

УДК 621.391 : 519.724

© 2021 г. К.Г. Шеной, В. Шарма

**АНАЛИЗ КАНАЛОВ СО СБОРОМ ЭНЕРГИИ  
ПРИ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЕ БЛОКА<sup>1</sup>**

Рассматриваются каналы с аддитивным белым гауссовским шумом и дискретные каналы без памяти, в которых на передающем конце применяется сбор энергии из окружающей среды. Такими каналами можно моделировать беспроводные сенсорные сети, а также так называемый “интернет вещей”. С помощью предлагаемого единого подхода, справедливого для любого канала со сбором энергии, такие каналы исследуются при условии бесконечного накопителя энергии, а также приводятся соответствующие границы достижимости и верхние границы на пропускную способность канала в режиме конечной длины блока. Кроме того, приводятся также асимптотические границы умеренных уклонений.

*Ключевые слова:* достижимые скорости, обратная теорема кодирования, пропускная способность канала, конечная длина блока, СЭ-АБГШ-каналы, СЭ-ДКБП, умеренные уклонения.

**DOI:** 10.31857/S0555292321010010

**§ 1. Введение**

В теоретико-информационном анализе каналов пропускной способностью канала называется наибольшая скорость, с которой источник может передавать сообщения приемнику при условии сколь угодно малой вероятности ошибки. Однако подойти сколь угодно близко к пропускной способности канала можно лишь при использовании кодов с очень большой длиной блока. На практике же длина блока ограничена, и поэтому желательно изучить величину отклонения от пропускной способности, а также изменение максимального объема кода, как функции от длины блока. Для фиксированной вероятности ошибки изучение достижимых скоростей при конечной длине блока с особым вниманием к коэффициентам второго порядка известно в литературе как анализ вторых приближений.

Как и для обычной пропускной способности, характеристика пропускной способности канала при конечной длине блока состоит из двух вопросов, а именно: граница достижимости для максимального объема кода (числа сообщений)  $M$  и обратная теорема кодирования. При заданной вероятности ошибки в вопросе о достижимости обычно исследуется существование кода с помощью рассуждений, основанных, например, на случайном кодировании или оперировании общими границами достижимости, показывающими, что та или иная граница достигается. С другой стороны, обратная теорема кодирования – это верхняя граница на максимальный объем кода, которая должна выполняться для любого возможного кода. В настоящей статье рассматриваются оба вопроса для каналов со сбором энергии.

<sup>1</sup> Часть результатов настоящей статьи была представлена в [1].

Каналы и сети со сбором энергии (СЭ-каналы и СЭ-сети) привлекают в последнее время значительное внимание благодаря прогрессу в области беспроводных сенсорных сетей и средств связи, основанных на альтернативной энергии (см. [2–4]). Передача символов требует затрат энергии на приемном конце. Поэтому исследование канала производится в tandemе с системой сбора энергии. Система сбора энергии моделируется как буферная или перезаряжаемая батарея, в которой накапливается энергия, поступающая из некоторого внешнего источника (например, солнечная энергия). Такой накопитель энергии может иметь как конечную, так и бесконечную емкость, а процесс поступления энергии может быть как дискретным, так и непрерывным. Задача, представляющая интерес, заключается в сравнении производительности каналов с системой сбора энергии и без таковой (например, можно ли количественно оценить влияние на пропускную способность канала, пропускную способность при конечной длине блока и т.д.).

Анализ для дискретных каналов без памяти (ДКБП) при конечной длине блока впервые был выполнен в [5]. Неасимптотические результаты о вторых приближениях для каналов с аддитивным белым гауссовским шумом (АБГШ-каналов), а также для некоторых других типов каналов, был представлен в [6, 7]. Затем в [7, 8] изучались приближения третьего порядка и было выведено метаобращение теоремы кодирования – результат, включающий в себя и улучшающий известные обратные теоремы кодирования. Более точные результаты для различных ДКБП были получены в [9]. Неасимптотический анализ для каналов с состояниями был выполнен в [10]. В постановке задачи со сбором энергии в предположении бесконечной емкости накопителя пропускная способность для СЭ-АБГШ-каналов была получена в [11, 12]. Границы достижимости при конечной длине блока для двоичных каналов без шума со сбором энергии были получены в [13]. Результат о достижимости для СЭ-АБГШ-каналов с членом второго порядка  $O(\sqrt{n})$  представлен в [1]. Как границы достижимости, так и обратные результаты для СЭ-АБГШ-каналов были недавно улучшены в работе [14], где рассматривался процесс поступления энергии с н.о.р. блоками.

Помимо анализа при конечной длине блока мы также приводим границы на коэффициент умеренных уклонений для СЭ-АБГШ-каналов и СЭ-ДКБП. В этой постановке рассматривается передача со скоростями, меньшими пропускной способности, где отклонение от пропускной способности стремится к нулю при некоторой скорости, называемой режимом умеренного уклонения. В этом режиме вероятность ошибки будет стремиться к нулю с ростом длины блока  $n$ . Целью является характеристика экспоненты вероятности ошибки для умеренных уклонений. Анализ умеренных уклонений для каналов без памяти был выполнен в [15, 16]. В [16] коэффициент умеренных уклонений был охарактеризован через дисперсию канала. Для ДКБП с обратной связью переменной длины анализ умеренных уклонений был проведен в [17].

**Основные результаты.** В статье предложена схема, позволяющая непосредственно вычислить достижимые скорости для широкого класса каналов со сбором энергии. Мы сосредоточимся на анализе СЭ-АБГШ-каналов и СЭ-ДКБП с бесконечным буфером. В частности,

1. Получены достижимые скорости при конечной длине блока для СЭ-АБГШ-каналов и СЭ-ДКБ в предположении фиксированной максимальной вероятности ошибки. Показано, что схема накопления и передачи (save and transmit), где фаза накопления имеет длину  $O(\sqrt{n})$ , достаточна для обеспечения надежной связи в постановке со сбором энергии. При сравнении со случаем без сбора энергии (но с эквивалентным ограничением по средней мощности) видно, что член второго порядка по-прежнему равен  $\Theta(\sqrt{n})$ . Отметим, что коэффициенты при членах второго порядка не обязательно будут одинаковыми.

2. Далее, приведена обратная теорема кодирования при конечной длине блока, т.е. верхняя граница на достижимые скорости для СЭ-АБГШ-каналов. Она выводится модификацией метаобращения теоремы кодирования из [7] для конкретного случая СЭ-АБГШ-каналов. Для случая квазистатистических каналов с замиранием в [18] желаемые границы также были получены с помощью модификации этого метаобращения. Более того, мы даем альтернативное, более короткое доказательство верхней границы для СЭ-АБГШ-каналов, впервые полученной в [14]. Кроме того, проведен анализ ДКБП со сбором энергии и для них получены верхние границы при конечной длине блока. Анализ как границы достижимости, так и обратной теоремы кодирования в этом контексте для СЭ-ДКБП является новым. Мы можем показать, что и в границе достижимости, и в нижней границе член второго порядка для СЭ-АБГШ-каналов и СЭ-ДКБП равен  $O(\sqrt{n})$ . Как следствие, это также дает сильную обратную теорему кодирования для таких каналов, поскольку вероятность ошибки не влияет на член первого порядка. Кроме того, наши результаты распространены на случай, когда последовательность сообщений посылается в системе, где можно использовать остаточную энергию от предыдущей передачи.
3. Далее, приведены нижние и верхние границы умеренных отклонений для обоих типов каналов. Для этого показывается, что границы на дисперсии канала, полученные при доказательстве границ для конечной длины блока, также являются границами на коэффициент умеренных отклонений. Эти границы для каналов со сбором энергии являются новыми, т.е. не представлены в других источниках. Наконец, построены графики наших нижних и верхних границ скорости для некоторых значений параметров и сделаны соответствующие выводы.
4. И наконец, построены графики наших границ при конечной длине блока для СЭ-АБГШ-каналов в режимах малого, среднего и большого отношения сигнал/шум и проведено их сравнение с эквивалентным АБГШ-каналом без сбора энергии. Для СЭ-ДКБП в качестве примера взяты двоичный симметричный канал со сбором энергии (СЭ-ДСК) и двоичный канал со стиранием (ДКС) со сбором энергии, и результаты для них приведены в виде соответствующих графиков. Кроме того, обсуждаются случаи, когда на графиках выявляются нетривиальные факты о скоростях в канале.

После этого, в § 10, наши результаты и методы подробно сравниваются с результатами и методами из [14, 18].

## § 2. Предварительные сведения

**2.1. Основные обозначения.** Полужирными символами (например,  $\mathbf{x}$ ) обозначаются векторы (пространства  $\mathbb{R}^n$  с заданным  $n \in \mathbb{N}$ ). Когда требуется явно указать длину вектора, будем указывать это в виде  $\mathbf{x}^k = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ . Аналогично,  $\mathbf{x}_i^j = (x_i, x_{i+1}, \dots, x_j)$ . Строчными буквами обозначаются детерминированные скалярные или векторные величины, а прописными – случайные величины или случайные векторы соответственно. Через  $[M]$  будем обозначать множество  $\{1, 2, \dots, M\}$ . Через  $\mathcal{P}(\mathcal{X})$  будем обозначать множество распределений вероятностей на  $\mathcal{X}$  (в случаях, когда алфавит очевиден, будем писать просто  $\mathcal{P}$ ). Оператор математического ожидания обозначается через  $\mathbf{E}$ , а если необходимо указать распределение (скажем,  $P$ ), то через  $\mathbf{E}_P$ . Время от времени для указания порядков величин будем использовать символику Бахмана – Ландау  $O(\cdot)$ ,  $\Theta(\cdot)$  и т.д. Все логарифмы по умолчанию по основанию 2, но иногда при необходимости явно указывается основание.

**2.2. Каналы, вероятность ошибки и пропускная способность.** Для заданных алфавита на входе  $\mathcal{X}$  и алфавита на выходе  $\mathcal{Y}$  каналом, обозначаемым через  $W(y|x)$  или, эквивалентным образом, через  $P_{Y|X}$ , называется условная вероятностная мера

на  $\mathcal{Y}$  при условии  $x \in \mathcal{X}$ . Если для канала существует плотность распределения, она обозначается через  $f_{Y|X}$ .

Для заданного распределения вероятностей  $P$  на  $\mathcal{X}$  и канала  $W$  определим выходную меру  $PW$  как

$$PW(y) = \sum_{x \in \mathcal{X}} P(x)W(y|x).$$

Есть два понятия вероятности ошибки, которые мы будем использовать. Пусть задан код  $\mathcal{C}$  с  $M$  сообщениями, и пусть  $U \in [M]$  – случайная величина, равномерно распределенная на  $[M]$ , обозначающая передаваемое сообщение, а  $\hat{U} \in [M]$  – сообщение, декодированное на приемном конце. *Максимальной вероятностью ошибки* для кода  $\mathcal{C}$  называется величина

$$P_{e,\max}(\mathcal{C}) := \max_{1 \leq m \leq M} \Pr[\hat{U} \neq m | U = m]. \quad (1)$$

Аналогично, *средняя вероятность ошибки* определяется как

$$P_{e,\text{avg}}(\mathcal{C}) := \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \Pr[\hat{U} \neq m | U = m]. \quad (2)$$

Пропускная способность канала одинакова в обоих случаях. Однако в режиме с конечной длиной блока имеются отличия в членах высших порядков, что приводит к разнице в  $O(\log n)$  (см. [7]). В настоящей статье мы будем придерживаться критерия максимальной вероятности ошибки, поскольку он более удобен при анализе ДКБП со сбором энергии. По техническим соображениям границы, использующие максимальную вероятность ошибки, обычно требуют работы с последовательностями, в отличие от средней вероятности ошибки, где нужно работать с распределениями.

