

УДК 681.51

## РЕАЛИЗАЦИЯ РЕЖИМА СОЛНЕЧНОЙ ОРИЕНТАЦИИ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С ПОМОЩЬЮ СИСТЕМЫ ДВИГАТЕЛЕЙ-МАХОВИКОВ

© 2023 г. А. И. Игнатов<sup>1</sup> \*, Г. А. Иванов<sup>1</sup>, Е. С. Коломиец<sup>1</sup>, Е. В. Мартыненко<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

\*general\_z@mail.ru

Поступила в редакцию 06.04.2022 г.

После доработки 15.04.2022 г.

Принята к публикации 15.06.2022 г.

Исследован режим поддержания солнечной ориентации космического аппарата – гиростата на низкой околоземной орбите в течение длительного времени. Аппарат по форме близок к цилиндру с двумя неподвижными панелями солнечных батарей. Панели расположены вдоль продольной оси цилиндра, симметрично относительно нее. В режиме солнечной ориентации нормаль к плоскости солнечных батарей аппарата неизменно направлена на Солнце, продольная ось совершает колебания относительно плоскости орбиты. Для реализации указанного режима движения космического аппарата используется система четырех двигателей-маховиков, оси вращения которых направлены параллельно боковым ребрам четырехугольной пирамиды. Положение боковых ребер пирамиды относительно жестко связанной с аппаратом системы координат задается двумя углами, которые являются параметрами системы двигателей-маховиков. Рассматривается закон управления гиростатическим моментом, при котором обеспечивается затухание возмущенного движения космического аппарата в окрестности положения его солнечной ориентации и ограничивается накопление собственного кинетического момента двигателей-маховиков за счет управления углом поворота аппарата вокруг нормали к светочувствительной стороне солнечных батарей. В работе показано, что с помощью определенного выбора параметров системы двигателей-маховиков возможно реализовать режим солнечной ориентации без проведения разгрузок гиростатического момента в течение всего времени полета. Приведены результаты численного моделирования полной системы уравнений движения космического аппарата в режиме его солнечной ориентации с учетом воздействия гравитационного и аэродинамического моментов, подтверждающие правильность выбранных значений параметров.

DOI: 10.31857/S0023420622700017, EDN: LUGGZP

### ВВЕДЕНИЕ

Режим солнечной ориентации часто используется в процессе эксплуатации космических аппаратов (КА), поскольку обеспечивает максимальный приток электроэнергии на борт. В работе исследуется поддержание режима солнечной ориентации КА на низкой околоземной орбите с помощью гиросистемы в течение длительного времени. Специфика рассматриваемого КА состоит в том, что на нем расположены неподвижные панели солнечных батарей, поэтому для наиболее их эффективного использования необходимо поддерживать непрерывную ориентацию вектора нормали к светочувствительной стороне панелей батарей на Солнце. При использовании гиросистемы одним из основных требований к режиму ориентации КА является малая скорость накопления собственного кинетического момента гиросистемы (гиростатического момента), для увеличения ин-

тервалов времени между проведением разгрузок. Накопление гиростатического момента происходит за счет воздействия на КА гравитационного и аэродинамического моментов. В настоящей работе рассматривается закон управления гиростатическим моментом КА, при котором обеспечивается затухание возмущенного движения КА в окрестности положения его солнечной ориентации и ограничивается накопление гиростатического момента за счет управления углом поворота КА вокруг нормали к светочувствительной стороне солнечных батарей [1–3].

### УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

КА считаем гиростатом, для описания его движения будем использовать три правых декартовых системы координат.

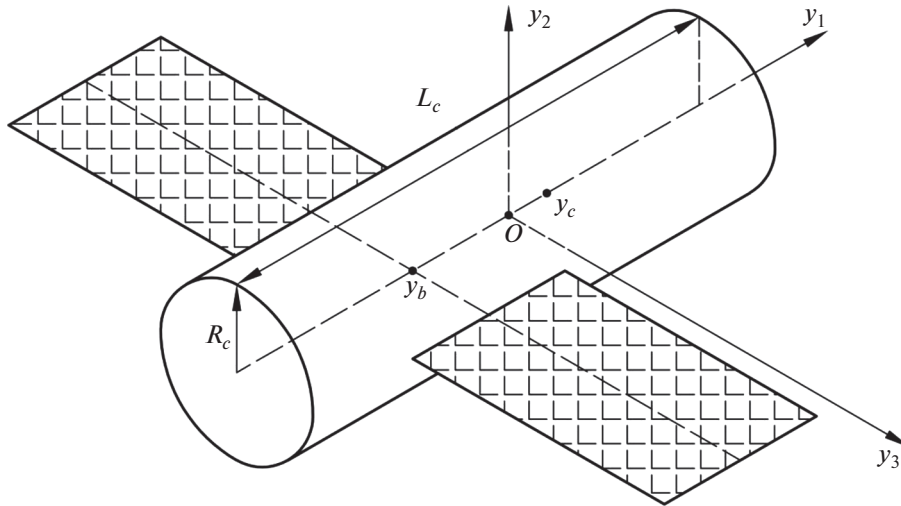


Рис. 1. Общая форма КА и положение осей связанной системы координат.

•  $Oy_1y_2y_3$  — связанная система координат, образованная главными центральными осями инерции КА. Полагаем, что КА имеет форму прямого кругового цилиндра (рис. 1) радиуса  $R_c$  и высоты  $L_c$  с двумя прикрепленными к нему одинаковыми прямоугольными пластинами — солнечными батареями суммарной площади  $S_b$ . Ось цилиндра совпадает с осью  $Oy_1$ . Солнечные батареи расположены в плоскости  $Oy_1y_3$  симметрично относительно оси  $Oy_1$ , стороны батарей параллельны осям  $Oy_3$  и  $Oy_2$ , ось  $Oy_2$  перпендикулярна плоскости солнечных батарей. Светочувствительная сторона солнечных батарей обращена к полупространству  $y_2 > 0$ . Координаты геометрических центров цилиндра и пластин солнечных батарей обозначим  $(y_c, 0, 0)$  и  $(y_b, 0, 0)$  соответственно, базисные орты этой системы —  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ . Ниже, если не оговорено особо, компоненты векторов и координаты точек относятся к системе  $Oy_1y_2y_3$ .

•  $O_E Y_1 Y_2 Y_3$  — гринвичская система координат. Ее начало находится в центре Земли, плоскость  $O_E Y_1 Y_2$  совпадает с плоскостью экватора, ось  $O_E Y_1$  пересекает гринвичский меридиан, ось  $O_E Y_3$  направлена к Северному полюсу.

•  $O_E Z_1 Z_2 Z_3$  — квазиинерциальная система координат. Ось  $O_E Z_2$  параллельна вектору кинетического момента орбитального движения КА, ось  $O_E Z_3$  лежит в плоскости экватора и направлена в восходящий узел оскулирующей орбиты КА. Базис этой системы образован ортами  $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3$ .

Матрицу перехода от системы  $O_E Z_1 Z_2 Z_3$  к системе  $O_E Y_1 Y_2 Y_3$  обозначим  $C = \|c_{ij}\|_{i,j=1}^3$ , где  $c_{ij}$  — косинус угла между осями  $O_E Y_i$  и  $O_E Z_j$ . Элементы этой матрицы выражаются через координаты и

компоненты скорости центра масс КА в гринвичской системе координат. Матрицы перехода от системы  $Oy_1y_2y_3$  к гринвичской системе координат и системе  $O_E Z_1 Z_2 Z_3$  обозначим соответственно  $B = \|b_{ij}\|_{i,j=1}^3$  и  $A = \|a_{ij}\|_{i,j=1}^3$ . Здесь  $b_{ij}$  и  $a_{ij}$  — косинусы углов, которые образует ось  $Oy_j$  с осями  $O_E Y_i$  и  $O_E Z_i$ . Справедливы соотношения  $a_{ij} = \mathbf{E}_i \times \mathbf{e}_j$ ,  $B = CA$ .

Положение системы  $Oy_1y_2y_3$  относительно системы  $O_E Z_1 Z_2 Z_3$  будем также задавать углами  $\psi, \theta$  и  $\varphi$ , которые введем следующим образом. Если точку  $O_E$  перенести в точку  $O$ , то систему  $O_E Z_1 Z_2 Z_3$  можно перевести в систему  $Oy_1y_2y_3$  тремя последовательными поворотами: 1) на угол  $\psi$  вокруг оси  $O_E Z_2$ , 2) на угол  $\pi/2 - \theta$  вокруг новой оси  $O_E Z_1$ , 3) на угол  $\varphi + \pi$  вокруг новой оси  $O_E Z_2$ , совпадающей с осью  $Oy_2$ . Элементы матрицы  $A$  выражаются через эти углы с помощью следующих формул:

$$a_{11} = -\cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi \sin \theta,$$

$$a_{12} = \sin \psi \cos \theta,$$

$$a_{21} = -\sin \varphi \cos \theta, \quad a_{22} = \sin \theta,$$

$$a_{31} = \cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi \sin \theta,$$

$$a_{32} = \cos \psi \cos \theta,$$

$$a_{13} = -\sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi \sin \theta,$$

$$a_{23} = \cos \varphi \cos \theta,$$

$$a_{33} = \sin \varphi \sin \psi - \cos \varphi \cos \psi \sin \theta.$$

Уравнения движения КА состоят из двух подсистем. Одна подсистема описывает движение центра масс КА в гринвичской системе координат с учетом нецентральности гравитационного поля Земли и сопротивления атмосферы. Другая

подсистема описывает движение КА относительно центра масс (вращательное движение).

