta_r = \alpha_{opt H}^{k+1} - \alpha_{opt H}^k, k = 0, 1, \dots$ , по итерациям при применении рекуррентной формулы (23) для вычисления  $\alpha_{opt} = \alpha_{opt H} = -9.40487$  град, полученного при  $\Delta_r \leq 10^{-4}$  град.

**Таблица 2.** Невязки для отслеживания угловых точек методом хорд

Причина возникновения угловой точки	Невязка
Выход на ограничение (7) при $\vartheta < \pi$ и сход с него при $\vartheta > \pi$	$\varepsilon = \left  1 - \frac{n_{JC}(\alpha_{opt H})}{n_{min}} \right $
Сход с ограничения (7) при $\vartheta < \pi$ и выход на него при $\vartheta > \pi$ :	
• при $\Delta H(\alpha_{max}, 0) > \Delta H(\alpha_{opt n}, 1)$	$\varepsilon = \left  \Delta H(\alpha_{max}, 0) - \Delta H(\alpha_{opt n}, 1) \right $
• при $\Delta H(\alpha_{max}, 0) \leq \Delta H(\alpha_{opt n}, 1)$	$\varepsilon = \left  1 - \frac{n_{JC}(\alpha = 0)}{n_{min}} \right $
Смена режимов полета между $(\alpha_{opt H}, \zeta = 1)$ и $(\alpha_{max}, \zeta = 0)$	$\varepsilon = \left  \Delta H(\alpha_{max}, 0) - \Delta H(\alpha_{opt H}, 1) \right $
Смена режимов полета между $(\alpha = 0, \zeta = 0)$ и $(\alpha_{max}, \zeta = 0)$	$\varepsilon = \left  \Delta H(\alpha_{max}, 0) - \Delta H(\alpha = 0, 0) \right $

**Таблица 3.** Параметры ВЭРД, КА и орбит

Параметр	Значения
Начальная высота перигея $h_{\pi i}$ , км	[140, 180]
Начальная высота апогея $h_{oi}$ , км	[160, 1000]
Площадь поперечного сечения КА $A_{SC}$ , м <sup>2</sup>	0.1
Удлинение КА $\lambda_{SC}$	[2, 8]
Тяговый к.п.д. ВЭРД $\eta_T$	0.8
Эффективность забора газа $\eta_c$	0.333
Коэффициент компрессии газа в ИК $k_c$	145
Скорость истечения реактивной струи $c$ , км/с	[80, 140]
Коэффициент аэродинамического сопротивления КА при нулевом угле атаки $c_{x0}$	2.2
Минимально допустимая концентрация молекул газа в ИК $n_{min}$ , м <sup>-3</sup>	$10^{18}$
Скоростное соотношение частиц в набегающем потоке $S_{\infty}$	10
Максимально допустимый угол атаки $ \alpha_{max} $ , град	20

**Рис. 5.** Пример изменения невязки  $\Delta r$  по итерациям процедуры поиска оптимального угла атаки по рекуррентной формуле (23).

### ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

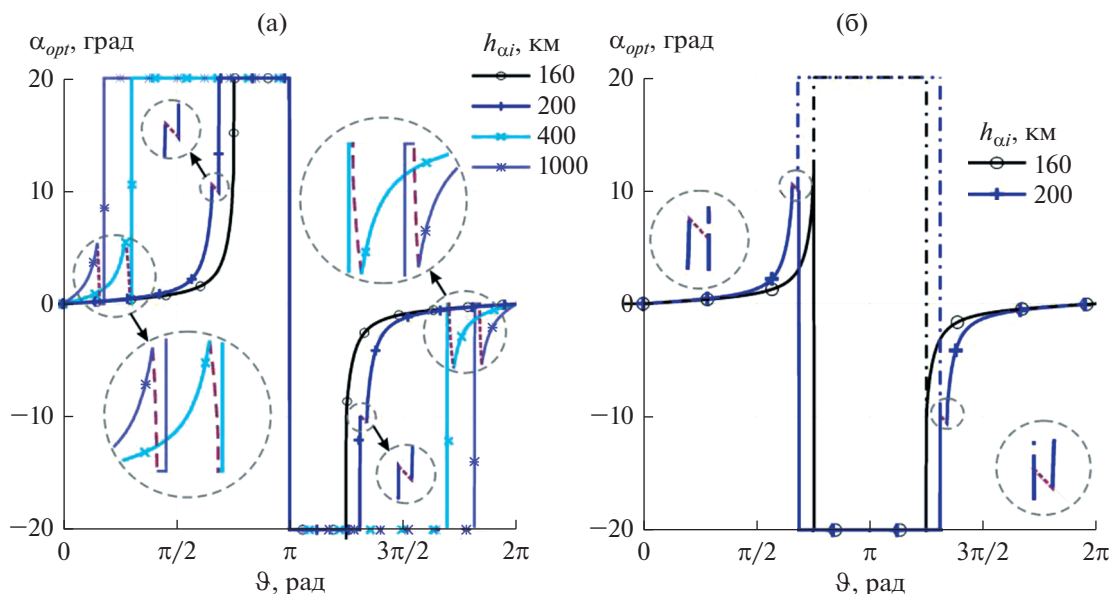
На основании разработанной методики проведены численные исследования для параметров ВЭРД, КА и орбит, приведенных в табл. 3.