Будем называть  $(n, M, \varepsilon)$ -кодом код с  $M$  кодовыми словами длины  $n$  и вероятностью ошибки не выше  $\varepsilon$ . Положим

$$M^*(n, \varepsilon) := \max\{M : \text{существует } (n, M, \varepsilon)\text{-код}\}.$$

Для заданного  $(n, M, \varepsilon)$ -кода величина  $\frac{\log M}{n}$  называется его *скоростью*. Для  $0 < \varepsilon < 1$  определим  $\varepsilon$ -*пропускную способность*  $C_\varepsilon$  как

$$C_\varepsilon = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log M^*(n, \varepsilon)}{n}$$

и назовем *пропускной способностью* канала величину

$$C = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} C_\varepsilon.$$

Заметим, что оба предела существуют. Ясно, что  $C_\varepsilon \geq C$ . Однако для некоторых классов каналов, таких как ДКБП и обычные АБГШ-каналы с ограничением по средней мощности, имеет место равенство  $C_\varepsilon = C$  для любых  $0 < \varepsilon < 1$ . Тогда будем говорить, что канал удовлетворяет *сильному обращению теоремы кодирования*, что означает, что если вести передачу со скоростями выше пропускной способности, то вероятность ошибки для кода будет стремиться к 1 при длине блока  $n$ , стремящейся к бесконечности.

Для заданного  $0 < \varepsilon < 1$  и любого канала пусть  $M_m(\varepsilon)$  – максимальное число кодовых слов в коде с критерием максимальной вероятности ошибки, а  $M_a(\varepsilon)$  – то же самое для средней вероятности ошибки. Очевидно,  $M_m(\varepsilon) \leq M_a(\varepsilon)$ . Используя

кодирование с выбрасыванием (см., например, [19]), также получаем

$$M_m(\varepsilon') \geq \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{\varepsilon'} M_a(\varepsilon) \quad (3)$$

при  $\varepsilon' > \varepsilon$ . Это означает, что любая верхняя граница для скоростей при критерии средней вероятности ошибки является также и верхней границей в случае максимальной вероятности ошибки. Однако нижние границы для достижимых скоростей при критерии средней вероятности ошибки при переходе к максимальной вероятности ошибки несколько ухудшаются.

**2.3. АБГШ-канал.** Для вектора  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  и невырожденной матрицы  $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  пусть

$$\mathcal{N}(\mathbf{a}; \mathbf{K}) := \frac{\exp\{-(\mathbf{x} - \mathbf{a})^T \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{a})\}}{(2\pi)^{n/2} (\det(\mathbf{K}))^{1/2}}$$

– многомерное нормальное распределение со средним  $\mathbf{a}$  и матрицей ковариации  $\mathbf{K}$ . Канал с аддитивным белым гауссовским шумом (АБГШ-канал) с дисперсией шума  $\sigma^2$  задается условием

$$Y = x + Z,$$

где  $x \in \mathbb{R}$  – вход канала, а  $Z \sim \mathcal{N}(0; \sigma^2)$ . Его  $n$ -мерная версия получается независимым применением одномерного ( $n = 1$ ) случая к каждой из входных переменных  $x_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . АБГШ-канал с ограничением на среднюю мощность  $S$  – это АБГШ-канал, вход которого  $\mathbf{x}$  удовлетворяет условию

$$\|\mathbf{x}\|_2^2 := \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq nS. \quad (4)$$

Пропускная способность АБГШ-канала с ограничением на среднюю мощность  $P$  (обозначаемая через  $C_G$ ) дается выражением

$$C_G := \frac{1}{2} \log_2 \left( 1 + \frac{P}{\sigma^2} \right) \text{ бит на обращение к каналу.}$$

В [5, 6] было показано, что для АБГШ-канала с ограничением на среднюю мощность  $P$  максимальный объем кода  $M^*(n, \varepsilon, P)$  для достаточно больших  $n$  удовлетворяет соотношению

$$\log M^*(n, \varepsilon, P) = nC_G + \sqrt{nV_G} \Phi^{-1}(\varepsilon) + O(\log(n)),$$

где вероятность ошибки не выше  $\varepsilon$ ,

$$V_G = \frac{P(P+2)}{2(P+1)^2} \log_2^2(e), \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}} du.$$

**2.4. Дискретные каналы без памяти (ДКБП).** ДКБП описывается конечным алфавитом  $\mathcal{X}$  на входе, конечным алфавитом  $\mathcal{Y}$  на выходе и вероятностями перехода вида  $W = P_{Y|X}$ , где для любого  $n \geq 1$

$$P_{Y|X}(\mathbf{y} | \mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n P_{Y|X}(y_i | x_i).$$

Хотя в принципе выход может зависеть от предыдущих входов (так называемый ДКБП с обратной связью), мы будем рассматривать только ДКБП без обратной связи. Пропускная способность  $C_D$  неэкзотического<sup>2</sup> ДКБП  $W$  (см. [7, Приложение Н], а также [9]) дается формулой Шеннона:

$$C_D = \sup_{P \in \mathcal{P}(\mathcal{X})} I(P; W) \triangleq \sup_{P \in \mathcal{P}(\mathcal{X})} \sum_{x \in \mathcal{X}} \sum_{y \in \mathcal{Y}} P(x) W(y|x) \log \left( \frac{W(y|x)}{PW(y)} \right),$$

где  $I(P; W)$  – взаимная информация (см. [19]) между входом и выходом канала.

Теперь определим некоторые понятия, которые понадобятся нам в дальнейшем.

**Определение 1.** Для заданных канала  $W$  и распределения на выходе  $Q$  информационной плотностью [20] канала называется величина

$$i(x, y; Q) = \log \left( \frac{W(y|x)}{Q(y)} \right). \quad (5)$$

Зачастую  $Q = PW$  для некоторого  $P \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ , и в этом случае будем обозначать информационную плотность через  $i_P(x, y)$ .

Заметим, что

$$I(P; W) = \sum_{x, y} P(x) W(y|x) i_P(x, y).$$

Аналогично, дисперсия информационной плотности имеет вид

$$V(P; W) := \left[ \sum_{x \in \mathcal{X}} \sum_{y \in \mathcal{Y}} P(x) W(y|x) (i_P(x, y))^2 \right] - (I(P; W))^2.$$

Результат при конечной длине блока для неэкзотических ДКБП  $W$  с вероятностью ошибки  $0 < \varepsilon < 1$  и  $V(P; W) > 0$  для распределения  $P$ , на котором достигается пропускная способность, дается выражением (см. [5–9])

$$\log M^*(n, \varepsilon) = nC_D + \sqrt{nV_D} \Phi^{-1}(\varepsilon) + O(\log(n)),$$

где

$$V_D = \begin{cases} V_{\min} := \min_{P \in \Pi} V(P; W), & \varepsilon \leq 1/2, \\ V_{\max} := \max_{P \in \Pi} V(P; W), & \varepsilon > 1/2, \end{cases}$$

а  $\Pi = \{P \in \mathcal{P}(\mathcal{X}) : I(P; W) = C_D\}$  – множество распределений, на которых достигается пропускная способность.

**2.5. ДКБП с ограничениями по стоимости.** Пусть  $\Lambda : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  – неотрицательная функция, которую будем называть функцией энергии. Ее значением является просто энергия символа  $x$ , что обобщает стандартную функцию энергии  $\Lambda(x) = x^2$  для АБГШ-канала. В дальнейшем будем предполагать, что функция энергии разделима,

<sup>2</sup> ДКБП называется экзотическим, если максимальная дисперсия его информационной плотности, т.е.  $V_{\max}$ , равна 0, и для некоторого входного символа  $x_0$  равенство  $P(x_0) = 0$  выполнено для любого распределения  $P$ , на котором достигается пропускная способность, но при этом  $D(W(\cdot | x_0) \| Q_{\check{Y}}) = C$  и  $V(W(\cdot | x_0) \| Q_{\check{Y}}) > 0$ . Здесь  $D(P_1 \| P_2)$  – КЛ-дивергенция между  $P_1$  и  $P_2$ ,

а  $V(P_1 \| P_2) = \sum_x P_1(x) \log^2 \left( \frac{P_1(x)}{P_2(x)} \right) - D^2(P_1 \| P_2)$ .

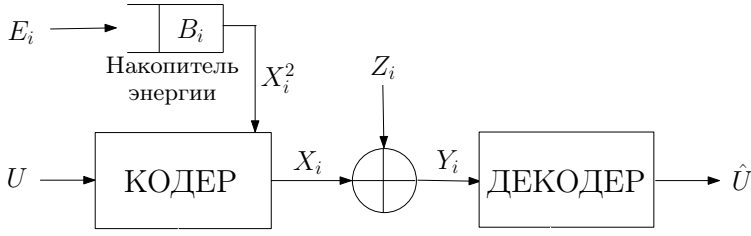


Рис. 1. Блок-схема АБГШ с системой сбора энергии

т.е. для вектора  $\mathbf{x} \in \mathcal{X}^n$

$$\Lambda(\mathbf{x}) := \sum_{i=1}^n \Lambda(x_i). \quad (6)$$

Зададим множества ограничений  $\mathbb{F}_a$  и  $\mathcal{F}_a$  для  $a \geq 0$  следующим образом:

$$\mathbb{F}_a = \{\mathbf{x} \in \mathcal{X}^n : \Lambda(\mathbf{x}) \leq na\}, \quad (7)$$

$$\mathcal{F}_a = \{P \in \mathcal{P} : \mathbf{E}_P[\Lambda(X)] \leq na\}. \quad (8)$$

В ДКБП с ограничениями по стоимости (см. [21, 22]), где кодовые слова выбираются из множества  $\mathbb{F}_a$ , пропускная способность приобретает вид

$$C_D(a) = \sup_{P \in \mathcal{F}_a} I(P; W). \quad (9)$$

Более того, для любого  $a > 0$  максимальный достижимый объем кода, обозначаемый через  $M^*(n, \varepsilon, a)$ , при определенных условиях регулярности (см. результат в [7] и некоторые улучшения в [22]) имеет вид

$$\log M^*(n, \varepsilon, a) = nC_D(a) + \sqrt{nV_D(a)}\Phi^{-1}(\varepsilon) + O(\log n),$$

где  $V_D(a)$  – дисперсия канала (см. [6]).

ДКБП со сбором энергии (СЭ-ДКБП) можно рассматривать как обобщение ДКБП с ограничениями по стоимости, и его анализ при конечной длине блока вынесен в § 4.