В векторном виде подсистему уравнений движения центра масс КА можно представить, как в работе [4]:

$$\frac{\tilde{d}^2 \mathbf{r}}{dt^2} + 2(\boldsymbol{\omega}_E \times \mathbf{v}) + \boldsymbol{\omega}_E \times (\boldsymbol{\omega}_E \times \mathbf{r}) = -\frac{\mu_E}{r^3} \mathbf{r} + \mathbf{f}_d,$$

$$\mathbf{f}_d = \nabla U_B - c \rho_a \mathbf{v} \mathbf{v}.$$

Здесь символом  $\tilde{d}/dt$  обозначена локальная производная вектора в системе  $O_E Y_1 Y_2 Y_3$ ,  $\boldsymbol{\omega}_E$  – вектор угловой скорости вращения Земли;  $\mathbf{v} = \tilde{d}\mathbf{r}/dt$  – относительная скорость движения центра масс КА,  $v = |\mathbf{v}|$ ,  $r$  – радиус-вектор центра масс КА,  $r = |\mathbf{r}|$ ;  $\mu_E$  – гравитационный параметр Земли;  $\mathbf{f}_d$  – вектор суммарных возмущающих ускорений, действующих на КА;  $\nabla U_B$  – градиент потенциала гравитационного поля Земли, за исключением потенциала центрального поля;  $c$  – баллистический коэффициент КА;  $\rho_a$  – плотность атмосферы в точке, задаваемой вектором  $\mathbf{r}$ . Нецентральность поля учитывается с точностью до членов порядка (16, 16) включительно в разложении гравитационного потенциала Земли в ряд по шаровым функциям. Влияние атмосферы на движение центра масс КА учитывается в виде силы лобового сопротивления с нулевым углом атаки. Атмосфера считается вращающейся вместе с Землей, ее плотность рассчитывается согласно модели ГОСТ Р 25645.166-2004. Параметры атмосферы и баллистический коэффициент КА считаются неизменными на всем интервале интегрирования уравнений движения.

Подсистема уравнений вращательного движения КА имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\tilde{d}\mathbf{K}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K} &= \mathbf{M}_g + \mathbf{M}_a, \\ \mathbf{K} &= \hat{I} \boldsymbol{\omega} + \mathbf{H}, \quad \frac{\tilde{d}\mathbf{H}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H} = -\mathbf{M}_c, \\ \frac{\tilde{d}\mathbf{b}_1}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{b}_1 &= \boldsymbol{\omega}_E \mathbf{b}_2, \quad \frac{\tilde{d}\mathbf{b}_2}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{b}_2 = -\boldsymbol{\omega}_E \mathbf{b}_1. \end{aligned} \right\} (1)$$

Здесь  $\tilde{d}/dt$  – локальная производная вектора в системе  $O_E y_1 y_2 y_3$ ,  $\mathbf{K} = (K_1, K_2, K_3)^T$  – кинетический момент КА в его движении относительно центра масс;  $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$  – абсолютная угловая скорость КА;  $\hat{I} = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$  – тензор инерции КА;  $\mathbf{H} = (H_1, H_2, H_3)^T$  – гиросtatический момент КА (собственный кинетический момент гиросистемы);  $\mathbf{M}_g$  – гравитационный момент, действующий на КА;  $\mathbf{M}_a$  – аэродинамический момент, действующий на КА;  $\mathbf{M}_c$  – момент, действующий со стороны гиросистемы, на корпус КА;  $\boldsymbol{\omega}_E = |\boldsymbol{\omega}_E|$  – угловая скорость вращения Земли;  $\mathbf{b}_1$  и  $\mathbf{b}_2$  – соот-

ветственно первая и вторая строки матрицы перехода  $B$ . Третья строка этой матрицы  $\mathbf{b}_3 = \mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2$ . Строки  $\mathbf{b}_1$  и  $\mathbf{b}_2$  связаны условиями ортогональности матрицы  $B$  ( $\mathbf{b}_i$  – орты осей  $O_E Y_i$ ), которые учитываются при задании начальных условий для этих переменных.

Гравитационный момент задается формулой [5]:

$$\mathbf{M}_g = 3 \frac{\mu_E}{r^5} (\mathbf{r} \times \hat{I} \mathbf{r}).$$

Формула аэродинамического момента имеет вид

$$\mathbf{M}_a = p(\mathbf{v} \times \mathbf{e}_1),$$

$$p = \rho_a \left( \pi R_c^2 y_c |v_1| + S_b y_b |v_2| + 2 R_c L_c y_c \sqrt{v_2^2 + v_3^2} \right),$$

где  $v_i$  – компоненты вектора  $\mathbf{v}$  ( $i = 1, 2, 3$ ). При выводе последней формулы считалось, что молекулы атмосферы при столкновении с корпусом КА испытывают абсолютно неупругий удар [5], и не учитывалось взаимное затенение корпуса КА и солнечных батарей от набегающего аэродинамического потока. Такое упрощение оправдано, поскольку для большинства движений КА относительная продолжительность отрезков времени, на которых указанное затенение существенно, невелика.

Чтобы замкнуть подсистему уравнений вращательного движения, надо добавить к уравнениям (1) выражение для  $\mathbf{M}_c$ . Оно приведено ниже.

В расчетах использовались следующие параметры описанной модели. Параметры КА:  $m = 6440$  кг,  $I_1 = 2600$  кг м<sup>2</sup>,  $I_2 = 11100$  кг м<sup>2</sup>,  $I_3 = 10900$  кг м<sup>2</sup>,  $R_c = 1.3$  м,  $L_c = 5.0$  м,  $S_b = 33$  м<sup>2</sup>,  $c = 0.005$  м<sup>2</sup>/кг,  $y_b = -1$  м,  $y_c = 0.3$  м. Параметры модели атмосферы:  $F_{10.7} = F_{81} = 150$ ,  $A_p = 12$ .

Начальные условия движения центра масс КА задавались в восходящем узле орбиты в момент времени 07.13.07 UTC 21.XII.2013. При этом элементы орбиты составляли: высота в апогее 575.2 км, высота в перигее 546.8 км, наклонение 64.87°, аргумент широты перигея –124.65°, долгота восходящего узла в гринвичской системе координат 209.70°. На отрезке времени моделирования движения КА максимальное значение угла  $\vartheta$  между ортом направления “Земля–Солнце” и плоскостью орбиты КА достигало 88°.

Начальные условия уравнений (1) задавались в тот же момент времени, что и начальные условия орбитального движения КА. Этот момент служил началом отсчета времени – точкой  $t = 0$ .

### РЕЖИМ СОЛНЕЧНОЙ ОРИЕНТАЦИИ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

Сначала рассмотрим режим трехосной солнечной ориентации КА, в котором ось  $Oy_2$  неизменно направлена на Солнце, ось  $Oy_1$  лежит в плос-

кости орбиты, абсолютная угловая скорость КА мала. Пусть  $\mathbf{s}$  – орт направления “Земля–Солнце”. Орт  $\mathbf{n} = (\mathbf{s} \times \mathbf{E}_2) / |\mathbf{s} \times \mathbf{E}_2|$  лежит в плоскости орбиты КА и ортогонален орту  $\mathbf{s}$ . Изменение ортов  $\mathbf{s}$  и  $\mathbf{n}$  в системе  $Oy_1y_2y_3$  описывается уравнениями

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{s} = 0, \quad \frac{d\mathbf{n}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n} = 0.$$

Закон управления гиросистемой  $\mathbf{M}_c = \mathbf{M}_c(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{s}, \mathbf{n})$ , обеспечивающий затухание возмущенного движения КА в окрестности положения  $\boldsymbol{\omega} = 0$ ,  $\mathbf{e}_1 = \mathbf{n}$ ,  $\mathbf{e}_2 = \mathbf{s}$  с требуемой скоростью, имеет вид [2]:

$$\mathbf{M}_c = \xi^2 \hat{I}(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{s} + \mathbf{e}_1 \times \mathbf{n}) - 2\xi \hat{I} \hat{W} \boldsymbol{\omega},$$

где  $\hat{W} = \text{diag}(1, 1, \sqrt{2})$ ;  $\xi$  – положительный параметр.

Рассмотрим возможность использования закона управления, позволяющего не только обеспечить затухание возмущенного движения КА в окрестности положения  $\mathbf{e}_2 = \mathbf{s}$  с требуемой скоростью, но и дополнительно ограничить рост накапливаемого кинетического момента гиросистемы. Чтобы не нарушать режим солнечной ориентации КА накопление кинетического момента гиросистемы будем контролировать только за счет управления углом поворота КА вокруг орта  $\mathbf{e}_2 = \mathbf{s}$ . Закон управления гиросистемой, обеспечивающий поддержание режима солнечной ориентации с заданными выше условиями, имеет вид [2]:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{M}_c &= \xi^2 \hat{I}(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{s} + \mathbf{e}_1 \times \mathbf{n}) - \\ &- 2\xi \hat{I} \hat{W} \boldsymbol{\omega} - \hat{I}(\chi \boldsymbol{\omega}_2 + f) \mathbf{e}_2, \\ f &= -\frac{3\mu_E}{r^5} \left[ -(\kappa_3 - \kappa_1) r_1 r_2 K_1 + \right. \\ &\left. + \kappa_2 (r_1^2 - r_3^2) K_2 + (\kappa_3 - \kappa_1) r_2 r_3 K_3 \right], \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где  $\chi$ ,  $\kappa_i$  – положительные постоянные;  $r_i$  – компоненты вектора  $\mathbf{r}$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Полагаем, что закон управления (2) формируется в соответствии с показаниями установленных на КА датчиков ориентации и угловой скорости, значения величин  $r_i$  в системе управления можно получить, используя показания датчика центра Земли.

Покажем, что выбранный закон изменения управляющего момента (2) действительно обеспечивает солнечную ориентацию КА и при этом ограничивает накопление кинетического момента гиросистемы. С этой целью вычислим решение системы (1), (2) приняв  $\chi = 2\xi$ ,  $\xi = 0.01 \text{ с}^{-1}$ ,  $\kappa_1 = \kappa_2 = 1 \text{ (Нмс)}^{-1}$ ,  $\kappa_3 = 3 \text{ (Нмс)}^{-1}$ .