Сделаны следующие допущения:

1. КА движется по солнечно-синхронной орбите (ССО) в плоскости терминатора.
2. Площадь входного отверстия ВЗ при  $\alpha = 0$  равна площади поперечного сечения КА  $A_{in} = A_{SC}$ .
3.  $A_{pn} = A_{pp}$ .
4. Ограничение на угловую скорость разворота КА относительно центра масс отсутствует.

Оптимальные программы изменения угла атаки КА и тяги ВЭРД на орбитах с начальной высотой перигея  $h_{\pi i} = 160$  км в зависимости от начальной высоты апогея  $h_{oi}$  и истинной аномалии  $\vartheta$  приведены на рис. 6, 7. На рис. 6 участки опти-

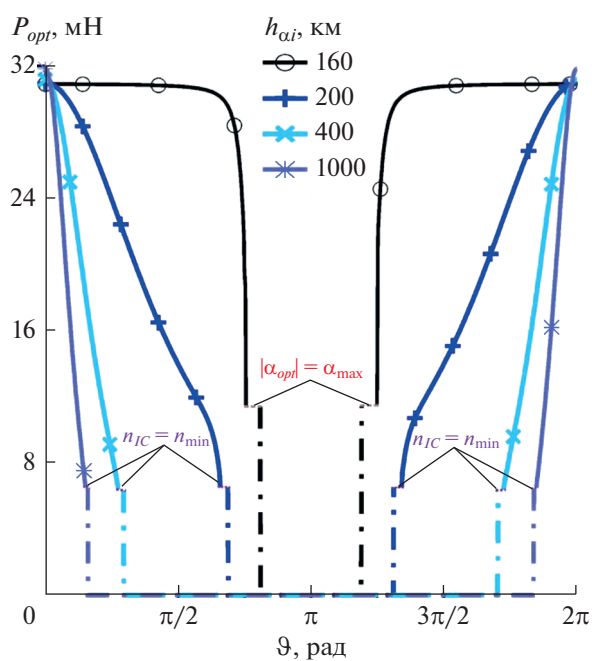




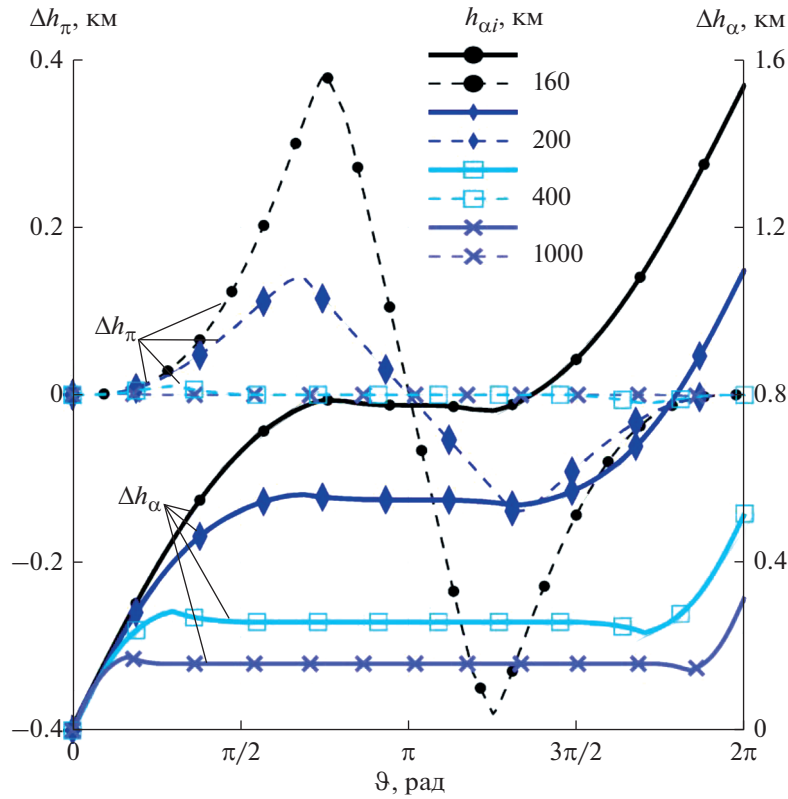
**Рис. 6.** Оптимальные программы изменения  $\alpha_{opt}$  на орбитах с начальными  $h_{\pi i} = 160$  км и  $h_{\alpha i} \in [160, 1000]$  км в зависимости от истинной аномалии  $\vartheta$ ; штриховыми линиями показаны участки, соответствующие граничной концентрации  $n_{IC} = n_{min}$  (а); варианты  $\alpha_{opt}(\vartheta)$  при реализации  $\alpha_{opt} = -\alpha_{max}$  (сплошные линии) и  $\alpha_{opt} = \alpha_{max}$  (штрихпунктирные линии) на участках движения по границе ограничения (8) (б).