**2.6. АБГШ-канал со сбором энергии.** Система сбора энергии состоит из накопителя энергии (буфера), где в течение некоторого периода времени собирается энергия из различных источников. Обычно энергия собирается из внешних источников, таких как, например, солнечная энергия. СЭ-АБГШ-канал состоит из системы сбора энергии на передающем конце и последующего АБГШ-канала, как показано на рис. 1. Предполагается, что для передачи символа  $x$  по каналу требуется  $x^2$  единиц энергии из буфера, и если необходимая энергия имеется в наличии, происходит успешная передача, а в противном случае возникает сбой. Случай сбоя можно рассматривать как ошибку или же передавать в этом случае усеченный подходящим образом символ. В настоящей статье в вопросах достижимости мы будем рассматривать сбой как ошибку передачи. Будем предполагать, что накопитель энергии имеет бесконечную пропускную способность и что утечек энергии не происходит. При этом процесс поступления энергии  $\{E_i\}$  предполагается н.о.р., неотрицательным, с конечным средним  $\mathbf{E}[E_1]$  и конечной дисперсией  $\sigma_E^2$ .

Система работает следующим образом. Вначале в интервале времени  $i$  собирается энергия  $E_i$ , она используется для передачи символа вместе с некоторой энергией

из буфера, если необходимо, и затем оставшаяся энергия сохраняется. Пусть  $B_i$  – энергия в буфере в  $i$ -м интервале передачи. Предполагается, что  $B_0 = 0$ . Тогда энергия в буфере при  $1 \leq i \leq n$  изменяется согласно следующему закону:

$$B_i = (B_{i-1} + E_i - X_i^2)^+,$$

где  $(x)^+ = \max\{x, 0\}$ . В нашем случае  $\mathbf{X}$  планируется таким образом, чтобы величина внутри  $(\cdot)^+$  была неотрицательной.

Для обычного АБГШ-канала с ограничением по мощности  $S$  входные последовательности должны удовлетворять условию (4). Ограничение для АБГШ-канала со сбросом энергии с входом  $\mathbf{x}$  и вектором энергии  $\mathbf{e}$  имеет вид

$$\|\mathbf{x}^k\|_2^2 \leq \|\mathbf{e}^k\|_1, \quad 1 \leq k \leq n;$$

иными словами, требуется, чтобы в любой момент времени было достаточно энергии для передачи желаемого символа. Для достижения этой цели разрешается, чтобы вектор  $\mathbf{x}$  зависел от  $\mathbf{e}$ .

Пропускная способность СЭ-АБГШ-канала (см. [11, 12]) дается выражением

$$C_{EG} = \frac{1}{2} \log \left( 1 + \frac{\mathbf{E}[E_1]}{\sigma^2} \right). \quad (10)$$

Кроме того, для этого канала также была показана справедливость сильной обратной теоремы кодирования (см. [11]). Из этого логически вытекала бы обратная теорема кодирования вида  $\log M \leq nC_{EG} + o(n)$ . Но поскольку нас интересует улучшение этого выражения, нам необходимы более тонкие инструменты для вывода обратной теоремы кодирования при конечной длине блока. Поэтому нам потребуются для этого некоторые результаты из [7]. Для ясности изложения будем использовать обозначения из [7].

Сформулируем следующие границы на пропускную способность СЭ-АБГШ-каналов при конечной длине блока.

**Теорема 1.** *Рассмотрим СЭ-АБГШ-канал с дисперсией шума  $\sigma^2$ , в котором процесс сбора энергии  $\{E_i\}$  н.о.р. на передающем конце, имеет среднее  $\mathbf{E}[E_1]$  и дисперсию  $\sigma_E^2 < \infty$ . Для заданной максимальной вероятности ошибки  $\varepsilon > 0$  справедливо следующее:*

1 (граница достижимости). *При достаточно большой длине блока  $n$  максимальный объем кода  $M^*(n, \varepsilon)$  удовлетворяет неравенству*

$$\log M^*(n, \varepsilon) \geq nC_{EG} + \sqrt{n} [\sqrt{V_{EG}} \Phi^{-1}(\lambda\varepsilon) - K_{\varepsilon, \lambda} C_{EG}] - \log n + O(1), \quad (11)$$

где  $C_{EG}$  определено в (10),

$$V_{EG} = \frac{\mathbf{E}[E_1]}{\mathbf{E}[E_1] + \sigma^2} \log_2^2(e), \quad K_{\varepsilon, \lambda} = \sqrt{\frac{4(2\mathbf{E}[E_1]^2 + \sigma_E^2)}{(1-\lambda)\varepsilon\mathbf{E}[E_1]^2}},$$

причем это выполнено для любого  $0 < \lambda < 1$ ;

2 (верхняя граница). *Кроме того,*

$$\log M^*(n, \varepsilon) \leq nC_{EG} + \sqrt{nV_{EG2}} \Phi^{-1}(\varepsilon) + \frac{1}{2} \log n + O(1), \quad (12)$$

где

$$V_{EG2} = \frac{\mathbf{E}[E_1]^2 + \mathbf{E}[E_1^2] + 4\sigma^2 \mathbf{E}[E_1]}{4(\mathbf{E}[E_1] + \sigma^2)^2} \log_2^2(e).$$



Доказательство границы достижимости вынесено в § 3, а верхней границы – в § 6. Поскольку члены второго порядка (коэффициенты при  $\sqrt{n}$ ) не совпадают, заключаем, что

$$\log M^*(n, \varepsilon) = nC_{EG} + \Theta(\sqrt{n}).$$

**2.7. ДКБП со сбором энергии.** ДКБП со сбором энергии – это ДКБП, в котором происходит сбор энергии при кодировании (на передающем конце). Пусть  $\Lambda(\cdot)$  – функция энергии (см. (6)), связанная с этим ДКБП. Модель та же, что и для СЭ-АБГШ-канала, за исключением следующих различий и предположений:

1. АБГШ-канал заменяется на ДКБП;
2. Энергия, потребляемая для символа  $x_i$ , равна  $\Lambda(x_i)$ . Кроме того, имеется символ  $x_0$ , такой что  $\Lambda(x_0) = 0$ ;
3. Дополнительно предполагается, что ДКБП не являются экзотическими.

Анализ ДКБП со сбором энергии в общем и целом аналогичен анализу СЭ-АБГШ-каналов. Однако, используя метод типов (подробнее о типах см. в [19, 21]), можно улучшить верхнюю границу, приведя ее к виду, похожему на границу для обычного ДКБП без сбора энергии.

Пропускная способность СЭ-ДКБП, процесс сбора энергии которого имеет среднее  $\mathbf{E}[E_1]$ , дается выражением

$$C_{ED} := \sup_{P \in \mathcal{F}_{\mathbf{E}[E_1]}} I(P; W), \quad (13)$$

где  $\mathcal{F}_a$  определено в (8).

В настоящей статье доказываются следующие границы на скорость для СЭ-ДКБП при конечной длине блока.

*Теорема 2. Для заданного  $0 < \varepsilon < 1$  при критерии максимальной вероятности ошибки рассмотрим СЭ-ДКБП с архитектурой сбора, использования и накопления энергии, в котором процесс сбора энергии  $\{E_i\}$  н.о.р. с  $\mathbf{E}[E_1^2] < \infty$ .*

- 1 (граница достижимости). *Для заданного распределения на входе  $P_X \in \mathcal{F}_{\mathbf{E}[E_1]}$  максимальный объем кода  $M^*(n, \varepsilon)$  при достаточно большой длине блока  $n$  удовлетворяет неравенству*

$$\begin{aligned} \log M^*(n, \varepsilon) &\geq \\ &\geq nI(P_X; W) - \sqrt{n}K_{\varepsilon, \lambda}I(P_X; W) + \sqrt{nV(P_X; W)}\Phi^{-1}(\lambda\varepsilon) - \log n + O(1) \end{aligned} \quad (14)$$

для любого  $0 < \lambda < 1$ . Здесь

$$K_{\varepsilon, \lambda} = \frac{2\sqrt{\text{Var}(\Delta_1)}}{\mathbf{E}[E_1]\sqrt{(1-\lambda)\varepsilon}}, \quad \Delta_1 = E_1 - \Lambda(X_1);$$

- 2 (верхняя граница). *Для заданного  $\eta > 0$  максимальный объем кода  $M^*(n, \varepsilon)$  удовлетворяет неравенству*

$$\begin{aligned} \log M^*(n, \varepsilon) &\leq \\ &\leq nC_{ED} + \sqrt{n}C'(\mathbf{E}[E_1])D_\varepsilon + \sqrt{nV_\varepsilon^*(\eta)} \left( \Phi^{-1}(\varepsilon) + \frac{K_{\varepsilon\varepsilon}}{4} \right) + O(\log n), \end{aligned} \quad (15)$$

где  $C'(\cdot)$  – производная функции пропускной способности с ограничением по стоимости (9), а  $D_\varepsilon$ ,  $K_\varepsilon$  и  $V_\varepsilon^*(\eta)$  – функции от  $\varepsilon$ , не зависящие от  $n$ .

**2.8. Кодер и декодер для каналов со сбором энергии.** Для традиционных каналов (АБГШ, ДКБП и т.д.) кодер и декодер имеют доступ к кодовой книге (случайным или еще каким-нибудь образом) для целей кодирования и декодирования

соответственно. В постановке задачи со сбором энергии кодеру доступны значения поступающей энергии. Поэтому любое кодовое слово  $c \in \mathcal{C}$ , где  $\mathcal{C}$  – кодовая книга, является вектором вида  $c(m, e^n)$  длины  $n$ , где  $n$  – длина блока, для сообщения  $m$  и вектора энергии  $e^n$ . Из соображений причинности  $i$ -й символ кодового слова может зависеть только от  $e^i$ . Декодеру же эти значения энергии недоступны, поэтому ему неизвестна и зависящая от этих значений кодовая книга. С другой стороны, ему доступна первичная кодовая книга, не зависящая от значений энергии. Поэтому в контексте каналов со сбором энергии кодовое слово, соответствующее сообщению  $m$ , должно иметь смысл отображения  $m \rightarrow c(m, \cdot)$ . Заметим, что определения объема кода  $M$ , вероятности ошибки и т.д., данные в п. 2.2, при этом не изменяются. Это аналогично тому, что происходит при анализе каналов с информацией о состоянии, известной только на передающем конце.

В доказательстве достижимых границ мы увидим, что создается кодовая книга, не зависящая от значений энергии и доступная также на приемном конце. После этого кодер, используя значения энергии, модифицирует кодовые слова так, чтобы они удовлетворяли необходимым ограничениям. Таким способом организуется пара кодер-декодер. Аналогичный метод применяется в каналах с переменными состояниями, где информация о состоянии доступна кодеру, но не известна декодеру [23].

### § 3. Граница достижимости для СЭ-АБГШ-каналов при конечной длине блока

В этом параграфе доказывается часть 1 теоремы 1. Пусть задано  $0 < \varepsilon < 1$ . Вначале построим код со средней вероятностью ошибки  $\varepsilon_n = \varepsilon - 1/\sqrt{n}$ , где  $n > \varepsilon^{-2}$ . Применяя кодирование с выбрасыванием, получаем следующую границу:

$$\log M_m(n, \varepsilon) \geq \log M_a(n, \varepsilon_n) - \frac{1}{2} \log n - \log \varepsilon, \quad (16)$$

где  $M_m$  – объем кодовой книги для критерия максимальной вероятности ошибки, полученный с помощью выбрасывания, а  $M_a$  соответствует средней вероятности ошибки. Будем предполагать, что в начале передачи буфер пуст. Это соответствует наихудшему возможному сценарию, поскольку если бы в начале буфер был непустым, это могло бы лишь способствовать передаче, и поэтому наша граница достижимости по-прежнему бы выполнялась. Предлагаемая схема кодирования состоит из двух фаз: фаза накопления и фаза собственно передачи. В литературе это известно (см. [12]) как *схема накопления и передачи* (save and transmit scheme).