Компоненты орта  $\mathbf{s}$  в гринвичской системе координат рассчитывались по приближенным формулам [6]. Начальные условия системы (1), (2) в момент времени  $t = 0$  задавались следующим образом. КА в гринвичской системе координат занимает положение  $\mathbf{e}_1 = \mathbf{n}$ ,  $\mathbf{e}_2 = \mathbf{s}$ . Гиросtatический

момент  $\mathbf{H}(0) = 0$ , начальные значения компонент угловой скорости  $\omega_i$ , задавались с учетом ошибок в их реализации:  $\omega_1(0) = \omega_2(0) = \omega_3(0) = 0.01 \text{ град/с}$ . Результаты расчетов движения КА, полученные в рамках принятой модели, приведены на рис. 2, 3. Эти результаты представлены графиками зависимости от времени углов  $\psi$ ,  $\theta$  и  $\varphi$ , угла  $\sigma = \arccos(\mathbf{s} \times \mathbf{e}_2)$  ( $\theta = \vartheta$  при  $\sigma = 0$ ). На рисунках также представлены графики компонент гиросtatического момента КА  $H_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) и модуля вектора гиросtatического момента  $|\mathbf{H}|$ .

Все графики на рис. 2, 3 построены на интервале времени 14 сут. Переходной процесс (процесс гашения возмущенного движения КА), обусловленный ошибками в задании начальной угловой скорости, длится менее 20 мин и из-за масштаба на рисунках не виден. Результаты моделирования показывают, что использование закона управления (2) обеспечивает солнечную ориентацию КА и затухание его возмущенного движения в окрестности положения  $\mathbf{e}_2 = \mathbf{s}$ . Ошибка солнечной ориентации иллюстрируется графиком угла  $\sigma(t)$  (см. рис. 2). Как видно из приведенного графика, ошибка ориентации достаточно мала. Амплитуды установившихся колебаний компонент абсолютной угловой скорости  $\omega_i$  ограничены значениями:

$$\begin{aligned} |\omega_1| &= 1.0 \cdot 10^{-4} \text{ град/с}, \\ -0.02 &< \omega_2 < 0.03 \text{ град/с}, \\ |\omega_3| &< 4.0 \cdot 10^{-4} \text{ град/с}. \end{aligned}$$

На рис. 3 видны установившиеся колебания величин  $H_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) с доминирующей частотой  $2\omega_0$  ( $\omega_0$  – среднее движение центра масс КА, для рассматриваемой в данной работе орбиты  $\omega_0 \approx 1.1 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$ ), которые вызваны воздействием гравитационного момента [3]. На рис. 3 видно, что из-за использования закона управления (2) постоянного возрастания (накопления) величины кинетического момента гиросистемы не происходит, значение  $|\mathbf{H}|$  остается ограниченным на всем интервале времени моделирования. Однако когда Солнце относительно плоскости орбиты поднимается достаточно высоко ( $\vartheta > 70^\circ$ ), значения  $|\mathbf{H}|$  начинают возрастать, достигая своего максимума  $|\mathbf{H}| \approx 31 \text{ Нмс}$  при  $\vartheta \approx 88^\circ$ . Это связано с тем, что по мере увеличения угла  $\theta$  изменение угла  $\varphi$  поворота КА вокруг оси  $Oy_2$  уже не может остановить накопление  $|\mathbf{H}|$  за счет воздействия гравитационного момента. В дальнейшем, при уменьшении  $\theta$  уменьшается и кинетический момент гиросистемы до значений  $|\mathbf{H}| < 12 \text{ Нмс}$ . Таким образом, результаты моделирования показали, что, используя закон управления (2), можно реализовать режим солнечной ориентации КА

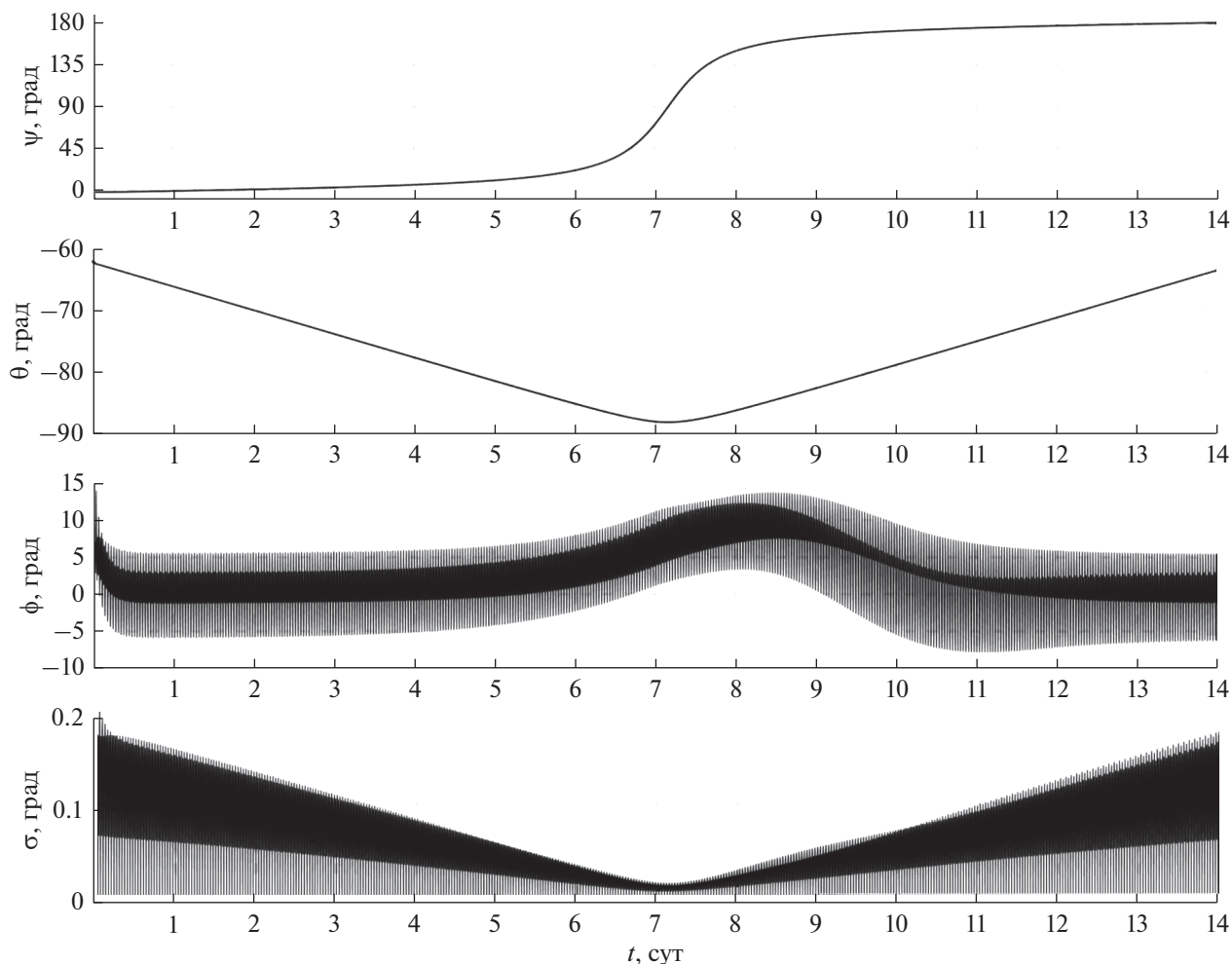


Рис. 2. Углы ориентации КА.

без постоянного накопления абсолютного значения кинетического момента гиросистемы  $|\mathbf{H}|$ . В работах [1–3] также показано, что в случаях, когда угол  $\vartheta < 70^\circ$  величина  $|\mathbf{H}|$  не превышает значения  $12 \text{ Нмс}$  за счет использования закона управления (2). Можно утверждать, что на рис. 3 представлен один из самых неблагоприятных случаев с точки зрения накопления гиросатического момента гиросистемы, когда величина  $|\mathbf{H}|$  достигает наибольшего значения для всех возможных положений Солнца относительно рассматриваемой орбиты КА. В настоящей работе конкретные параметры гиросистемы КА подбираются для случая, при котором реализуется максимальное накопление значения  $|\mathbf{H}|$ .

### СОБСТВЕННЫЙ КИНЕТИЧЕСКИЙ МОМЕНТ СИСТЕМЫ ДВИГАТЕЛЕЙ-МАХОВИКОВ

Динамические требования к системе управления КА, включающей в свой состав гиросистему,

во многом определяются множеством требуемых значений кинетического момента  $H_T$ . Множество  $H_T$  является областью изменения в связанной с КА системе координат вектора суммарного кинетического момента, создаваемого гиросистемой. Изменение этого вектора в указанной области в соответствии с реализуемыми в системе законами должно обеспечивать требуемое управление параметрами вращательного движения КА. Естественно, что множество  $H_T$  должно содержаться внутри множества максимальных значений кинетического момента  $H_C$ , реализуемых гиросистемой.

Таким образом, для всех вариантов построения гиросистемы должно быть обеспечено выполнение условия:

$$H_T \subset H_C. \quad (3)$$

При этом можно утверждать, что величина суммарного кинетического момента, создаваемого гиросистемой, будет достаточной для обеспечения требуемой угловой скорости вращения КА [7].