мальной программы управления углом атаки при работе ВЭРД с минимально допустимой концентрацией газов в ИК (на границе ограничения (7)) показаны пунктирными линиями. На круговой орбите (начальная высота орбиты  $h_{orb i} = 160$  км) концентрация газов в ИК не снижается до минимально допустимой, и участок, соответствующий движению по границе ограничения (7), отсутствует. Функция  $\Delta H_{10}$  (табл. 1) — четная, т.е.  $\Delta H(\alpha_{opt} = \alpha_{max}, \zeta = 0) = \Delta H(\alpha_{opt} = -\alpha_{max}, \zeta = 0)$  в соответствии с выражениями (2), (4)–(6), (15), (18), (20), (22). Поэтому выбор  $\alpha_{opt} = \alpha_{max}$  при  $\vartheta \leq \pi$  и  $\alpha_{opt} = -\alpha_{max}$  при  $\vartheta > \pi$  на рис. 6а обусловлен минимизацией скачкообразного изменения угла атаки в более плотных слоях атмосферы. В этом случае максимальное изменение угла атаки (переключение с  $\alpha_{opt} = \alpha_{max}$  на  $\alpha_{opt} = -\alpha_{max}$ ) происходит в апогее орбиты. В то же время на круговых и слабо эллиптических орбитах это обстоятельство несущественно. С точки зрения минимизации количества резких изменений  $\alpha_{opt}$  возможные варианты зависимостей  $\alpha_{opt}(\vartheta)$  для исходных круговой орбиты с  $h_{orb i} = 160$  км и орбиты с  $h_{\pi i} = 160$  км и  $h_{\alpha i} = 200$  км показаны на рис. 6б: с реализацией  $\alpha_{opt} = -\alpha_{max}$  (сплошные линии) и  $\alpha_{opt} = \alpha_{max}$  (пунктирные линии) на участках движения по границе ограничения на угол атаки (8).