**3.1. Фаза накопления.** В этой фазе передается символ 0, требующий нулевой энергии, в течение заданного количества интервалов передачи. Во время этого периода в буфере накапливается энергия. Приемнику известно об этих интервалах, и во время них выход канала им игнорируется, так как он не несет никакой информации. При этом, конечно, с точки зрения передачи информации эти интервалы тратятся впустую. Для того чтобы эта схема не влияла на коэффициент первого порядка, необходимо, чтобы число таких интервалов, отведенных для сбора энергии, составляло не более чем  $o(n)$ .

Зафиксируем  $0 < \lambda < 1$  и положим

$$K_{\varepsilon, \lambda} = \sqrt{\frac{4(2 \mathbf{E}[E_1]^2 + \sigma_E^2)}{(1 - \lambda)\varepsilon \mathbf{E}[E_1]^2}}.$$

Через  $N_n$  обозначим число интервалов, отведенных на фазу накопления. Во время этой фазы буфер наполняется энергией, а после  $N_n$  интервалов времени ожидается, что накопленная энергия превысит некоторое пороговое значение, которое мы обозначим через  $E_{0n}$ . Пусть  $N_n = K_{\varepsilon, \lambda} \sqrt{n}$  (всюду, где потребуется, берем округление

до целого сверху, если это  $N_n$  не целое) и  $E_{0n} = N_n \mathbf{E}[E_1]/2$ . Через  $\mathcal{E}_0$  обозначим событие, состоящее в том, что в системе не удалось накопить энергию  $E_{0n}$ . Имеем

$$\begin{aligned} \Pr(\mathcal{E}_0) &= \Pr\left[\sum_{i=1}^{N_n} E_i \leq E_{0n}\right] = \Pr\left[\sum_{i=1}^{N_n} (E_i - \mathbf{E}[E_1]) \leq -E_{0n}\right] \leq \\ &\leq \Pr\left[\left|\sum_{i=1}^{N_n} (E_i - \mathbf{E}[E_1])\right| \geq E_{0n}\right] \leq \frac{4\sigma_E^2}{K_{\varepsilon_n, \lambda} \mathbf{E}[E_1]^2 \sqrt{n}} \leq \frac{4\sigma_E^2}{K_{\varepsilon, \lambda} \mathbf{E}[E_1]^2 \sqrt{n}}, \end{aligned} \quad (17)$$

где на последнем шаге использовалось неравенство Чебышева и тот факт, что  $K_{\varepsilon, \lambda}$  монотонно убывает по  $\varepsilon$ . Эта граница гарантирует, что вероятность ошибки убывает хотя бы как  $O(n^{-1/2})$  и поэтому может быть сделана сколь угодно малой при достаточно большом  $n$ .

**3.2. Схема кодирования и декодирования.** Используя случайное кодирование, порождаем кодовую книгу, содержащую  $M_a$  кодовых слов длины  $n$ , с н.о.р. гауссовскими элементами с нулевым средним и дисперсией  $\mathbf{E}[E_1]$ . Эта кодовая книга доступна также и декодеру. Через  $V_i(m)$  обозначим  $i$ -й символ  $m$ -го кодового слова.

На приемном конце используется некоторый вариант порогового декодирования. Напомним определение величины  $i_P(x, y)$ , где  $W$  – рассматриваемый гауссовский канал, а  $PW$  – распределение на выходе (гауссовское со средним 0 и дисперсией  $\mathbf{E}[E_1] + \sigma^2$ ) для соответствующего гауссовского входа. Правило декодирования состоит в том, чтобы выбрать единственное сообщение  $\hat{m}$ , такое что

$$i_P(\mathbf{V}^n(\hat{m}), \mathbf{Y}) \geq \log \gamma_n, \quad (18)$$

где  $\gamma_n$  – неотрицательное число, которое будет выбрано позже. Это тот же детектор, который используется в обычных АБГШ-каналах.

Заметим, что в том, что касается передатчика, эта кодовая книга не является *зависящей от энергии* кодовой книгой, которая обсуждалась в п. 2.8. Это вполне соответствует тому, что декодеру не доступен процесс поступления энергии. Однако в следующем пункте мы построим реальный передаваемый символ  $\mathbf{X}^n$ , который будет функцией от поступающей энергии. Поэтому эту кодовую книгу мы будем называть *первичной*.

**3.3. Фаза передачи.** Пусть  $n$  – число интервалов времени, в которых передаются символы по АБГШ-каналу. Подсчитаем число обращений к каналу начиная с момента  $N_n + 1$ . После того как мы накопим энергию по крайней мере  $E_{0n}$ , мы должны обеспечить, что с высокой вероятностью при дальнейшей передаче не возникнет сбоя. Пусть  $\mathbf{v}^n$  – вход до проверки накопителя энергии. В момент  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , есть два случая:

1. Накопилось достаточно энергии, и тогда на вход канала подается  $x_i = v_i$ ;
2. Энергии недостаточно, и тогда передается  $x_i = 0$ .

Если требуется передать сообщение  $m$ , то при заданном  $\mathbf{V}^n(m)$ , определенном в п. 3.2, соответствующий символ  $\mathbf{X}^n(m)$  получается применением следующих правил.

Обозначим множество последовательностей  $(\mathbf{v}^n, \mathbf{e}^n)$ , удовлетворяющих вышеуказанным ограничениям, через  $\mathcal{A}_n$ , где

$$\mathcal{A}_n = \bigcap_{\ell=1}^n \{(\mathbf{v}^n, \mathbf{e}^n) : s_\ell \geq -E_{0n}\}, \quad (19)$$

и пусть  $s_\ell = \sum_{k=1}^{\ell} e_k - v_k^2$ . Заметим, что передаваемое кодовое слово удовлетворяет условиям передачи со сбором энергии, поскольку энергия  $E_{0n}$  уже собрана к началу передачи. Через  $\mathcal{E}_1$  обозначим то событие, что условия на энергию не выполнены. Пусть  $\{V_i\}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , – н.о.р. случайные величины (не обязательно гауссовские) с нулевым средним, дисперсией  $\mathbf{E}[E_1]$  и  $\mathbf{E}[V_1^4] < \infty$ . Формально имеем

$$\begin{aligned} \Pr(\mathcal{E}_1) &= \Pr(\mathcal{A}_n^c) = \Pr\left[\bigcup_{\ell=1}^n \{S_\ell \leq -E_{0n}\}\right] \leq \Pr\left[\bigcup_{\ell=1}^n \{|S_\ell| \geq E_{0n}\}\right] = \\ &= \Pr\left[\max_{1 \leq \ell \leq n} |S_\ell| \geq E_{0n}\right] \end{aligned} \quad (20)$$

и  $S_\ell = \sum_{k=1}^{\ell} E_k - V_k^2$ . Теперь  $S_\ell$  – сумма н.о.р. случайных величин с нулевым средним и конечной дисперсией. Применим неравенство Колмогорова [24, гл. 3], утверждающее следующее.

*Лемма 1 (неравенство Колмогорова). Пусть  $Z_i$  – независимые случайные величины с нулевым средним, и пусть  $S_n = \sum_{i=1}^n Z_i$ . Если  $\mathbf{E}[Z_i] = 0$  и  $\mathbf{E}[Z_i^2] < \infty$ , то для любого  $0 < a < \infty$*

$$\Pr\left(\max_{1 \leq i \leq n} |S_i| \geq a\right) \leq \frac{\mathbf{E}[S_n^2]}{a^2}.$$

Отсюда

$$\Pr(\mathcal{E}_1) \leq \frac{\mathbf{E}[S_n^2]}{E_{0n}^2} = \frac{4(2\mathbf{E}[E_1]^2 + \sigma_E^2)}{K_{\varepsilon, \lambda}^2 \mathbf{E}[E_1]^2} \leq \frac{4(2\mathbf{E}[E_1]^2 + \sigma_E^2)}{K_{\varepsilon, \lambda}^2 \mathbf{E}[E_1]^2}. \quad (21)$$

В отличие от (17), правая часть этого неравенства не зависит от  $n$ . Однако подходящим образом выбирая  $K_{\varepsilon, \lambda}$ , можно сделать ее сколь угодно малой. Наш выбор  $K_{\varepsilon, \lambda}$  будет гарантировать, что  $\Pr(\mathcal{E}_1) \leq (1 - \lambda)\varepsilon$ . Таким образом, общее число интервалов времени, отведенных под накопление и передачу в этой схеме, составляет  $N_n + n$ .

Хотелось бы отметить, что во всех этих результатах величины  $V_i$  не предполагаются гауссовскими и что канал не играет никакой роли за исключением ограничений на вход. Это означает, что полученная граница справедлива и для негауссовских каналов со сбором энергии с независимыми входами, удовлетворяющими вышеуказанным ограничениям на моменты.

**3.4. Вывод нижней границы.** Пусть  $\mathcal{E}_H = \mathcal{E}_0 \cup \mathcal{E}_1$ . При критерии средней вероятности ошибки (см. (2)) мы видим, что

$$\begin{aligned} P_{e, \text{avg}} &= \frac{1}{M_a} \sum_{i=1}^{M_a} \Pr[\widehat{U} \neq i | U = i] = \\ &= \frac{1}{M_a} \sum_{i=1}^{M_a} \Pr[\widehat{U} \neq i, \mathcal{E}_H^c | U = i] + \Pr[\widehat{U} \neq i, \mathcal{E}_H | U = i] \leq \\ &\leq \frac{1}{M_a} \sum_{i=1}^{M_a} \Pr[\widehat{U} \neq i, \mathcal{E}_H^c | U = i] + \Pr[\mathcal{E}_H]. \end{aligned} \quad (22)$$

Отметим, что все эти вероятности имеют собственное математическое ожидание относительно всех кодовых книг. Теперь сделаем важное наблюдение. И первичная кодовая книга, и гауссовский канал, и декодер функционируют независимо от системы сбора энергии. Единственный способ, каким переменные, отвечающие за сбор энергии, влияют на общую картину, – это через  $\mathbf{Y}^n$ , поскольку  $Y_i = X_i + Z_i$ . Значит, при событии  $\mathcal{E}_H^c$  отсюда следует, что  $\mathbf{X}^n = \mathbf{V}^n$ . Но это то же самое, что сказать, что когда ограничение по собранной энергии выполнено, символы из первичной кодовой книги остаются неизменными, подвергаясь лишь воздействию шума.