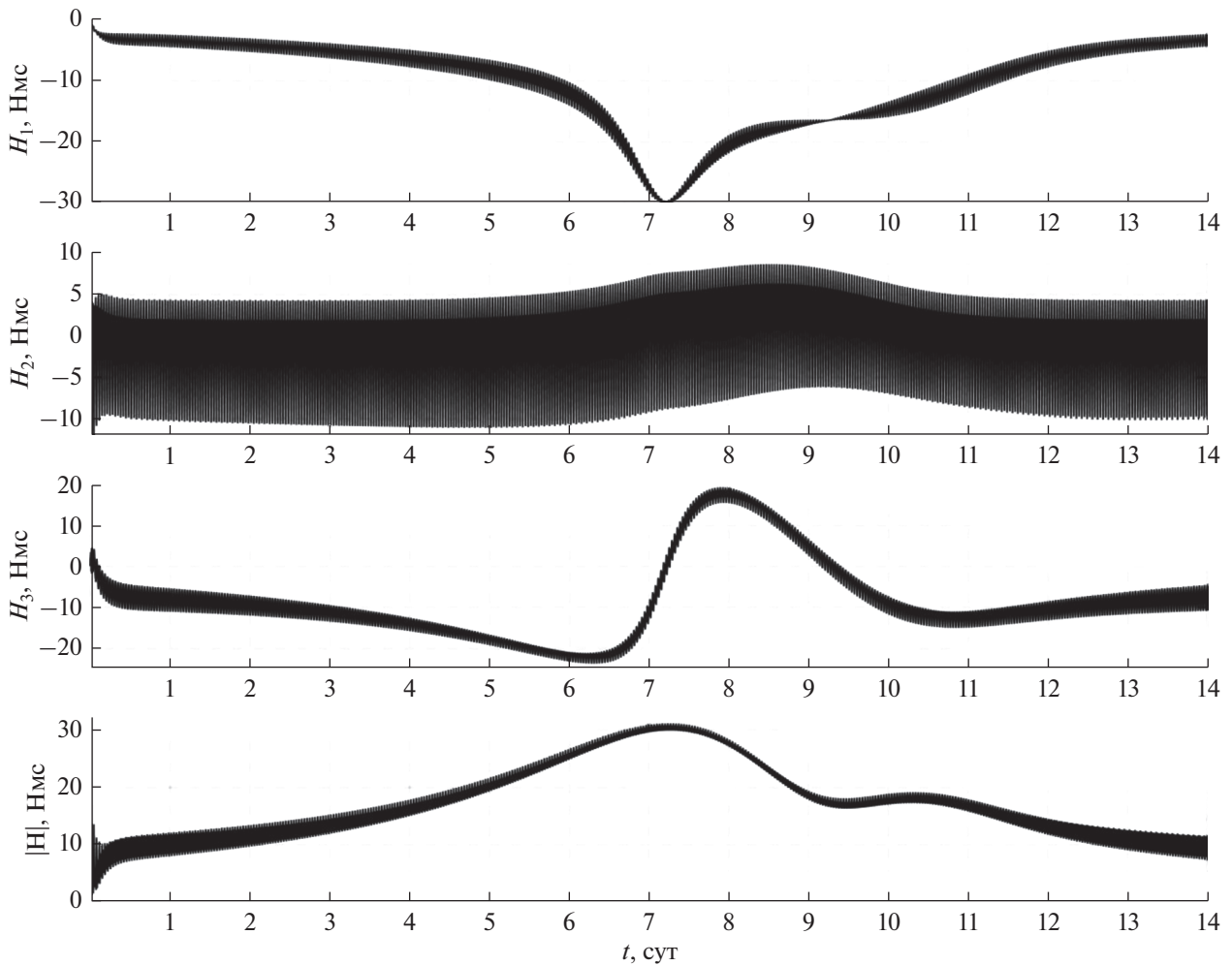


Рис. 3. Компоненты и модуль вектора гиросtatического момента КА.

В настоящей работе в качестве гиросистемы предназначенной для создания управляющих моментов рассматривается система четырех двигателей-маховиков (ДМ) [7]. Область вариации возможных значений суммарного кинетического момента  $H_C$ , создаваемого системой ДМ, зависит от схемы их расположения относительно связанной с КА системы координат и максимального значения кинетического момента, реализуемого каждым из ДМ. Суммарный кинетический момент системы ДМ выражается формулой

$$\mathbf{H} = \sum_{k=1}^4 h_k \mathbf{g}_k, \quad (4)$$

где  $h_k$  – алгебраическое значение кинетического момента ДМ с номером  $k$  ( $k = 1, \dots, 4$ );  $\mathbf{g}_k$  – орт оси вращения ДМ с номером  $k$ .

Введем связанную с системой ДМ правую декартову систему координат  $Ox_1x_2x_3$ , в которой

вектор  $\mathbf{H}$  представлен своими компонентами  $H_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Рассмотрим область  $P_4$  пространства  $R_3(H_1, H_2, H_3)$ , заполняемую концами векторов (4) (начала векторов помещены в точку  $O$ ). Здесь и далее считаем, что система состоит из одинаковых ДМ. В этом случае  $-h_{\max} \leq h_k \leq h_{\max}$ , где  $h_{\max}$  – абсолютная величина предельного значения кинетического момента отдельного ДМ. В данном случае принято значение  $h_{\max} = 18$  Нмс. Оси вращения ДМ расположены параллельно боковым ребрам четырехугольной пирамиды. Высота пирамиды параллельна оси  $Ox_1$ , линии пересечения граней пирамиды с плоскостью  $Ox_2x_3$  параллельны или перпендикулярны осям  $Ox_2, Ox_3$  (рис. 4).

Орты  $\mathbf{g}_k$ ,  $k = 1, \dots, 4$ , в системе  $Ox_1x_2x_3$  имеют компоненты

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1 &= (d_1, -d_2, d_3)^T, & \mathbf{g}_2 &= (-d_1, d_2, d_3)^T, \\ \mathbf{g}_3 &= (d_1, d_2, -d_3)^T, & \mathbf{g}_4 &= (-d_1, -d_2, -d_3)^T, \end{aligned}$$

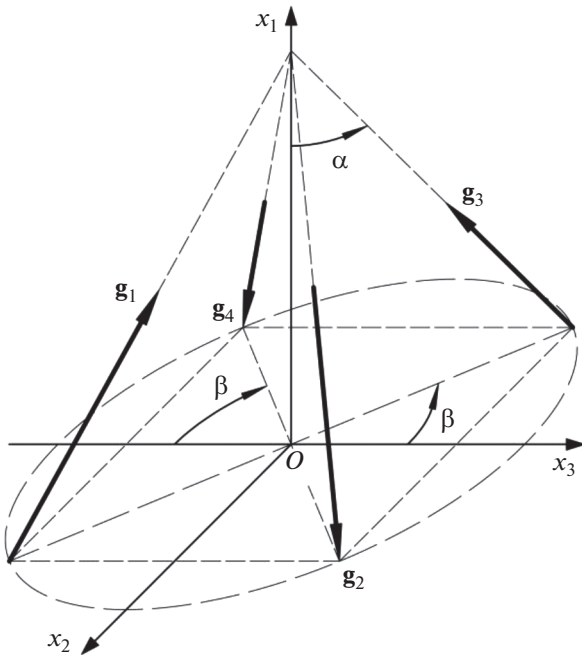


Рис. 4. Схема расположения ортов осей вращения ДМ.

здесь  $d_1 = \cos\alpha$ ,  $d_2 = \sin\alpha \sin\beta$ ,  $d_3 = \sin\alpha \cos\beta$ ;  $\alpha$  – угол между осью  $Ox_1$  и каждым из ортов  $\mathbf{g}_k$ ;  $\beta$  – угол между осью  $Ox_3$  и проекцией каждого из ортов  $\mathbf{g}_k$  на плоскость  $Ox_2x_3$ ; углы  $\alpha$  и  $\beta$  – параметры системы. Полагаем, что  $0 < \alpha < \pi/2$ ,  $0 < \beta < \pi/2$ . Основание

пирамиды, лежащее в плоскости  $Ox_2x_3$ , представляет собой прямоугольник, а в случае  $\beta = \pi/2$  – квадрат. Скалярная запись векторного выражения (4) в системе  $Ox_1x_2x_3$  имеет вид:

$$\begin{aligned} H_1 &= (h_1 - h_2 + h_3 - h_4)d_1, \\ H_2 &= (-h_1 + h_2 + h_3 - h_4)d_2, \\ H_3 &= (h_1 + h_2 - h_3 - h_4)d_3. \end{aligned} \tag{5}$$

Область пространства, заполняемая концами векторов  $\mathbf{H}$ , представляет собой выпуклый многогранник  $P_4$  (рис. 5).

Все необходимые при построении  $P_4$  соотношения для координат вершин, а также параметризация граней приведены в исследовании [7]. На рис. 5 обозначены вершины многогранника  $P_4$  в которых реализуются значения  $H_{i \max}$  – максимальные абсолютные значения кинетического момента, создаваемые системой ДМ по каждой из осей  $Ox_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Для системы четырех ДМ, расположенных по схеме “четырёхугольная пирамида”, значения  $H_{i \max}$  определяются соотношениями (5):

$$\begin{aligned} H_{1 \max} &= 4h_{\max} \cos\alpha, \\ H_{2 \max} &= 4h_{\max} \sin\alpha \sin\beta, \\ H_{3 \max} &= 4h_{\max} \sin\alpha \cos\beta. \end{aligned}$$

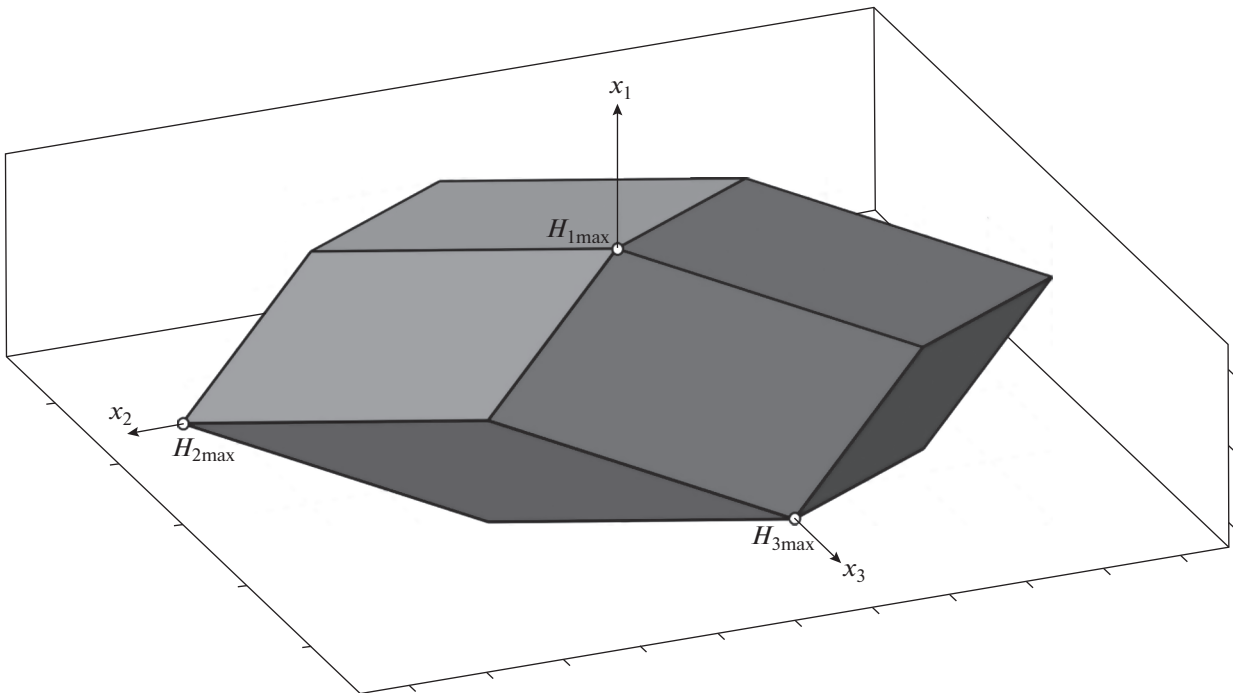


Рис. 5. Общий вид многогранника  $P_4$ .