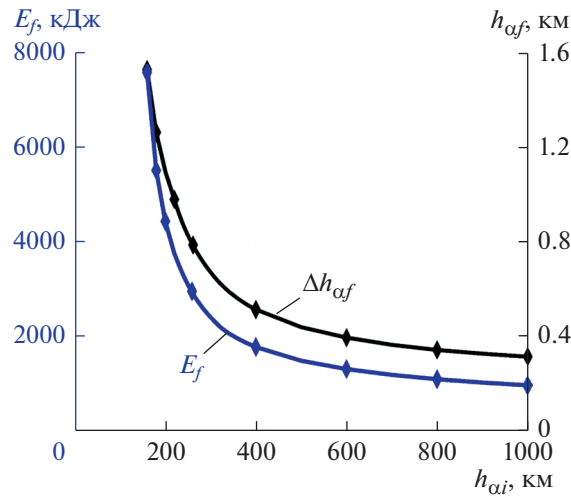
На рис. 7 пунктирными линиями показаны участки работы ВЭРД при минимально допустимой концентрации в ИК (на границе ограниче-



**Рис. 7.** Оптимальные программы тяги ВЭРД  $P_{opt}$  на орбитах с начальными  $h_{\pi i} = 160$  км и  $h_{\alpha i} \in [160, 1000]$  км в зависимости от истинной аномалии  $\vartheta$ ; пунктирными линиями выделены участки, соответствующие граничной концентрации  $n_{IC} = n_{min}$ , штриховыми линиями — участки, соответствующие  $|\alpha_{opt}| = \alpha_{max}$ , штрихпунктирными линиями — участки с нулевой тягой.



**Рис. 8.** Изменение высот апогея  $\Delta h_\alpha$  (сплошные линии) и перигея  $\Delta h_\pi$  (штриховые линии) оскулирующих орбит при оптимальном управлении КА в зависимости от истинной аномалии  $\vartheta$  с начальными  $h_{\pi i} = 160$  км,  $h_{\alpha i} \in [160, 1000]$  км.

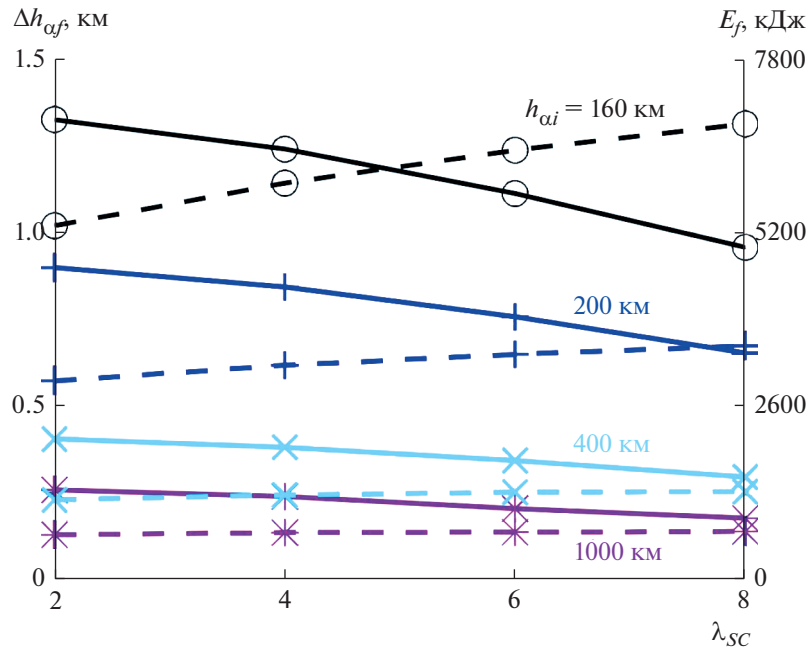


**Рис. 9.** Максимально возможное увеличение высоты апогея  $\Delta h_{\alpha f}$  и потребляемая ВЭРД энергия  $E_f$  за один виток орбиты с начальной высотой перигея  $h_{\pi i} = 160$  км в зависимости от начальной высоты апогея  $h_{\alpha i}$ .