Рассмотрим  $\Pr[\widehat{U} \neq i, \mathcal{E}_H^c | U = i]$ . Как отмечено выше, при событии  $\mathcal{E}_H^c$  канал ведет себя как стандартный АБГШ-канал, и поэтому возникающие ошибки – это только ошибки в таком канале. Следовательно, используя неравенство для вероятности объединения событий, получаем

$$\begin{aligned} \Pr[\widehat{U} \neq i, \mathcal{E}_H^c | U = i] &\leq \Pr[\{i_P(\mathbf{V}^n(i); \mathbf{Y}^n) \leq \log \gamma_n\}, \mathcal{E}_H^c | U = i] + \\ &+ \sum_{\substack{1 \leq j \leq M_a \\ j \neq i}} \Pr[\{i_P(\mathbf{V}^n(j); \mathbf{Y}^n) \geq \log \gamma_n\}, \mathcal{E}_H^c | U = i] \leq \\ &\leq \Pr[i_P(\mathbf{V}^n(i); \mathbf{V}^n(i) + \mathbf{Z}^n) \leq \log \gamma_n | U = i] + \\ &+ \sum_{\substack{1 \leq j \leq M_a \\ j \neq i}} \Pr[i_P(\mathbf{V}^n(j); \mathbf{V}^n(i) + \mathbf{Z}^n) \geq \log \gamma_n | U = i]. \end{aligned} \quad (23)$$

Дальнейшее доказательство вполне аналогично выводу границ для АБГШ-канала (см. [7]), и поэтому в итоге получаем следующую границу для любого  $\gamma_n > 0$ :

$$\Pr[\widehat{U} \neq i, \mathcal{E}_H^c | U = i] \leq \Pr \left[ \log \left( \frac{W^n(\mathbf{V}^n + \mathbf{Z}^n | \mathbf{V}^n)}{P_{\mathbf{Y}^n}(\mathbf{V}^n + \mathbf{Z}^n)} \right) \leq \log \gamma_n \right] + \frac{M_a}{\gamma_n}. \quad (24)$$

Таким образом, первый член в правой части неравенства (22) ограничен сверху величиной (24). Верхняя граница на  $\Pr(\mathcal{E}_H)$  уже получена – она вытекает из (17), (21) и неравенства для вероятности объединения событий.

Имеем

$$\Pr \left[ \log \left( \frac{W^n(\mathbf{V}^n + \mathbf{Z}^n | \mathbf{V}^n)}{P_{\mathbf{Y}^n}(\mathbf{V}^n + \mathbf{Z}^n)} \right) \leq \log \gamma_n \right] = \Pr \left\{ \sum_{i=1}^n G_i \leq \log \gamma_n \right\}, \quad (25)$$

где  $G_i = \log \left( \frac{W(V_i + Z_i | V_i)}{P_{\mathbf{Y}}(V_i + Z_i)} \right)$ . Отметим, что  $G_i$  – н.о.р. величины в силу сделанных ранее замечаний. Более того,

$$C_{EG} := \mathbf{E}[G_i] = \frac{1}{2} \log \left( 1 + \frac{\mathbf{E}[E_1]}{\sigma^2} \right), \quad (26)$$

$$V_{EG} := \text{Var}(G_i) = \frac{\mathbf{E}[E_1]}{\mathbf{E}[E_1] + \sigma^2} \log_2^2(e). \quad (27)$$

Третий момент  $\mathbf{E}[|G_i|^3]$  также конечен. Для дальнейшего сформулируем теорему Берри–Эссеена (см. [24, теорема 6.4.1]).

**Лемма 2** (теорема Берри–Эссеена). Пусть  $X_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , – последовательность н.о.р. случайных величин со средним  $\mu$ , дисперсией  $\sigma^2 < \infty$  и  $\mathbf{E}[|X_1|^3] < \infty$ .

Положим  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ . Тогда для любого  $x \in \mathbb{R}$

$$\left| \Pr \left( \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x \right) - \Phi(x) \right| \leq C \frac{\mathbf{E}|X_1 - \mu|^3}{\sigma^3\sqrt{n}},$$

где  $C < 1/2$  (см. [25]). Отметим, что эта граница равномерна по  $x$ .

Положим

$$K = \frac{\mathbf{E}[|G_i - \mathbf{E}[G_i]|^3]}{2V_{EG}^{3/2}}.$$

Применяя теорему Берри–Эссеена, для любого  $u \in \mathbb{R}$  имеем

$$\left| \Pr \left\{ \frac{\left( \sum_{i=1}^n G_i \right) - nC_{EG}}{\sqrt{nV_{EG}}} \leq u \right\} - \Phi(u) \right| \leq \frac{K}{\sqrt{n}}.$$

Подставляя

$$u = \frac{\log \gamma_n - nC_{EG}}{\sqrt{nV_{EG}}},$$

получаем

$$\Pr \left\{ \sum_{i=1}^n G_i \leq \log \gamma_n \right\} \leq \Phi \left( \frac{\log \gamma_n - nC_{EG}}{\sqrt{nV_{EG}}} \right) + \frac{K}{\sqrt{n}}. \quad (28)$$

Пусть

$$\alpha_n = \lambda \varepsilon_n - \frac{4\sigma_E^2}{K_{\varepsilon_n, \lambda} \mathbf{E}[E_1]^2 \sqrt{n}} - \frac{2K}{\sqrt{n}}.$$

В терминах  $\varepsilon$  имеем

$$\alpha_n \geq \lambda \varepsilon - \frac{4\sigma_E^2}{K_{\varepsilon, \lambda} \mathbf{E}[E_1]^2 \sqrt{n}} - \frac{2K + \lambda}{\sqrt{n}} := \alpha'_n. \quad (29)$$

Положим

$$\log \gamma_n = nC_{EG} + \sqrt{nV_{EG}} \Phi^{-1}(\alpha_n).$$

Выберем  $n$  достаточно большим, так чтобы  $\alpha_n > 0$ . Из (22), (24), (25) и (28) имеем

$$\begin{aligned} \log M_a(n, \varepsilon_n) &\geq \log \gamma_n - \frac{1}{2} \log n + O(1) \geq \\ &\geq nC_{EG} + \sqrt{nV_{EG}} \Phi^{-1}(\alpha_n) - \frac{1}{2} \log n + O(1). \end{aligned} \quad (30)$$

Используя (16) и (29), получаем

$$\log M_m(n, \varepsilon) \geq nC_{EG} + \sqrt{nV_{EG}} \Phi^{-1}(\alpha'_n) - \log n + O(1), \quad (31)$$

замечая, что  $\Phi^{-1}$  – монотонно возрастающая функция.

Упростим  $\Phi^{-1}(\alpha'_n)$ , используя формулу Тейлора. Существует  $u \in (\alpha'_n, \lambda\varepsilon)$ , такое что

$$f(\alpha'_n) = f(\lambda\varepsilon) + (\alpha'_n - \lambda\varepsilon)f'(u),$$

где  $f(x) = \Phi^{-1}(x)$ . Заметим, что  $f(x)$  имеет производную, которая положительна, строго убывает до  $x = 1/2$ , а затем возрастает. Таким образом, на интервале  $(\alpha'_n, \lambda\varepsilon)$  выполнено

$$f'(u) \leq \hat{f} = \max\{f'(\alpha'_{n_0}), f'(\lambda\varepsilon)\},$$

где  $n_0$  – наименьшее  $n$ , для которого  $\alpha'_n > 0$ . Отсюда при нашем выборе  $\alpha'_n$  получаем, что

$$\log M^*(n, \varepsilon) \geq \log M_m(n, \varepsilon') \geq nC_{EG} + \sqrt{nV_{EG}}\Phi^{-1}(\lambda\varepsilon) - \log(n) + O(1). \quad (32)$$

Пусть  $\hat{n} = n + N_n$ . Мы уже использовали  $\hat{n}$  интервалов времени, в  $n$  из которых велась передача. Результат будем выражать как функцию от  $\hat{n}$  – общего числа использованных интервалов времени. Имеем

$$\begin{aligned} \log M^*(\hat{n}, \varepsilon) &\geq (\hat{n} - N_n)C_{EG} + \sqrt{nV_{EG}}\Phi^{-1}(\lambda\varepsilon) - \log(\hat{n} - N_n) + O(1), \geq \\ &\geq \hat{n}C_{EG} - K_{\varepsilon, \lambda}\sqrt{\hat{n}}C_{EG} + \sqrt{nV_{EG}}\Phi^{-1}(\lambda\varepsilon) - \log \hat{n} + O(1). \end{aligned} \quad (33)$$

Отметим, что

$$\sqrt{n} \leq \sqrt{\hat{n}} \quad \text{и} \quad \sqrt{n} \geq \sqrt{\hat{n}} - \frac{K_{\varepsilon, \lambda}}{2},$$

где второе неравенство вытекает из цепочки

$$\sqrt{\hat{n}} = \sqrt{n + K_{\varepsilon, \lambda}\sqrt{n}} = \sqrt{n}\sqrt{1 + \frac{K_{\varepsilon, \lambda}}{\sqrt{n}}} \leq \sqrt{n}\left(1 + \frac{K_{\varepsilon, \lambda}}{2\sqrt{n}}\right) = \sqrt{n} + \frac{K_{\varepsilon, \lambda}}{2}, \quad (34)$$

в которой использовался тот факт, что  $(1+x)^{1/2} \leq 1 + \frac{x}{2}$  для  $x > 0$ . Из (33) и (34) видно, что независимо от знака  $\Phi^{-1}(\lambda\varepsilon)$  получаемые нижние границы отличаются на константу, не зависящую от  $n$ . Сводя все вместе, для достаточно больших  $\hat{n}$  получаем

$$\log M^*(\hat{n}, \varepsilon) \geq \hat{n}C_{EG} + \sqrt{\hat{n}}\left[\sqrt{V_{EG}}\Phi^{-1}(\lambda\varepsilon) - K_{\varepsilon, \lambda}C_{EG}\right] - \log \hat{n} + O(1).$$

Для полноты изложения приведем точное выражение:

$$\begin{aligned} \log M^*(\hat{n}, \varepsilon) &\geq \hat{n}C_{EG} + \sqrt{\hat{n}}\left[\sqrt{V_{EG}}\Phi^{-1}(\lambda\varepsilon) - K_{\varepsilon, \lambda}C_{EG}\right] - \log \hat{n} - \log \varepsilon K - \\ &- \frac{K_{\varepsilon, \lambda}}{2} - \sqrt{V_{EG}}\Phi^{-1}(\lambda\varepsilon)\hat{f}\left[\frac{4\sigma_E^2}{K_{\varepsilon, \lambda}\mathbf{E}[E_1]^2} + 2K + \lambda\right]. \end{aligned} \quad (35)$$

На этом завершается доказательство границы достижимости из теоремы 1.

#### § 4. Граница достижимости для СЭ-ДКБП при конечной длине блока

Используем ту же стратегию случайного кодирования, что и в случае СЭ-АБГШ-канала. Выберем любое распределение на входе  $P_X \in \mathcal{F}_{\mathbf{E}[E_1]}$ . Построим матрицу размера  $M \times n$ , все элементы которой н.о.р. в соответствии с распределением  $P_X$ . Далее доказательство проводится в точности так же, как и для границы достижимости в случае СЭ-АБГШ-канала, заменяя член  $X_i^2$  на  $\Lambda(X_i)$  всюду, где он встречается.