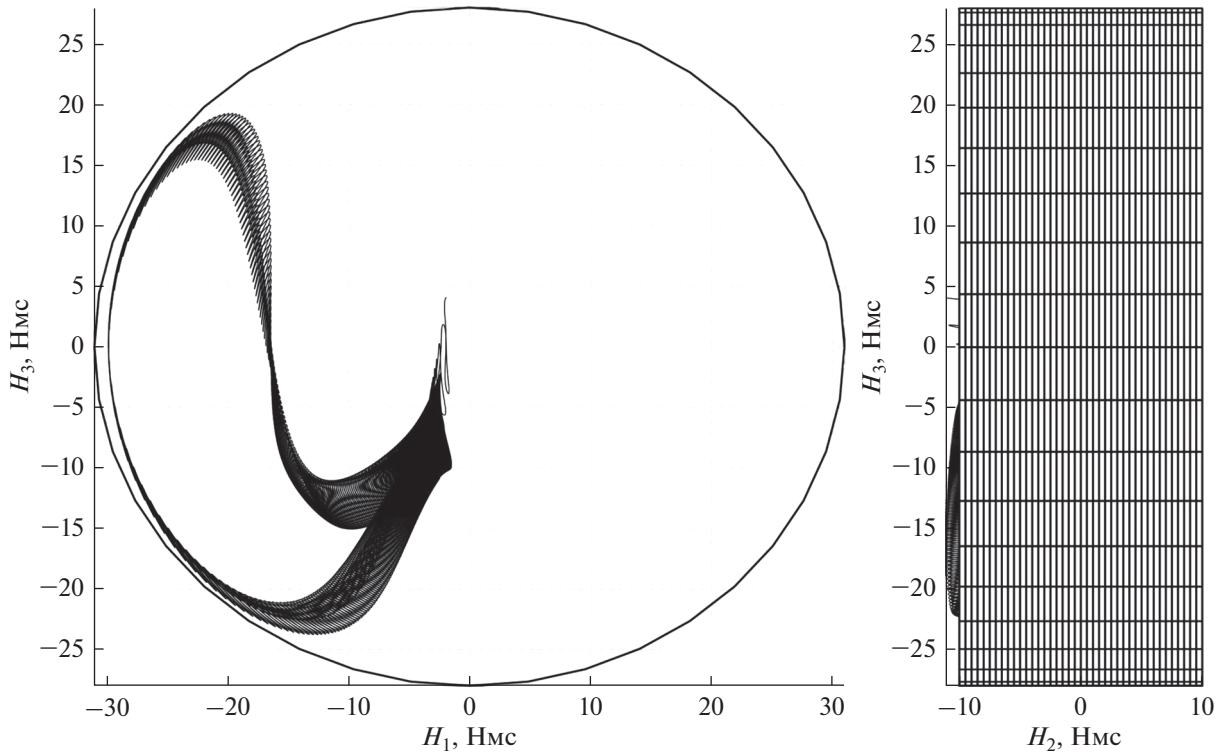


Рис. 6. Годограф  $\mathbf{H}$  и аппроксимирующий цилиндр.

### РАСПОЛОЖЕНИЕ ДВИГАТЕЛЕЙ-МАХОВИКОВ НА КОСМИЧЕСКОМ АППАРАТЕ

Множество  $H_T$  в данном случае задается множеством значений гиристатического момента  $\mathbf{H}$  системы ДМ реализуемого в процессе поддержания режима солнечной ориентации КА (рис. 3). На рис. 6 представлен годограф вектора  $\mathbf{H}$  (кривые линии черного цвета), а также показана аппроксимация области его вариации частью прямого эллиптического цилиндра.

Проверить выполнение условия (3) можно сравнением области вариации  $H_T$  и многогранника  $P_4$ , для чего их необходимо построить в одной системе координат и в едином масштабе. Как видно из рис. 3, максимальное значение  $|H_2|$  примерно в 2.5 раза меньше чем максимальное значение  $|H_3|$  и примерно в три раза меньше, чем максимальное значение  $|H_1|$ . Исходя из этих соотношений между размерами области вариации вектора  $\mathbf{H}$ , наиболее рационально будет расположить систему ДМ таким образом, чтобы вершина “пирамиды” лежала на оси  $Oy_2$ . Совместим начала систем координат  $Ox_1x_2x_3$  и  $Oy_1y_2y_3$  в центре масс КА (начало системы  $Ox_1x_2x_3$  можно поместить в любое место, важно лишь угловое положение осей  $Ox_i$  относительно осей  $Oy_i$ ) и расположим ось  $Ox_1$  вдоль оси  $Oy_2$ , а ось  $Ox_3$  вдоль оси  $Oy_3$ . Зная  $h_{\max}$ , для построения многогранника  $P_4$  оста-

ется только выбрать значения  $\alpha$  и  $\beta$  параметров системы ДМ. При выборе значений параметров  $\alpha$  и  $\beta$  можно использовать разные критерии, из которых самый очевидный – это максимальный объем многогранника  $P_4$ . Рассмотрим все возможные расстояния от каждой из граней  $P_4$  до точки  $O$ . Эти расстояния по сути представляют собой абсолютные значения кинетического момента, реализуемого системой ДМ в направлении, перпендикулярном соответствующей грани. Для схемы ДМ “четыреугольная пирамида” все грани многогранника  $P_4$  можно условно разделить на три группы в зависимости от их удаленности от его геометрического центра. Соответствующие значения  $H_I$ ,  $H_{II}$ ,  $H_{III}$  кинетического момента, реализуемого системой ДМ в направлении от точки  $O$  по нормали к какой-либо грани, принадлежащей своей группе, можно вычислить по одной из следующих формул:

$$H_I = \frac{2h_{\max} \sin 2\alpha \sin \beta}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \beta}},$$

$$H_{II} = \frac{2h_{\max} \sin 2\alpha \cos \beta}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta}},$$

$$H_{III} = 2h_{\max} \sin \alpha \sin 2\beta.$$

Наименьшее из значений  $H_I$ ,  $H_{II}$ ,  $H_{III}$  соответствует максимальному радиусу сферы, полностью вписанной в многогранник  $P_4$ . На рис. 7 представле-



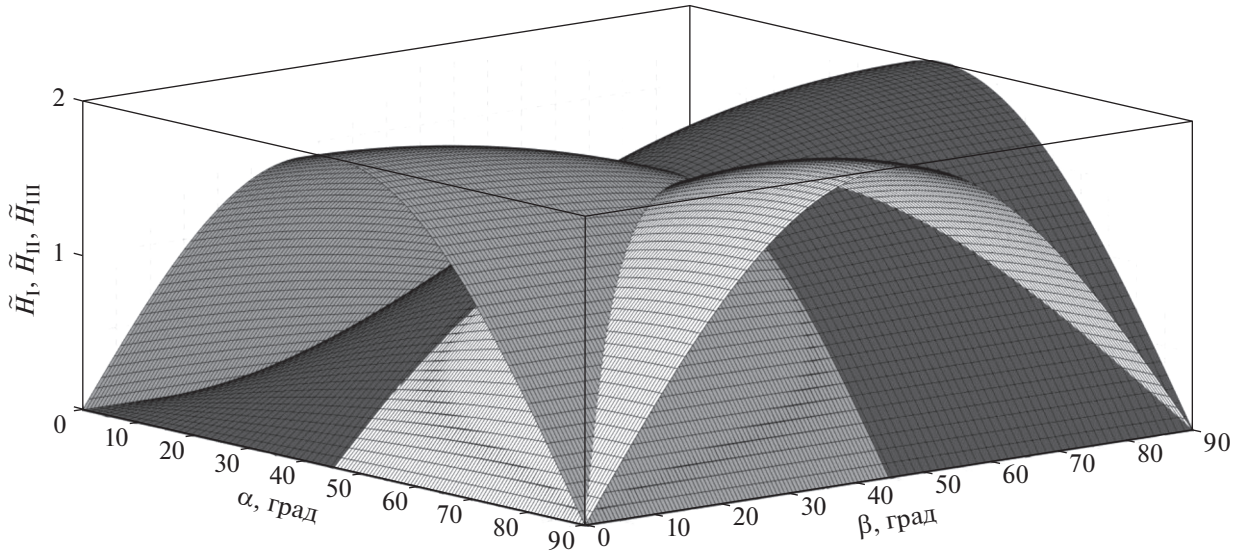


Рис. 7. Поверхности  $\tilde{H}_1(\alpha, \beta)$ ,  $\tilde{H}_{II}(\alpha, \beta)$ ,  $\tilde{H}_{III}(\alpha, \beta)$ .