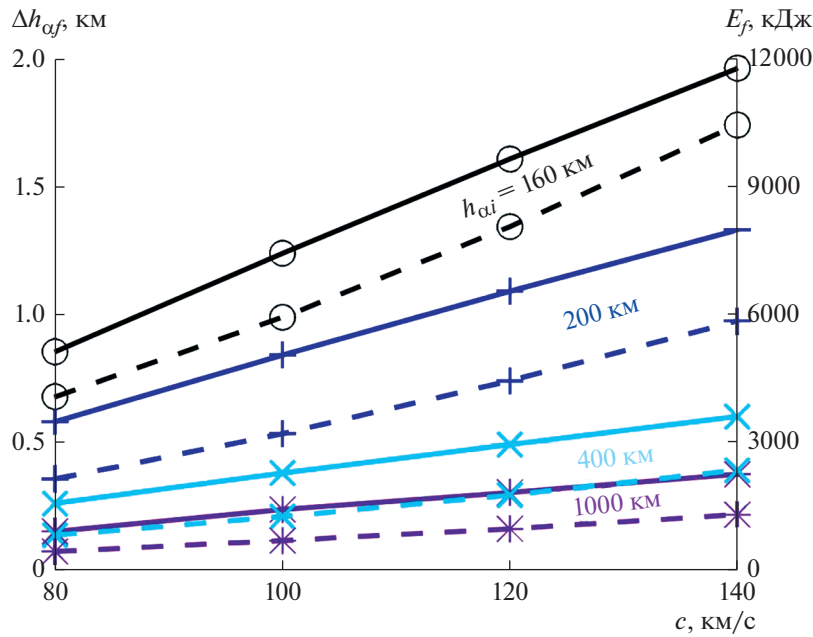
ния (7)), штрихпунктирные линии соответствуют участкам пассивного полета КА (с нулевой тягой). Отключается ( $\zeta = 0$ ) и включается ( $\zeta = 1$ ) тяга в соответствии с условиями оптимальности (21). На круговой орбите, где концентрация газов в ИК не снижается до минимальной, штриховой линией

указана тяга, реализующаяся при максимальном угле атаки.

На рис. 8 в зависимости от истинной аномалии  $\vartheta$  показано оптимальное изменение высоты перигея  $\Delta h_\pi$  (пунктирные линии) и апогея  $\Delta h_\alpha$



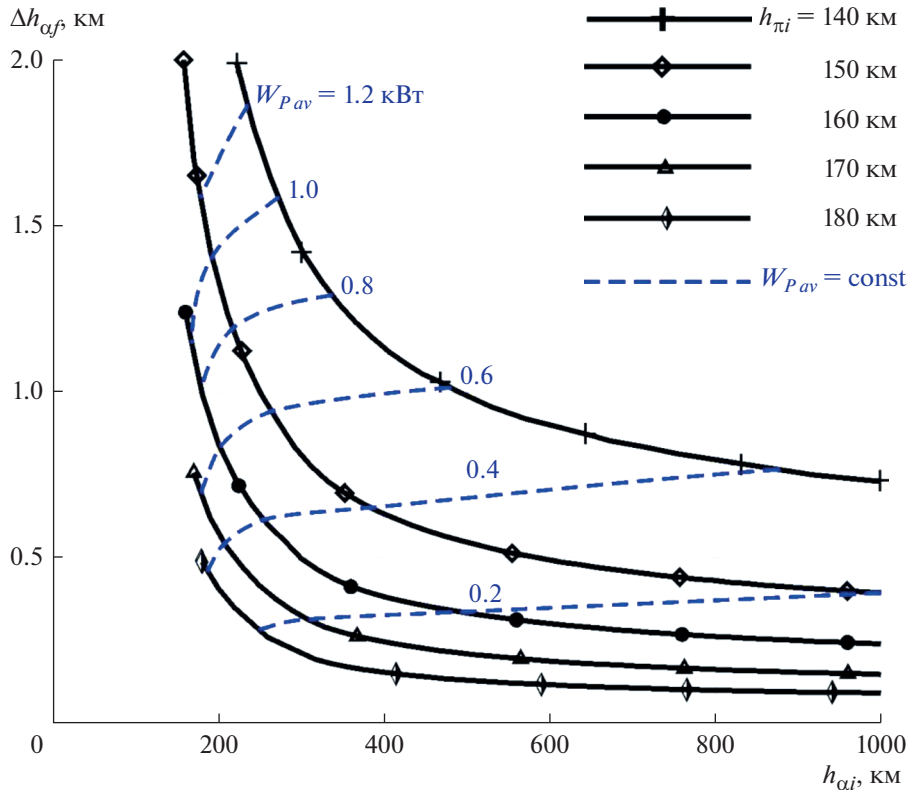
**Рис. 10.** Максимальное изменение высоты апогея  $\Delta h_{\alpha f}$  (сплошные линии) и потребляемая ВЭРД энергия  $E_f$  (штриховые линии) за один виток орбиты с начальной высотой перигея  $h_{\pi i} = 160$  км в зависимости от начальной высоты апогея  $h_{\alpha i}$  и удлинения КА  $\lambda_{SC}$  при  $c = 100$  км/с.