В частности, для получения наилучшей границы можно взять  $P_X^* \in \Gamma$  (где  $\Gamma$  – множество распределений на входе, на которых достигается пропускная способность, содержащихся в  $\mathcal{F}_{\mathbf{E}[E_1]}$ ). Если таких распределений, на которых достигается пропускная способность, много, то можно изменять  $V(P_X^*; W)$ , выбирая распределение  $P_X^*$ . Поэтому рассмотрим

$$V_{ED} = \begin{cases} V_{\min} := \min_{P \in \Gamma} V(P; W), & \text{если } \varepsilon \leq \frac{1}{2\lambda}, \\ V_{\max} := \max_{P \in \Gamma} V(P; W), & \text{если } \varepsilon > \frac{1}{2\lambda}. \end{cases}$$

Сводя все вместе, получаем следующую границу достижимости:

$$\log M^*(\hat{n}, \varepsilon) \geq \hat{n}C_{ED} - \sqrt{\hat{n}}K_{\varepsilon, \lambda}C_{ED} + \sqrt{\hat{n}V_{ED}}\Phi^{-1}(\lambda\varepsilon) - \log \hat{n} + O(1) \quad (36)$$

для всех достаточно больших  $\hat{n}$ . Точный вид этой границы такой:

$$\log M^*(\hat{n}, \varepsilon) \geq \hat{n}C_{ED} - \sqrt{\hat{n}}K_{\varepsilon, \lambda}C_{ED} + \sqrt{\hat{n}V_{ED}}\Phi^{-1}(\lambda\varepsilon) - \log \hat{n} - \log \varepsilon K - \frac{K_{\varepsilon, \lambda}}{2} - \sqrt{V_{ED}}\Phi^{-1}(\lambda\varepsilon)\hat{f}\left[\frac{4\sigma_E^2}{K_{\varepsilon, \lambda}\mathbf{E}[E_1]^2} + 2K + \lambda\right]. \quad (37)$$

## § 5. Обратные теоремы кодирования

В этом параграфе мы приведем общую верхнюю границу на скорости при конечной длине блока для каналов со сбором энергии. Для вывода этих новых границ мы используем методы из [7]. Затем мы применим эти границы к СЭ-АБГШ-каналам и СЭ-ДКБП.

Напомним следующие функции вероятности ошибки  $\beta_\alpha(P, Q)$  (см. [7]).

Определение 2. Для заданных распределений  $P$  и  $Q$  на  $\mathcal{X}$  для  $\alpha \in [0, 1]$  положим

$$\beta_\alpha(P, Q) := \min Q[T = 1] := \min_x \int P_{T|X}(1|x) dQ(x), \quad (38)$$

где минимум берется по всем распределениям ( $P_{T|X}$ ) тестовых функций  $T: \mathcal{X} \rightarrow \{0, 1\}$ , таким что  $P[T = 1] \geq \alpha$ .

По существу это функции вероятности ошибки 2-го рода (принятия гипотезы  $P$ , когда верна  $Q$ ), когда вероятность ошибки 1-го рода меньше  $1 - \alpha$ .

Метаобращение теоремы кодирования, доказанное в [7], является одной из наилучших известных общих верхних границ для любого канала. Этот результат имеет два варианта: один для средней вероятности ошибки, а второй – для максимальной. Отметим, что это границы для одного символа, которые естественно обобщаются для длины блока  $n$ .

Лемма 3 (метаобращение теоремы кодирования (для средней вероятности ошибки)). Для любого  $(M, \varepsilon)$ -кода со средней вероятностью ошибки  $\varepsilon$  справедливо неравенство

$$M \leq \sup_{P_X} \frac{1}{\beta_{1-\varepsilon}(P_{XY}, P_X Q_Y)}$$

для любого распределения на выходе  $Q_Y$ .

Лемма 4 (метаобращение теоремы кодирования (для максимальной вероятности ошибки)). Для любого  $(M, \varepsilon)$ -кода с максимальной вероятностью ошибки  $\varepsilon$



справедливо неравенство

$$M \leq \frac{1}{\beta_{1-\varepsilon}(P_{Y|X=c(\bar{m})}, Q_Y)} \leq \sup_{x \in \mathbb{F}} \frac{1}{\beta_{1-\varepsilon}(P_{Y|X=x}, Q_Y)}$$

для любого распределения на выходе  $Q_Y$  и кодовых слов из множества  $\mathbb{F} \subset \mathcal{X}$ , где  $\mathcal{X}$  – алфавит на входе, а  $c(\bar{m})$  – кодовое слово для сообщения  $\bar{m}$ , удовлетворяющего условию

$$\bar{m} = \arg \min_{m \in [M]} \Pr[\hat{U} = m | U = m] \quad (39)$$

в канале  $Q_Y$ .

Однако не сразу понятно, с помощью какой техники можно включить эффект сбора энергии в приведенное выше выражение. Это связано с тем, что указанное множество  $\mathbb{F}$  (множество ограничений) меняется с изменением энергии. Кроме того, в отличие от традиционных каналов, кодовая книга также будет меняться в зависимости от доступной энергии. Следовательно, любое кодовое слово имеет вид  $c(m, e)$  для сообщения  $m$  и вектора энергии  $e$ .

### Обратная теорема кодирования (общий вид) для каналов со сбором энергии.

В описанной выше постановке задачи со сбором энергии получаем следующие верхние границы.

**Теорема 3.** Для заданных канала со сбором энергии  $W$  и процесса сбора энергии  $E \sim P_E$  с н.о.р. поступлениями любой  $(M, \varepsilon)$ -код (со средней вероятностью ошибки) удовлетворяет неравенству

$$M \leq \sup_{P_{X^n|E^n}} \frac{1}{\beta_{1-\varepsilon}(P_{E^n X^n Y^n}, P_{E^n X^n} Q_{Y^n})}, \quad (40)$$

где

$$P_{E^n X^n Y^n}(e^n, x^n, y^n) = P_{E^n}(e^n) P_{X^n|E^n}(x^n | e^n) W(y^n | x^n),$$

для любого распределения на выходе  $Q_{Y^n}$ . Здесь супремум берется по всем распределениям, удовлетворяющим ограничениям на сбор энергии. В случае максимальной вероятности ошибки имеем

$$M \leq \frac{1}{\beta_{1-\varepsilon}(W(\cdot | c(\bar{m}, *)), P_{E^n}(*), Q_{Y^n} P_{E^n})} \quad (41)$$

для любого распределения на выходе  $Q_{Y^n}$  и кодового слова  $c(\bar{m}, *)$ , для которого сообщение  $\bar{m}$  удовлетворяет условию (39). Здесь  $\cdot$  означает алфавит на выходе, а  $*$  – алфавит энергии.

**Доказательство.** Неравенство (40) доказано в [14]. Доказательство неравенства (41) см. в Приложении А. ▲

Граница (40) использовалась для вывода обратной теоремы кодирования при конечной длине блока для СЭ-АБГШ-каналов, обобщенной на режим поступления энергии н.о.р. блоками [14]. Мы выведем этот же результат для СЭ-АБГШ-каналов при критерии максимальной вероятности ошибки, но с помощью границы (41).

Имеется следующая более слабая, но аналитически более удобная верхняя граница при критерии максимальной вероятности ошибки.

**Теорема 4.** Рассмотрим канал со сбором энергии  $W$ , процесс сбора энергии  $E \sim P_E$  с н.о.р. поступлениями и функцию стоимости  $\Lambda$ , определенную в п. 2.7.

При условии, что каждое кодовое слово  $\mathbf{x}(m, \mathbf{e}^n)$  удовлетворяет ограничению по сбору энергии

$$\sum_{i=1}^n \Lambda(x_i(m, \mathbf{e}^n)) \leq \sum_{i=1}^n e_i \quad (42)$$

для вектора энергии  $\mathbf{e}^n$  и максимальной вероятности ошибки  $\varepsilon$ , справедливо неравенство

$$M \leq \sup_{\mathbf{x}^n \in \mathbb{F}_{\bar{E}_n}} \frac{1}{\beta_{1-\varepsilon-\tau_n}(W(\cdot | \mathbf{x}^n), Q_{Y^n})}, \quad (43)$$

где  $\tau_n = \Pr\left(\sum_{i=1}^n E_i \geq n\bar{E}_n\right)$ ,

$$\mathbb{F}_{\bar{E}_n} = \left\{ \mathbf{x}^n : \sum_{i=1}^n \Lambda(x_i) \leq n\bar{E}_n \right\}, \quad (44)$$

а  $\bar{E}_n$  – неотрицательная последовательность, выбранная так, что  $\tau_n < 1 - \varepsilon$ .

Доказательство см. в Приложении В.  $\blacktriangle$

Для СЭ-АБГШ-каналов имеется хорошая структура, позволяющая получать более точные границы при использовании неравенств (40) или (41). Эти подробности уточняются в доказательстве верхней границы для СЭ-АБГШ-канала. Однако при работе с СЭ-ДКВП такая структура отсутствует. Теорема 4 будет использована для получения полезной верхней границы в этом случае.

## § 6. Верхняя граница для СЭ-АБГШ-каналов при конечной длине блока

Мы утверждаем, что достаточно рассматривать кодовые слова  $\mathbf{x}^n$ , удовлетворяющие условию

$$\sum_{k=1}^n x_k^2 = \sum_{k=1}^n e_k, \quad (45)$$

где  $\mathbf{e}^n$  – вектор энергии. Короче говоря, мы собираемся игнорировать сбои, которые могут произойти при  $1 \leq k < n$ , и будем расходовать всю энергию при передаче в момент времени  $n$ . Возможность первого из этих предположений подтверждается тем, что при этом ограничения только ослабляются, что может лишь увеличить пропускную способность. Таким образом, любая верхняя граница для ослабленной версии будет являться и верхней границей для исходной. Что касается второго предположения, то это хорошо известный трюк с отображением Яглома, когда имея наилучший код длины  $n$ , но удовлетворяющий условию (45) со строгим неравенством ( $<$ ), можно построить новый код с той же вероятностью ошибки, но с длиной кодовых слов  $n + 1$ . Дополнительный символ выбирается таким образом, чтобы исчерпать всю оставшуюся энергию. Этот новый код, очевидно, удовлетворяет условию (45), является верхней границей для исходного кода длины  $n$  и, в свою очередь, ограничивается сверху наибольшим кодом длины  $n + 1$ , удовлетворяющим (45).