ны три поверхности:  $\tilde{H}_1(\alpha, \beta) = H_1/h_{\max}$  (показана темно-серым цветом),  $\tilde{H}_{II}(\alpha, \beta) = H_{II}/h_{\max}$  (показана светло-серым цветом) и  $\tilde{H}_{III}(\alpha, \beta) = H_{III}/h_{\max}$  (показана белым цветом). Поверхности имеют одну точку пересечения, соответствующую значениям углов  $\alpha = \arctg(\sqrt{2}) \approx 54.7^\circ$  и  $\beta = 45^\circ$ , при которых максимальный радиус сферы, полностью вписанной в многогранник  $P_4$ , а также объем  $P_4$  будут иметь наибольшее значение, равное  $H_1 = H_{II} = H_{III} = 4h_{\max}/\sqrt{6}$ .

Еще один из способов выбрать значения углов  $\alpha$  и  $\beta$  – это разместить аппроксимирующий цилиндр, изображенный на рис. 6, внутри многогранника  $P_4$  таким образом, чтобы кратчайшие расстояния  $\delta_I, \delta_{II}, \delta_{III}$  от поверхности цилиндра до каждой из трех групп граней, образующих  $P_4$ , были равны между собой. На рис. 8 схематично показано взаимное расположение проекций цилиндра и граней многогранника на координатные плоскости систем  $Ox_1x_2x_3$  и  $Oy_1y_2y_3$ . Значения  $\delta_I, \delta_{II}, \delta_{III}$  вычисляются по формулам:

$$\delta_I = \frac{d_2L_1 + d_1L_2 - 4h_{\max}d_1d_2}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2}},$$

$$\delta_{II} = \frac{d_3L_1 + d_1L_3 - 4h_{\max}d_1d_3}{\sqrt{d_1^2 + d_3^2}},$$

$$\delta_{III} = \frac{d_3\tilde{L}_2 + d_2\tilde{L}_3 - 4h_{\max}d_2d_3}{\sqrt{d_2^2 + d_3^2}},$$

$$\tilde{L}_2 = \frac{d_3L_2^2}{\sqrt{d_3^2L_2^2 + d_2^2L_2^2}}, \quad \tilde{L}_3 = \frac{d_2L_3^2}{\sqrt{d_3^2L_2^2 + d_2^2L_3^2}}.$$

Здесь  $L_1 = 10$  Нмс – половина высоты цилиндра,  $L_2 = 31$  Нмс и  $L_3 = 28$  Нмс – полуоси эллипса, образованного пересечением цилиндра с плоскостью  $Ox_2x_3$  ( $Oy_1y_3$ ),  $\tilde{L}_2$  и  $\tilde{L}_3$  – координаты точки соприкосновения эллипса с касательной, параллельной прямой, образованной пересечением грани многогранника и плоскостью  $Ox_2x_3$  ( $Oy_1y_3$ ).

При выполнении условий

$$\frac{L_1}{4d_1} + \frac{L_2}{4d_2} < h_{\max}, \quad \frac{L_1}{4d_1} + \frac{L_3}{4d_3} < h_{\max},$$

$$\frac{\tilde{L}_2}{4d_2} + \frac{\tilde{L}_3}{4d_3} < h_{\max}$$

аппроксимирующий цилиндр будет находиться внутри многогранника  $P_4$ . Значения углов  $\alpha$  и  $\beta$  можно найти из условия  $\delta_I = \delta_{II} = \delta_{III}$ , построив три поверхности  $\delta_I(\alpha, \beta)$ ,  $\delta_{II}(\alpha, \beta)$ ,  $\delta_{III}(\alpha, \beta)$  и найдя точку их пересечения, но также можно воспользоваться уравнением

$$\operatorname{tg}(\beta) = \frac{L_2}{L_3}$$

для вычисления угла  $\beta$ . Для приведенных выше значений  $L_1, L_2, L_3$  угол  $\beta = 48^\circ$ . Зная угол  $\beta$  значение угла  $\alpha$  можно найти как точку пересечения трех кривых:  $\delta_I(\alpha)$ ,  $\delta_{II}(\alpha)$ ,  $\delta_{III}(\alpha)$ , приведенных на рис. 9. Здесь график  $\delta_I(\alpha)$  показан штрихпунктирной линией,  $\delta_{II}(\alpha)$  – пунктирной,  $\delta_{III}(\alpha)$  – сплошной линией. Из рис. 9 принято значение угла  $\alpha = 60^\circ$ .

На рис. 10 показано взаимное расположение проекций годографа  $H$ , аппроксимирующего цилиндра и двух вариантов многогранника  $P_4$ . Штрихпунктирными линиями показаны проекции многогранника при значении углов  $\alpha = 60^\circ$ ,  $\beta = 48^\circ$ , пунктирными линиями – при значении

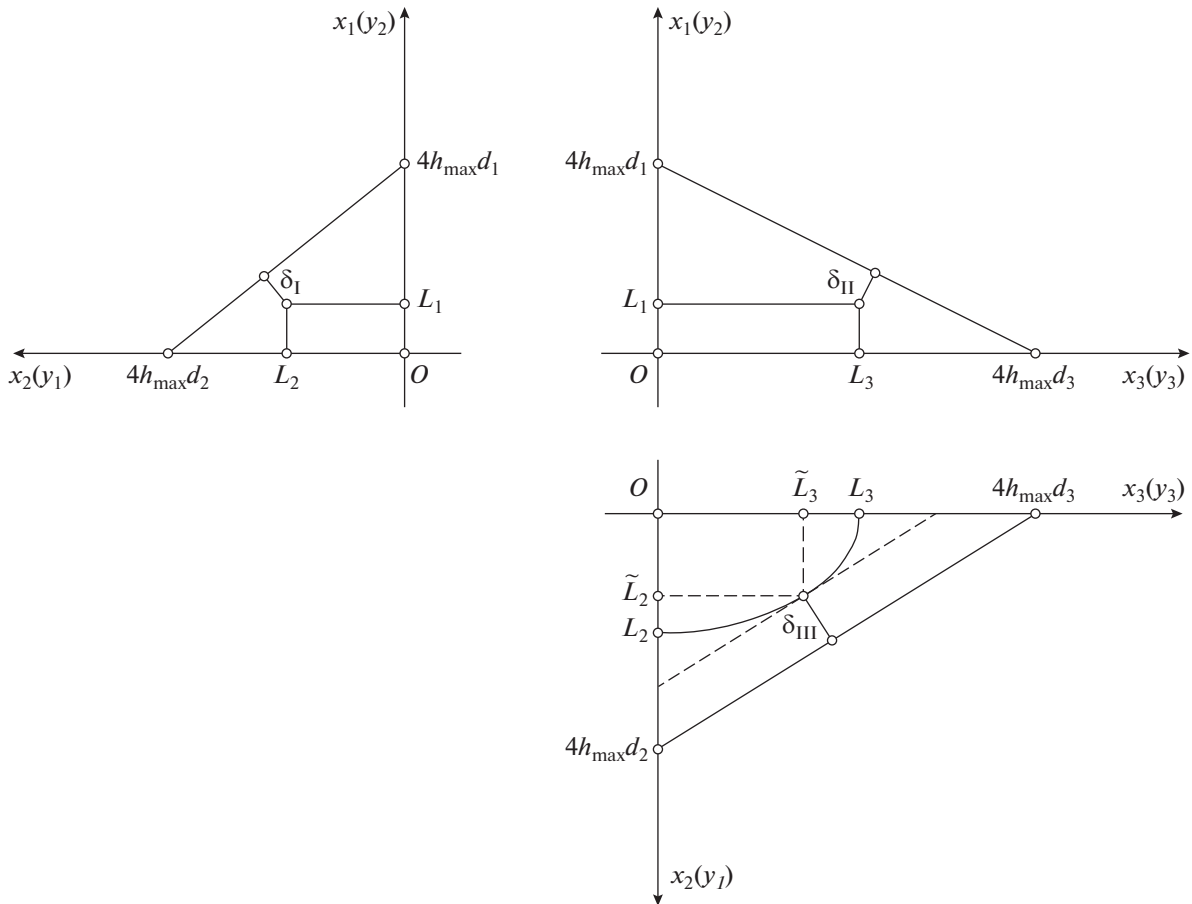


Рис. 8. Проекция цилиндра и граней многогранника  $P_4$  на координатные плоскости систем  $Ox_1x_2x_3$  и  $Oy_1y_2y_3$ .

углов  $\alpha = 54.7^\circ$  и  $\beta = 45^\circ$ . На рис. 10 видно, что в случае, когда значения углов  $\alpha = 60^\circ$ ,  $\beta = 48^\circ$ , грани многогранника  $P_4$  располагаются на большем расстоянии от поверхности цилиндра чем в случае  $\alpha = 54.7^\circ$  и  $\beta = 45^\circ$ .

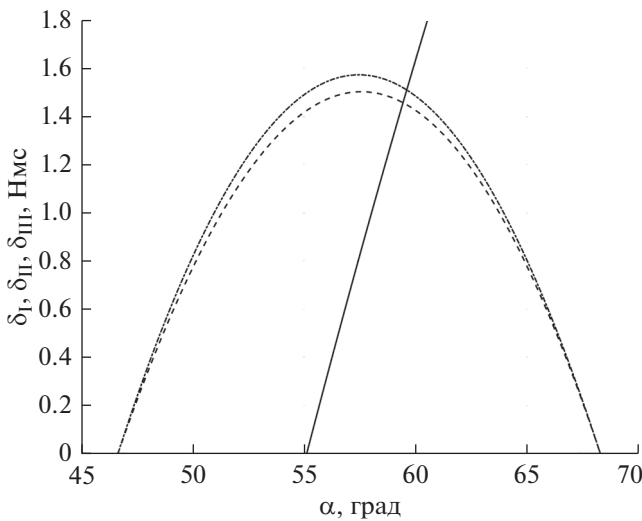


Рис. 9. Графики функций  $\delta_I(\alpha)$ ,  $\delta_{II}(\alpha)$ ,  $\delta_{III}(\alpha)$  при  $\beta = 48^\circ$ .

### МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕЖИМА СОЛНЕЧНОЙ ОРИЕНТАЦИИ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

Выбрав значения углов  $\alpha$  и  $\beta$ , проверим возможность системы ДМ реализовать рассматриваемый режим солнечной ориентации КА, т.е. на всем рассматриваемом интервале времени движения КА должно выполняться условие  $|h_k| < h_{\max}$ ,  $k = 1, \dots, 4$ . Для этого подсистему уравнений вращательного движения КА (1), (2) необходимо дополнить уравнениями, описывающими изменение собственного кинетического момента каждого из ДМ системы. Матрицу перехода от  $Ox_1x_2x_3$  к  $Oy_1y_2y_3$  обозначим  $U$ ,

$$U = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Запишем орты  $\mathbf{g}_k$ ,  $k = 1, \dots, 4$ , осей вращения маховиков в виде матрицы  $D = \|\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_n\|$ , тогда выражение (4) можно представить как

$$\mathbf{H} = U D \mathbf{G}, \tag{6}$$

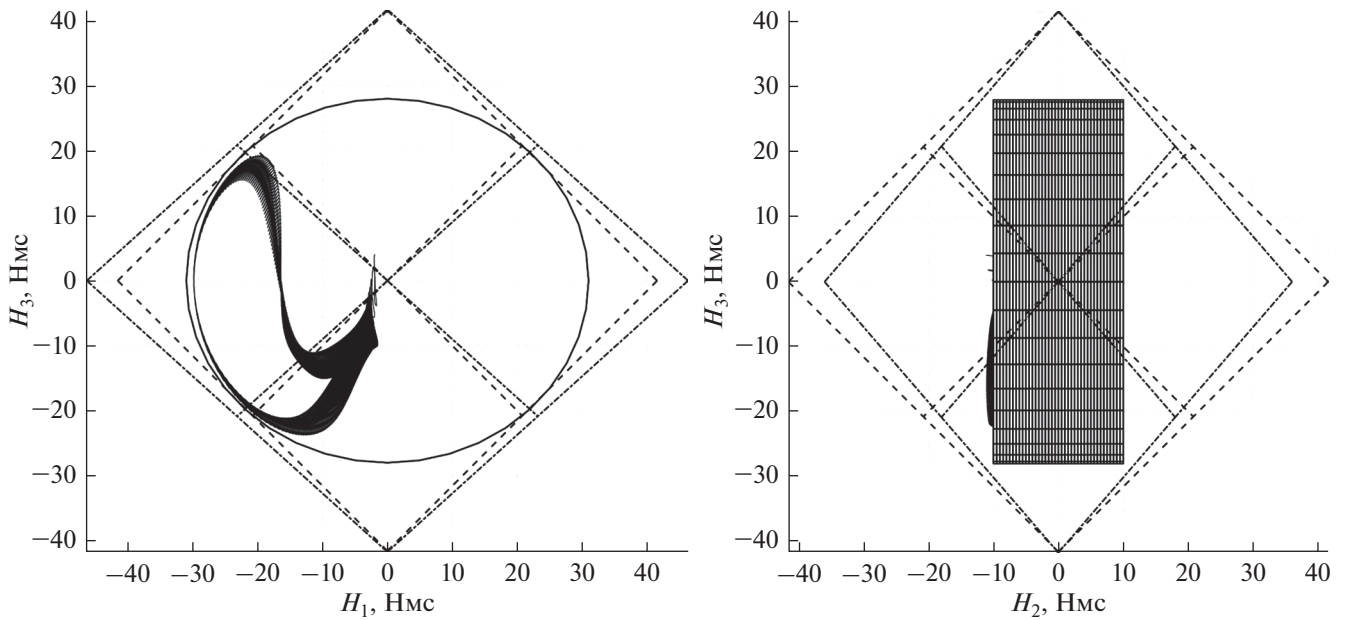


Рис. 10. Проекция годографа  $\mathbf{H}$ , аппроксимирующего цилиндра и двух вариантов многогранника  $P_4$ .

где  $D$  – прямоугольная матрица размерности  $3 \times 4$ ,  $\mathbf{G} = (h_1, h_2, h_3, h_4)^T$ . Соотношение (6) нельзя единственным образом разрешить относительно величин  $h_k, k = 1, \dots, 4$ . Чтобы достичь единственности, потребуем, чтобы решение системы (6) относительно  $h_k$  имело минимальную евклидову норму

$$l_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^4 h_k^2}.$$

Тогда

$$\mathbf{G} = D^+ U^T \mathbf{H}, \tag{7}$$

где  $D^+ = D^T(DD^T)^{-1}$  – матрица, псевдообратная для матрицы  $D$  [8]. Матрица  $D^+$  существует при условии, что в системе есть любые три ДМ, у которых орты  $\mathbf{g}_k, k = 1, \dots, 4$ , осей вращения линейно независимы. Для схемы ДМ “четырёхугольная пирамида” (см. рис. 4) матрицы  $D$  и  $D^+$  можно представить в виде:

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & -d_1 & d_1 & -d_1 \\ -d_2 & d_2 & d_2 & -d_2 \\ d_3 & d_3 & -d_3 & -d_3 \end{pmatrix},$$

$$D^+ = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} d_1^{-1} & -d_2^{-1} & d_3^{-1} \\ -d_1^{-1} & d_2^{-1} & d_3^{-1} \\ d_1^{-1} & d_2^{-1} & -d_3^{-1} \\ -d_1^{-1} & -d_2^{-1} & -d_3^{-1} \end{pmatrix}.$$

На рис. 11 показаны графики зависимости от времени собственных кинетических моментов  $h_k$ ,

$k = 1, \dots, 4$ , каждого из ДМ, полученные в результате численного моделирования движения КА в рамках модели, приведенной выше, с учетом соотношений (6), (7), при значениях углов  $\alpha = 60^\circ, \beta = 48^\circ$ . Как и на рис. 2, 3, графики на рис. 11 построены на интервалах времени 14 сут. Переходной процесс (процесс гашения возмущенного движения КА), обусловленный ошибками в задании начальной угловой скорости, длится менее 20 мин и из-за масштаба на рисунках не виден. Из рис. 11 видно, что на интервале времени с 6-х по 8-е сутки полета КА величины  $h_k, k = 1, \dots, 4$ , превышают максимально допустимое значение  $h_{\max} = 18$  Нмс, что вызвано наличием колебаний составляющих вектора гиросtatического момента КА (см. рис. 3). Ограничить колебания величин  $h_k, k = 1, \dots, 4$ , можно использовав другое условие достижения единственности решение системы (6) относительно  $h_k$ .

### МЕТОД МИНИМАЛЬНОЙ НОРМЫ $l_\infty$

Еще одним из способов достижения единственности решения системы (6) относительно  $h_k, k = 1, \dots, 4$ , является требование минимума нормы

$$l_\infty = \max_{1 \leq k \leq 4} |h_k|.$$

Применение метода минимальной нормы  $l_\infty$  позволяет системе ДМ наиболее эффективно использовать весь возможный объем области  $H_C$  создаваемого кинетического момента. В общем случае указанный метод представлен в виде не-

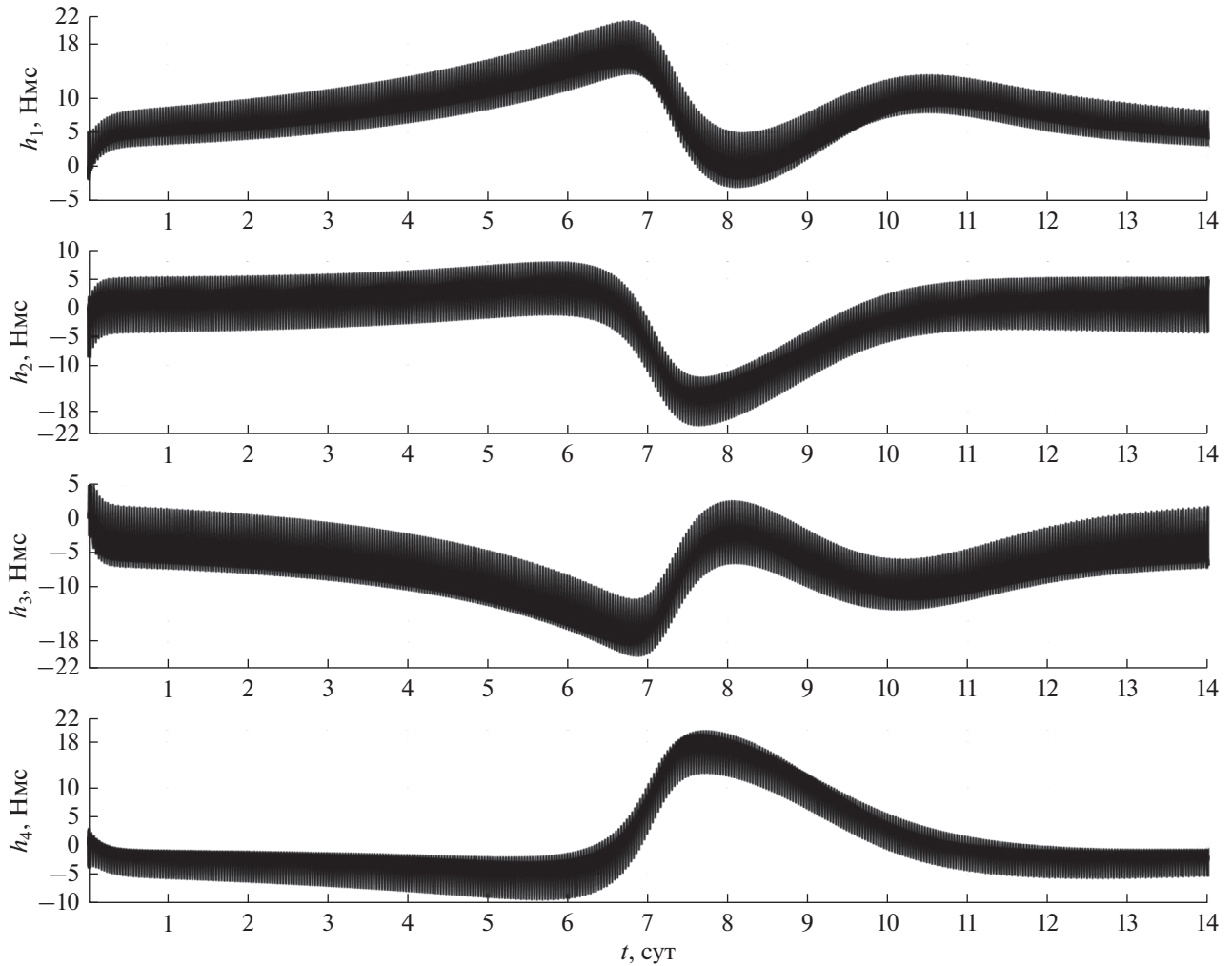


Рис. 11. Собственные кинетические моменты каждого ДМ системы (норма  $l_2$ ).