**Рис. 11.** Максимальное изменение высоты апогея  $\Delta h_{\alpha f}$  (сплошные линии) и потребляемая ВЭРД энергия  $E_f$  (штриховые линии) за один виток орбиты с начальной высотой перигея  $h_{\pi i} = 160$  км в зависимости от начальной высоты апогея  $h_{\alpha i}$  и скорости истечения  $c$  при  $\lambda_{SC} = 4$ .

(сплошные линии) оскулирующих орбит при полете КА с ВЭРД с оптимальным управлением углом атаки и тягой (рис. 6, 7). Как следует из рис. 8, максимум изменения высоты апогея при оптимальном управлении достигается на круго-

вой орбите  $h_{orb i} = 160$  км. Но и затраты энергии для работы ВЭРД на круговой орбите также максимальны (рис. 9). Поэтому в условиях ограниченной энергетики благодаря возможности накопления энергии на высотах, где аэродинамиче-



**Рис. 12.** Максимальное изменение высоты апогея  $\Delta h_{\alpha f}$  за один виток орбиты в зависимости от начальных  $h_{\pi i}$  и  $h_{\alpha i}$ ; штриховыми показаны линии уровня средней за виток потребляемой ВЭРД мощности  $W_{Pav}$  при  $c = 100$  км/с,  $\lambda_{SC} = 4$ .

ское сопротивление КА практически отсутствует, использование эллиптических орбит для обеспечения длительного существования КА с ВЭРД может оказаться предпочтительнее круговых.

Результаты численных исследований на рис. 6–9 получены для КА удлинением  $\lambda_{SC} = 4$  с ВЭРД со скоростью истечения  $c = 100$  км/с. Результаты исследования влияния этих параметров представлены на рис. 10, 11. Показаны относительные изменения высоты апогея  $\Delta h_{\alpha f}$  (сплошные линии) и потребляемая ВЭРД энергия  $E_f$  (штриховые линии) за один виток орбитального полета с начальной высотой перигея  $h_{\pi i} = 160$  км в зависимости от начальной высоты апогея  $h_{\alpha i}$ ,  $\lambda_{SC} \in [2, 8]$  (рис. 10) и скорости истечения  $c \in [80, 140]$  км/с (рис. 11). Из рисунков следует, что влияние рассматриваемых параметров ( $\lambda_{SC}$  и  $c$ ) снижается при увеличении эллиптичности орбит с начальными высотами перигея и апогея в рассматриваемом диапазоне.

На рис. 12 приведены оптимальные изменения высоты апогея за один виток орбиты  $\Delta h_{\alpha f}$  в зависимости от начальной высоты перигея  $h_{\pi i} \in [140, 180]$  км и апогея  $h_{\alpha i} \in [140, 1000]$  км при постоянной скорости истечения  $c = 100$  км/с и  $\lambda_{SC} =$

$= 4$ . На рис. 12 также показаны линии уровня усредненной мощности  $W_{Pav} = E_f / T_{orb}$  за период обращения  $T_{orb}$ . Приведенные результаты исследований еще раз подтверждают, что для обеспечения длительного активного существования КА с ВЭРД использование эллиптических орбит с ультранизким перигеем может быть предпочтительнее за счет возможности накопления энергии на высотах, где аэродинамическое сопротивление КА пренебрежимо мало.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе применения принципа максимума Понтрягина для системы уравнений в оскулирующих переменных решена задача оптимизации управления вектором тяги ВЭРД для наискорейшего изменения высоты апогея орбиты КА с учетом зависимости тяги от угла атаки и концентрации газа в ионизационной камере.

Получены оценки эффективности разработанных оптимальных программ управления углом атаки и тягой ВЭРД в зависимости от начальных высот перигея и апогея, скорости истечения, параметров компоновки КА.