Пусть  $0 < \varepsilon < 1$  – фиксированная максимальная вероятность ошибки. Выберем в качестве  $W$  гауссовский канал с дисперсией  $\sigma^2$  и  $Q_{Y^n} = \prod_{i=1}^n Q_Y$ , где  $Q_Y$  – гауссовское распределение со средним 0 и дисперсией  $\mathbf{E}[E_1] + \sigma^2$ . Далее, для распределений  $P_1$

и  $P_2$  и любого  $\gamma > 0$  величина  $\beta_\alpha(P_1, P_2)$  ограничена снизу (см. [7, формула (106)]) как

$$\beta_\alpha(P_1, P_2) \geq \frac{1}{\gamma} \left( \alpha - P_1 \left[ \frac{dP_1}{dP_2} \geq \gamma \right] \right). \quad (46)$$

Из (41) и (46) для любого  $\gamma_n > 0$  имеем

$$M \leq \frac{\gamma_n}{1 - \varepsilon - \Pr \left[ \log \frac{W(\mathbf{Y}^n | \mathbf{x}^n(\bar{\mathbf{m}}, \mathbf{E}))}{Q_{Y^n}} \geq \log \gamma_n \right]}, \quad (47)$$

где вероятность берется относительно распределения  $W(\cdot | \mathbf{x}(\bar{\mathbf{m}}, *)) P_{E^n}(\cdot)$ . Так как здесь  $W$  – гауссовский канал, то можно заменить  $Y_i$  на  $x_i(\bar{\mathbf{m}}, \mathbf{e}) + Z_i$ , где  $Z_i$  – н.о.р.  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ -величины. Тогда вероятность в знаменателе можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} & \Pr \left[ \log \frac{W(\mathbf{Y}^n | \mathbf{x}^n(\bar{\mathbf{m}}, \mathbf{E}))}{Q_{Y^n}} \geq \log \gamma_n \right] = \\ &= \Pr \left[ \sum_{i=1}^n \frac{(x_i(\bar{\mathbf{m}}, \mathbf{E}) + Z_i)^2}{2(\mathbf{E}[E_1] + \sigma^2)} \log_2(e) - \sum_{i=1}^n \frac{Z_i^2}{2\sigma^2} \log_2(e) \geq \log(\gamma_n) - nC_{EG} \right] = \\ &= \Pr \left[ \sum_{i=1}^n \left( \frac{Z_i}{\sigma} - \frac{x_i(\bar{\mathbf{m}}, \mathbf{E})\sigma}{\mathbf{E}[E_1]} \right)^2 \leq \frac{2(\mathbf{E}[E_1] + \sigma^2)}{\mathbf{E}[E_1]} (nC_{EG} - \log \gamma_n) \ln 2 + \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^n x_i^2(\bar{\mathbf{m}}, \mathbf{E}) \left( \frac{\sigma^2}{\mathbf{E}[E_1]^2} + \frac{1}{\mathbf{E}[E_1]} \right) \right] = \\ &= \Pr \left[ \sum_{i=1}^n \left( \frac{Z_i}{\sigma} - \frac{x_i(\bar{\mathbf{m}}, \mathbf{E})\sigma}{\mathbf{E}[E_1]} \right)^2 \leq \frac{2(\mathbf{E}[E_1] + \sigma^2)}{\mathbf{E}[E_1]} (nC_{EG} - \log \gamma_n) \ln 2 + \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^n E_i \left( \frac{\sigma^2}{\mathbf{E}[E_1]^2} + \frac{1}{\mathbf{E}[E_1]} \right) \right], \quad (48) \end{aligned}$$

где (48) вытекает из (45). Далее, рассмотрим эту вероятность при условии  $\mathbf{E} = \mathbf{e}$ , замечая, что  $\mathbf{E}$  не зависит от  $\mathbf{Z}$ . Тогда получим, что эта вероятность является интегральной функцией распределения (ИФР) для нецентрального  $\chi^2$ -распределения с  $n$  степенями свободы и параметром нецентральности

$$B = \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2(\bar{\mathbf{m}}, \mathbf{e})\sigma^2}{\mathbf{E}[E_1]^2} = \sum_{i=1}^n \frac{e_i\sigma^2}{\mathbf{E}[E_1]^2}. \quad (49)$$

ИФР нецентральной случайной  $\chi^2$ -величины  $\hat{Z}$  равна

$$\Pr(\hat{Z} \leq u) = 1 - Q_{n/2}^M(\sqrt{B}, \sqrt{u}), \quad (50)$$

где  $Q_d^M(a, b)$  –  $Q$ -функция Маркума порядка  $d$  (см. [26]). Теперь заметим, что эта ИФР не зависит от индивидуальных значений  $x_i$  или  $e_i$ , а зависит только от суммы всех  $e_i$ . Замена  $x_i(\bar{\mathbf{m}}, \mathbf{E})$  на  $\sqrt{E_i}$  в (48) не изменит эту ИФР. Поэтому из (49) и (50)

получаем, что (48) равно

$$\Pr \left[ \sum_{i=1}^n \left( \frac{Z_i}{\sigma} - \frac{\sqrt{E_i} \sigma}{\mathbf{E}[E_1]} \right)^2 \leq \frac{2(\mathbf{E}[E_1] + \sigma^2)}{\mathbf{E}[E_1]} (nC_{EG} - \log \gamma_n) \ln 2 + \sum_{i=1}^n E_i \left( \frac{\sigma^2}{\mathbf{E}[E_1]^2} + \frac{1}{\mathbf{E}[E_1]} \right) \right]. \quad (51)$$

Это в точности та упоминавшаяся ранее структура, которая позволяет работать с упрощенным выражением. В результате все слагаемые в сумме являются н.о.р. (а не просто независимыми). Переставляя члены подходящим образом, получаем, что (51) равно

$$\Pr \left[ \frac{\sum_{i=1}^n \eta_i}{\sqrt{nV_{EG2}}} \leq \frac{nC_{EG} - \log \gamma_n}{\sqrt{nV_{EG2}}} \right], \quad (52)$$

где  $\eta_i$  – независимые одинаково распределенные величины с нулевым средним и дисперсией

$$V_{EG2} = \frac{\mathbf{E}[E_1]^2 + \mathbf{E}[E_1^2] + 4\sigma^2 \mathbf{E}[E_1]}{4(\mathbf{E}[E_1] + \sigma^2)^2} \log_2^2(e).$$

При этом третий момент для  $\eta_i$  конечен. Применяя теорему Берри–Эссеена (лемма 2) и выбирая

$$\log \gamma_n = nC_{EG} - \sqrt{nV_{EG2}} \Phi^{-1}(\alpha_n),$$

где  $\alpha_n$  выбрана так, что  $0 < \alpha_n < 1 - \varepsilon$ , получаем

$$\Pr \left[ \frac{\sum_{i=1}^n \eta_i}{\sqrt{nV_{EG2}}} \leq \frac{nC_{EG} - \log \gamma_n}{\sqrt{nV_{EG2}}} \right] \leq \alpha_n + \frac{\varkappa}{\sqrt{n}}, \quad (53)$$

где  $\varkappa = \mathbf{E}[|\eta_i|^3]/V_{EG2}^{3/2}$ .

Возьмем  $\alpha_n = 1 - \varepsilon - \frac{2\varkappa}{\sqrt{n}}$ . Для достаточно больших  $n$  имеем  $0 < \alpha_n < 1 - \varepsilon$ .

Из (47), (51) и (53) получаем

$$\log M \leq nC_{EG} - \sqrt{nV_{EG2}} \Phi^{-1}(\alpha_n) - \log(\varkappa/\sqrt{n}).$$

Раскладывая  $\Phi^{-1}$  в ряд Тейлора и оценивая шаги, как в доказательстве границы достижимости из теоремы 1, получаем

$$\log M \leq nC_{EG} + \sqrt{nV_{EG2}} \Phi^{-1}(\varepsilon) + \frac{1}{2} \log n + O(1),$$

что и дает требуемую верхнюю границу.

Для полноты изложения приведем точный вид границы:

$$\log M \leq nC_{EG} + \sqrt{nV_{EG2}} \Phi^{-1}(\varepsilon) + \frac{1}{2} \log n - \log \varkappa + 2\varkappa \sqrt{V_{EG2}} \hat{f}_2, \quad (54)$$

где

$$\hat{f}_2 = \max \left\{ f(\varepsilon), f\left(\varepsilon + \frac{2\varkappa}{\sqrt{n_0}}\right) \right\}, \quad f(x) = \frac{d}{dx} \Phi^{-1}(x),$$

а  $n_0$  – наименьшее  $n$ , при котором  $\varepsilon + \frac{2\kappa}{\sqrt{n}} < 1$ .

### § 7. Верхняя граница для СЭ-ДКБП при конечной длине блока

К сожалению, в этом случае нельзя просто воспроизвести доказательство обратной теоремы кодирования для СЭ-АБГШ-канала, данное в § 6, поскольку в нем эксплуатировалась структура АБГШ-канала, которая в данном случае отсутствует. Однако имеется другая структура, которую можно использовать здесь, а именно метод типов (см. [21]). Будем использовать схему теоремы 4. Пусть задано  $0 < \varepsilon < 1$ , и обозначим дискретный канал рассматриваемого СЭ-ДКБП через  $W(y|x)$ . Случайные величины  $E_i$  (поступающая энергия) предполагаются н.о.р., как и выше.

Напомним определения, данные в (7) и (8). Из (43) имеем

$$M \leq \sup_{\mathbf{x}^n \in \mathbb{F}_{\bar{E}_n}} \frac{1}{\beta_{1-\varepsilon-\tau_n}(W(\cdot|\mathbf{x}^n), Q_{Y^n})}. \quad (55)$$

Возьмем  $\bar{E}_n = \mathbf{E}[E_1] + \delta_n$ , где  $\delta_n > 0$ . Тогда  $\tau_n$  имеет вид

$$\tau_n = \Pr\left(\sum_{i=1}^n E_i \geq n(\mathbf{E}[E_1] + \delta_n)\right). \quad (56)$$

Мы хотим добиться, чтобы  $\tau_n \leq \frac{\varepsilon}{4}$ . Для этого выберем  $\delta_n = \frac{D_\varepsilon}{\sqrt{n}}$ , где  $D_\varepsilon = \sqrt{\frac{4\sigma_E^2}{\varepsilon}}$ , и применим неравенство Чебышева.

Можно представить (55) в виде

$$M \leq \sup_{P \in \mathcal{F}_{\bar{E}_n} \cap \mathcal{P}_n} \sup_{\mathbf{x}^n \in T_P} \frac{1}{\beta_{1-\varepsilon-\tau_n}(W(\cdot|\mathbf{x}^n), Q_{Y^n})}, \quad (57)$$

где через  $T_P$  обозначен тип класса распределения  $P$ , а  $\mathcal{P}_n$  – множество всех типов для последовательностей длины  $n$ . Рассмотрим внутренний супремум

$$\sup_{\mathbf{x}^n \in T_P} \frac{1}{\beta_{1-\varepsilon-\tau_n}(W(\cdot|\mathbf{x}^n), Q_{Y^n})}.$$

Здесь значение  $\beta$ -функции вероятности ошибки не зависит от того, какая именно последовательность  $\mathbf{x}$  выбирается, при условии, что последовательности имеют одинаковый тип [7] и  $Q_{Y^n} = \prod_{k=1}^n Q_Y$  для некоторого распределения  $Q_Y$  на  $\mathcal{Y}$ . Поэтому выбираем любую последовательность  $\mathbf{x}$  из  $T_{P_0}$ , где  $P_0 \in \mathcal{F}_{\bar{E}_n} \cap \mathcal{P}_n$ .

Пусть  $Q_Y = P_0 W$ . Напомним теорему 48 работы [7] для стандартных, неэкзотических ДКБП. Хотя в ней была дана граница для максимального подкода типа  $P_0$  максимального кода, заметим, что на самом деле граница дается на значение  $\beta$ -функции вероятности ошибки, как указано далее.

Лемма 5. Для  $0 < \varepsilon < 1$ , всех  $P_0 \in \mathcal{P}_n$ ,  $\mathbf{x} \in T_{P_0}$  и достаточно больших  $n$  справедливо неравенство

$$-\log \beta_{1-\varepsilon}(W^n(\cdot|\mathbf{x}), (P_0 W)^n) \leq nC_D + \sqrt{nV_D} \Phi^{-1}(\varepsilon) + \frac{1}{2} \log n + O(1),$$

где

$$V_D = \begin{cases} V_{\min} = \min_{P \in \Gamma} V(P; W), & 0 < \varepsilon \leq 1/2, \\ V_{\max} = \max_{P \in \Gamma} V(P; W), & 1/2 < \varepsilon < 1, \end{cases}$$

$\Gamma$  – множество распределений, на которых достигается пропускная способность.