которых алгоритмов поиска решения, примеры реализации которых приведены в работах [9–11]. Однако в случае, когда гиросистема состоит из четырех ДМ, оси вращения которых расположены параллельно боковым ребрам симметричной пирамиды (см. рис. 4) решение системы (6) с помощью метода минимальной нормы  $l_\infty$  можно представить в виде [10]:

$$\mathbf{G} = D^+ U^T \mathbf{H} + h_0 \tilde{\mathbf{G}},$$

$$h_0 = -\frac{\min(D^+ U^T \mathbf{H}) + \max(D^+ U^T \mathbf{H})}{2}. \quad (8)$$

Здесь символами  $\min(\cdot)$  и  $\max(\cdot)$  обозначены компоненты вектора, имеющие минимальное и максимальное значения соответственно,  $\tilde{\mathbf{G}}$  – вектор нуль-пространства [12] (ядра) матрицы  $UD$ , удовлетворяющий условию  $UD\tilde{\mathbf{G}} = (0, 0, 0)^T$ . Для рас-

сматриваемой схемы расположения ДМ нуль-пространство матрицы  $UD$  состоит из единственного базисного вектора  $\tilde{\mathbf{G}} = (1, 1, 1, 1)^T$ .

На рис. 12 показаны графики, аналогичные приведенным на рис. 11, полученные в результате численного моделирования движения КА с учетом соотношений (6), (8). Графики на рис. 15 также построены на интервалах времени 14 сут при значениях углов  $\alpha = 60^\circ$ ,  $\beta = 48^\circ$ . Приведенные результаты моделирования показали, что использование метода минимальной нормы  $l_\infty$  при решении системы (6) позволяет выполнить условие  $|h_k| < h_{\max}$ ,  $k = 1, \dots, 4$ , в процессе реализации рассматриваемого режима солнечной ориентации КА на всем интервале времени моделирования.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе показано, что с помощью системы двигателей-маховиков, расположенных по схеме

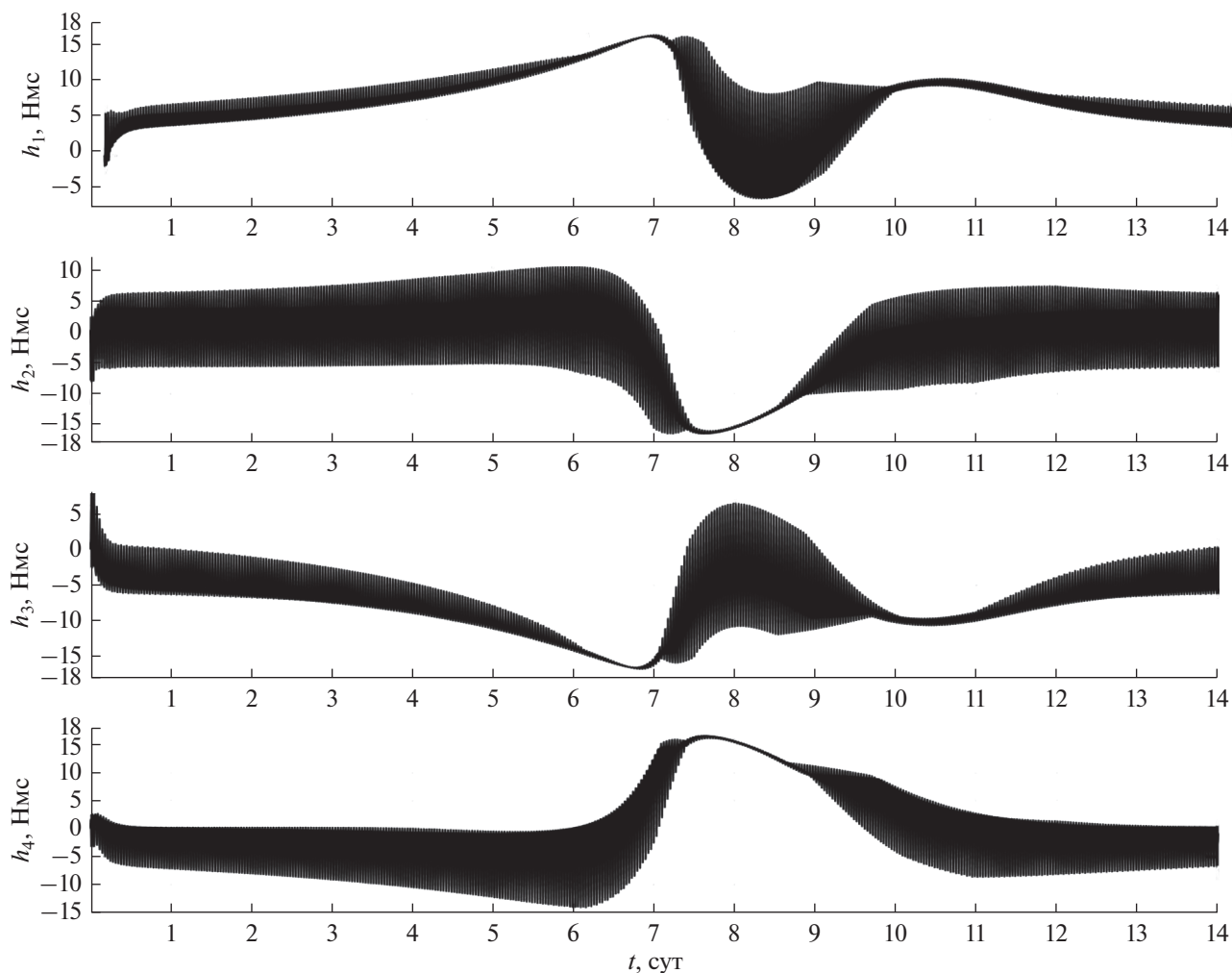


Рис. 12. Собственные кинетические моменты каждого ДМ системы (норма  $l_\infty$ ).

“четырёхугольная пирамида”, можно реализовать режим солнечной ориентации космического аппарата без проведения разгрузок кинетического момента. Предложенный в работе способ сравнения областей требуемого и реализуемого кинетического момента позволяет выбрать необходимые значения геометрических параметров схемы расположения двигателей-маховиков. Приведены результаты численного моделирования системы уравнений движения космического аппарата, подтверждающие правильность выбранных значений геометрических параметров, обеспечивающих реализацию режима солнечной ориентации космического аппарата.

Полученные в работе результаты могут быть использованы при предварительном проектировании систем управления ориентацией космического аппарата, использующих в качестве исполнительных органов двигатели-маховики.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Игнатов А.И., Сазонов В.В.* Оценка низкочастотных микроускорений на борту ИСЗ в режиме одноосной солнечной ориентации // *Космич. исслед.* 2013. Т. 51. № 5. С. 380–388. <https://doi.org/10.7868/S0023420613050051> (*Cosmic Research*. 2013. Т. 51. № 5. С. 342–349.)
2. *Игнатов А.И.* Стабилизация режима солнечной ориентации искусственного спутника Земли без накопления кинетического момента гиросистемы // *Изв. РАН. Теория и системы управления.* 2020. № 3. С. 164–176. <https://doi.org/10.31857/S0002338820030063>
3. *Игнатов А.И.* Оценка низкочастотных микроускорений на борту искусственного спутника Земли в режиме солнечной ориентации // *Космич. исслед.* 2022. Т. 60. № 1. С. 43–56. <https://doi.org/10.31857/S0023420622010046> (*Cosmic Research*. 2022. Т. 60. № 1. С. 38–50.)



4. *Бажинев И.К., Гаврилов В.П., Ястребов В.Д. и др.* Навигационное обеспечение полета орбитального комплекса “Салют-6” – “Союз” – “Прогресс”. М.: Наука, 1985.
5. *Белецкий В.В.* Движение искусственного КА относительно центра масс. М.: Наука, 1965.
6. *Меев Ж.* Астрономические формулы для калькуляторов. М.: Мир, 1988.
7. *Игнатов А.И.* Выбор геометрических параметров расположения системы двигателей-маховиков при управлении вращательным движением космического аппарата // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2022. № 1. С. 124–144. <https://doi.org/10.31857/S0002338822010061>
8. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. Москва, Наука. Главная редакция физ.-мат. литературы, 1988.
9. *Markley F.L., Reynolds R.G., Liu F.X.* Maximum torque and momentum envelopes for reaction-wheel arrays // J. Guidance, Control, and Dynamics. 2010. V. 33. № 5. P. 1606–1614. <https://doi.org/10.2514/1.47235>
10. *Yoon H., Seo H.H., Choi H.-T.* Optimal uses of reaction wheels in the pyramid configuration using a new minimum infinity-norm solution // Aerospace Science and Technology. 2014. V. 39. P. 109–119. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2014.09.002>
11. *Yoon H., Seo H.H., Park Y.-W., Choi H.-T.* A New Minimum Infinity-Norm Solution: with Application to Capacity Analysis of Spacecraft Reaction Wheels // American Control Conf. (ACC). 2015. P. 1241–1245.
12. *Стрелг Г.* Линейная алгебра и ее применения. М.: Мир, 1980.