Показано, что использование эллиптических орбит в условиях ограниченной энергетики может

быть предпочтительнее благодаря возможности накопления энергии на высотах, где аэродинамическое сопротивление КА практически отсутствует.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект № 20-69-46034, Организация – МГУ имени М.В. Ломоносова.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гродзовский Г.Л., Иванов Ю.Н., Токарев В.В. Механика космического полета с малой тягой. М.: Наука, 1966.
2. Маров М.Я., Филатьев А.С. Комплексные исследования электрореактивных двигателей при полетах в ионосфере Земли: К 50-летию Государственной программы “Янтарь” // Косм. исслед. 2018. Т. 56. № 2. С. 137–144. <https://doi.org/10.7868/S0023420618020061> (Cosmic Research. 2018. T. 56. № 2. P. 123–129). <https://doi.org/10.7868/S0023420618020061>
3. Virgili J., Roberts P.C.E., Palmer K. et al. Very Low Earth Orbit mission concepts for Earth Observation: Benefits and challenges // Proc. 12th Reinventing Space Conf. London, UK. 2014. BIS-RS-2014-37.
4. Filatyev A.S., Golikov A.A., Nosachev L.V. et al. Spacecraft with air-breathing electric propulsion as the future ultra-speed aircraft // Proc. 71th Intern. Astronautical Congress. The CyberSpace Edition. 1–5 Oct. 2020. IAC-20-C4.6.8.
5. Dolgich A. Soviet Studies on Low-Thrust Orbital Propellant-Scooping Systems // Foreign Science Bull. 1969. V. 5. № 7. P. 1–9.
6. Цой Э.П. Выбор оптимальной программы управления тягой накопителя рабочего вещества в нестационарном режиме // Тр. ЦАГИ. 1968. Вып. 1145.
7. Шумилкин В.Г. Управление тягой орбитального аппарата с двигателем ограниченной мощности при полете с накоплением атмосферного воздуха // Ученые записки ЦАГИ. 1976. Т. 7. № 2. С. 81–87.
8. Romano F. et al. System Analysis and Test-Bed for an Atmosphere-Breathing Electric Propulsion System Using an Inductive Plasma Thruster // Proc. 68th Intern. Astronautical Congress. Adelaide, Australia, 25–29 Sept. 2017. IAC-17-C4.6.5.
9. Rock B.St., Blandino J.J., Demetriou M.A. Propulsion Requirements for Drag-Free Operation of Spacecraft in Low Earth Orbit // J. Spacecraft and Rockets. 2006. V. 43. № 3. P. 594–606. <https://doi.org/10.2514/1.15819>
10. Marchetti P., Blandino J.J., Demetriou M.A. Electric Propulsion and Controller Design for Drag-Free Spacecraft Operation // J. Spacecraft and Rockets. 2008. V. 45. № 6. P. 1303–1315. <https://doi.org/10.2514/1.36307>
11. Becedas J., González G., Domínguez R.M. et al. Aerodynamic Technologies for Earth Observation Missions in Very Low earth Orbit. A: Reinventing Space Conference // Proc. 16th Reinventing Space Conf. (RISpace). London, UK, 30 Oct. – 1 Nov. 2018. P. 1–10.
12. Filatyev A.S., Erofeev A.I., Yanova O.V. et al. Physical Grounds and Control Optimization of Low-Orbit Spacecraft with Electric Ramjet // Proc. 68th Intern. Astronautical Congress. Adelaide, Australia, 25–29 Sept. 2017. IAC-17-C4.1P.51.
13. Barral S., Cifali G., Albertoni R. et al. Conceptual Design of an Air-Breathing Electric Propulsion System // Proc. 34th Intern. Electric Propulsion Conf. Kobe, Japan, 4–10 July 2015. IEPC-2015-271.
14. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе П.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969.
15. Filatyev A.S., Yanova O.V. On the optimal use of electric ramjet for low-orbit spacecraft // Procedia Engineering. 2017. V. 185. P. 173–181. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2017.03.299>
16. Filatyev A.S., Erofeev A.I., Nikiforov A.P. et al. Comparative evaluation of the applicability of electrical ramjets // Proc. 58th Israel Annual Conf. Aerospace Science. WeLIT4.3. Tel-Aviv, Haifa, Israel, 14–15 Mar. 2018. P. 503–519. <http://toc.proceedings.com/37020webtoc.pdf>.
17. Filatyev A.S., Yanova O.V. The control optimization of low-orbit spacecraft with electric ramjet // Acta Astronautica. 2019. V. 158. P. 23–31.
18. Yanova O.V., Filatyev A.S. Synthesis of the optimal control of spacecraft with air-breathing electric propulsion in orbits with ultra-low perigee in view of dependence of the engine efficiency on angle of attack // Proc. 71th Intern. Astronautical Congress. The CyberSpace Edition. 1–5 Oct. 2020. IAC-20-C1.5.1.
19. Ерофеев А.И., Никифоров А.П., Плугин В.В. Экспериментальные исследования воздухозаборника в свободномолекулярном потоке газа // Ученые записки ЦАГИ. 2017. Т. 48. № 3. С. 56–69.
20. Ерофеев А.И., Никифоров А.П., Плугин В.В. Моделирование процессов в воздухозаборнике для низкоорбитальных космических аппаратов в вакуумной аэродинамической трубе // Актуальные вопросы проектирования автомат. космич. аппаратов для фундам. и прикладных науч. исслед.: сб. тр. конф. Вып. 2. Химки: Изд-во “НПО им. С.А. Лавочкина”. 2017. С. 365–374.
21. Охоцимский Д.Е., Сихарулидзе Ю.Г. Основы механики космического полета. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990.
22. Муреп С.А. Механика космического полета. Орбитальное движение. М.: Резолит, 2007.
23. Fearn D.G. Ion thruster thrust vectoring requirements and techniques // 27th Intern. Electric Propulsion Conf. Pasadena, CA. 15–19 Oct. 2001. IEPC-01-115.
24. Munoz V., González D., Becedas J. et al. Attitude control for satellites flying in VLEO using aerodynamic surfaces // J. British Interplanetary Society. 2020. V. 73. № 3. P. 103–112.
25. Prieto D.M., Graziano B.P., Roberts P.C.E. Spacecraft drag modelling // Progress in Aerospace Sciences. 2014. V. 64. P. 56–65. <https://doi.org/10.1016/j.paerosci.2013.09.001>

26. *Livadiotti S., Crisp N.H., Robert P.C.E. et al.* A review of gas-surface interaction models for orbital aerodynamics applications // *Progress in Aerospace Sciences*. 2020. V. 119. Art. № 100675.  
<https://doi.org/10.1016/j.paerosci.2020.100675>
27. *Mehta P.M., Walker A., McLaughlin C.A., Koller J.* Comparing Physical Drag Coefficients Computed Using Different Gas-Surface Interaction Models // *J. Spacecraft and Rockets*. 2014. V. 51. № 3. P. 873–883.  
<https://doi.org/10.2514/1.A32566>
28. *Koppenwallner G.* Satellite Aerodynamics and Determination of Thermospheric Density and Wind // *AIP Conf. Proc.* 2011. V. 1333. P. 1307–1312.  
<https://doi.org/10.1063/1.3562824>
29. *Moe K., Moe M.M.* Gas-surface interactions and satellite drag coefficients // *Planetary and Space Science*. 2005. V. 53. P. 793–801.  
<https://doi.org/10.1016/j.pss.2005.03.005>
30. *Koppenwallner G.* Comment on special section: new perspectives on the satellite drag environments of Earth, Mars, and Venus // *J. Spacecraft and Rockets*. 2008. V. 45. № 6. P. 1324–1327.  
<https://doi.org/10.2514/1.37539>
31. *Sutton E.K.* Normalized Force Coefficients for Satellites with Elongated Shapes // *J. Spacecraft and Rockets*. 2009. V. 46. № 1. P. 112–116.  
<https://doi.org/10.2514/1.40940>
32. *Doornbos E.* Thermospheric Density and Wind Determination from Satellite Dynamics. Book Ser.: Springer Theses. 2012. <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-642-25129-0>
33. *Golikov A.A., Filatyev A.S.* Integrated optimization of trajectories and layout parameters of spacecraft with air-breathing electric propulsion // *Acta Astronautica*. 2022. V. 193. P. 644–652.  
<https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2021.06.052>