Заметим, что величина в правой части не зависит от распределения данного типа. Поэтому, если сделать следующие изменения:

1. Заменить  $\Gamma$  на

$$\Gamma_{\overline{E}_n} = \{P \in \mathcal{F}_{\overline{E}_n} : I(P; W) = C_{ED}\}. \quad (58)$$

Это можно сделать, поскольку внешний супремум в (57) берется по  $\mathcal{F}_{\overline{E}_n}$ . Заметим, что в оригинальном доказательстве леммы 5 использовался тот факт, что множество  $\Gamma$  компактно и выпукло. Эти свойства выполнены и для  $\Gamma_{\overline{E}_n}$ , поэтому можно использовать это множество всюду, где использовалось  $\Gamma$ ;

2. Последний супремум, дававший равномерную (по распределениям на входе) границу, брался по множеству  $\mathcal{P}$ . Здесь мы заменяем его на  $\mathcal{F}_{\overline{E}_n}$ ;

3. Заменить  $\varepsilon$  на  $\varepsilon + \tau_n$ ;

то получим

$$\log M^*(n, \varepsilon) \leq nC_D(\overline{E}_n) + \sqrt{n\widehat{V}(\overline{E}_n)}\Phi^{-1}(\varepsilon + \tau_n) + O(\log(n)), \quad (59)$$

где  $C_D(\cdot)$  определено в (9) и

$$\widehat{V}(\overline{E}_n) = \begin{cases} V_{\min}^{(n)} = \min_{P \in \Gamma_{\overline{E}_n}} V(P; W), & 0 < \varepsilon + \tau_n \leq 1/2, \\ V_{\max}^{(n)} = \max_{P \in \Gamma_{\overline{E}_n}} V(P; W), & 1/2 < \varepsilon + \tau_n < 1. \end{cases} \quad (60)$$

Границу (59) можно упростить дальше, рассматривая разложения функций  $C_D(\overline{E}_n)$ ,  $\widehat{V}(\overline{E}_n)$  и  $\Phi^{-1}(u)$ .

Итак,  $C_D(a)$  – неубывающая вогнутая функция (см. [21]). Поэтому для любых  $a > 0$ ,  $b > 0$  справедливо

$$C_D(a + b) \leq C_D(a) + bC'_D(a),$$

где  $C'_D(\cdot)$  – производная функции  $C_D(a)$ . Положим  $a = \mathbf{E}[E_1]$  и  $b = \delta_n$ . Заметим, что в этом случае  $C'_D(a)$  – постоянная, поскольку  $\mathbf{E}[E_1]$  – константа.

Используя разложение в ряд Тейлора, получаем, что для некоторой константы  $K_\varepsilon$  справедливо

$$\Phi^{-1}(\varepsilon + \tau_n) \leq \Phi^{-1}(\varepsilon) + \tau_n K_\varepsilon.$$

Пусть теперь  $\varepsilon_R$  – корень уравнения

$$\Phi^{-1}(\varepsilon) + \frac{K_\varepsilon \varepsilon}{4} = 0.$$

Возьмем любое  $\eta > 0$ . Заметим, что для достаточно больших  $n$  выполнено  $\Gamma_{\overline{E}_n} \subset \mathcal{C}_{\mathbf{E}[E_1] + \eta}$ . Поэтому можно заменить  $\widehat{V}(\overline{E}_n)$  на

$$V_\varepsilon^*(\eta) = \begin{cases} \min_{P \in \mathcal{C}_{\mathbf{E}[E_1] + \eta}} V(P; W), & 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_R, \\ \max_{P \in \mathcal{C}_{\mathbf{E}[E_1] + \eta}} V(P; W), & \varepsilon_R < \varepsilon < 1. \end{cases}$$

Заметим, что  $C_D(\mathbf{E}[E_1]) \equiv C_{ED}$ . Таким образом, для достаточно больших  $n$  имеем

$$\log M^*(n, \varepsilon) \leq nC_{ED} + \sqrt{n}C'(\mathbf{E}[E_1])D_\varepsilon + \sqrt{nV_\varepsilon^*(\eta)} \left( \Phi^{-1}(\varepsilon) + \frac{K_\varepsilon \varepsilon}{4} \right) + O(\log n).$$

В отличие от предыдущих случаев здесь мы не приводим никакой точной границы. Это происходит потому, что исходные границы для ДКБП в [7] были даны с неизвестными константами в члене  $O(1)$ .

## § 8. Начальная и остаточная энергия

В нашем анализе рассматривается передача одного сообщения, что является вполне обычным в теории информации [19], как и в теоретико-информационных рассмотрениях систем со сбором энергии [11, 12]. На практике передается много сообщений, и в начале передачи некоторых сообщений имеется некоторая случайная остаточная энергия. Если емкость буфера конечна, то с положительной вероятностью эта остаточная энергия будет нулевой. Таким образом, наши границы соответствуют наихудшему сценарию, когда в буфере нет начальной энергии. Во-вторых, если в накопителе энергии имеется некоторая остаточная энергия  $e_0$ , то в случае  $e_0 > E_{0n}$  не требуется ждать, пока накопится энергия  $E_{0n}$ . Однако чтобы учесть общий случай передачи нескольких сообщений, мы при любой энергии  $e_0$  будем оставлять блок из  $N_n$  промежутков времени до начала передачи (в противном случае из-за случайного характера величины  $e_0$  придется изменять структуру этих промежутков и стратегии кодирования/декодирования для передачи каждого сообщения). При выводе нижних границ нужно иметь в виду следующие шаги.

1. Как и ранее, в фазе накопления энергия накапливается в течение  $N_n$  промежутков времени. Единственная разница состоит в том, что пороговое значение энергии увеличивается до  $E_{0n} + e_0$ . Однако формула (17) не изменяется, поскольку мы по-прежнему ставим цель накопить энергию  $E_{0n}$ ;
2. Величины  $V_i$  теперь выбираются гауссовскими с дисперсией  $\mathbf{E}[E_1] + e_0/n$ . В формуле (19) величина  $\mathcal{A}_n$  заменяется на  $\mathcal{A}'_n$ , которая отличается от  $\mathcal{A}_n$  только тем, что  $E_{0n}$  заменяется на  $E_{0n} + e_0$ . Положим

$$\mathcal{B}_n = \bigcap_{\ell=1}^n \{(\mathbf{v}^n, \mathbf{e}^n) : s'_\ell \geq -E_{0n}\}, \quad (61)$$

где  $s'_\ell = \sum_{k=1}^{\ell} (e_k - v_k^2 + e_0/n)$ . Очевидно, все слагаемые в этой сумме н.о.р. с нулевым средним, как и требуется в неравенстве Колмогорова, и  $\mathcal{B}_n \subset \mathcal{A}'_n$ . В оценке для  $\Pr(\mathcal{E}_1)$  никаких изменений не происходит.

С учетом этих изменений можно показать, что

$$\log M^*(n, \varepsilon) \geq nC_{EG}^{(n)} + \sqrt{n} \left[ \sqrt{V_{EG}^{(n)}} \Phi^{-1}(\lambda\varepsilon) - K_{\varepsilon, \lambda} C_{EG}^{(n)} \right] - \log n + O(1), \quad (62)$$

где

$$C_{EG}^{(n)} = \frac{1}{2} \log \left( 1 + \frac{\mathbf{E}[E_1] + e_0/n}{\sigma^2} \right), \quad V_{EG}^{(n)} = \frac{\mathbf{E}[E_1] + e_0/n}{\mathbf{E}[E_1] + \sigma^2 + e_0/n} \log_2^2(e).$$

Точная граница имеет вид

$$\begin{aligned} \log M^*(n, \varepsilon) &\geq nC_{EG} + \sqrt{n} \left[ \sqrt{V_{EG}} \Phi^{-1}(\lambda\varepsilon) - K_{\varepsilon, \lambda} C_{EG} \right] - \log n + \frac{e_0 K_{\varepsilon, \lambda}}{2\sigma^2 \sqrt{n}} - \\ &- \log \varepsilon K - \frac{K_{\varepsilon, \lambda}}{2} - \sqrt{V_{EG}} \Phi^{-1}(\lambda\varepsilon) \hat{f} \left[ \frac{4\sigma_E^2}{K_{\varepsilon, \lambda} \mathbf{E}[E_1]^2} + 2K + \lambda \right]. \end{aligned} \quad (63)$$

Граница для СЭ-ДКБП аналогична границе (36), но с заменой  $\mathbf{E}[E_1]$  на  $\mathbf{E}[E_1] + e_0/n$ . Заметим, что можно было бы и дальше упрощать выражение, выделяя члены с  $e_0/n$  из членов первого и второго порядка и собирая их в  $O(1)$ . Однако нам было важно

показать влияние начальной энергии, состоящее в том, что границы улучшаются, как и достижимая скорость.

При рассмотрении верхних границ будем предполагать, что перед началом передачи в накопителе энергии предварительно собрано некоторое детерминированное количество энергии, скажем,  $e_0$ . В качестве примера рассмотрим вывод обратной теоремы кодирования для СЭ-АБГШ-каналов. Заменяем  $\sum_{k=1}^n e_k$  в (45) на  $e_0 + \sum_{k=1}^n e_k$ . Положим  $\bar{E}_n = \mathbf{E}[E_1] + e_0/n$ . В качестве  $Q_Y$  возьмем  $\mathcal{N}(0, \bar{E}_n)$ . Дальше вплоть до (48) выполняются аналогичные шаги, но с указанными заменами. В (51) заменяем  $E_i$  на  $E_i + e_0/n$ , что не влияет на ИФР в данном случае. Отсюда получаем

$$\log M^*(n, \varepsilon) \leq nC_{EG}^{(n)} + \sqrt{nV_{EG2}^{(n)}}\Phi^{-1}(\varepsilon) + \frac{1}{2} \log n - \log \varkappa + 2\varkappa\sqrt{V_{EG2}^{(n)}\hat{f}_2}, \quad (64)$$

где

$$V_{EG2}^{(n)} = \frac{2\bar{E}_n^2 + \sigma_E^2 + 4\sigma^2\bar{E}_n}{4(\bar{E}_n + \sigma^2)^2} \log_2^2(e).$$

Далее, имеем

$$C_{EG}^{(n)} \leq C_{EG} + \frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{e_0}{n\sigma^2}\right)$$

и

$$|V_{EG2}^{(n)} - V_{EG2}| \leq \frac{c_v e_0}{n}$$

для некоторой неотрицательной константы  $c_v$ . Таким образом, верхняя граница изменяется лишь в члене  $O(1)$ . Это не означает, что начальная энергия практически не оказывает никакого воздействия, а скорее значит, что с ростом  $n$  ее влияние значительно уменьшается; например, если  $e_0 = O(n)$ , то она будет влиять на член первого порядка. В обратной теореме кодирования для СЭ-ДКБП происходит то же самое, когда мы заменяем  $E_i$  на  $E_i + e_0/n$ . Член с  $e_0$  поглощается в определении  $\delta_n$ , данном в (56). Это снова приводит лишь к изменениям в  $O(1)$ , и наши границы остаются верными. Тем самым, мы заключаем, что начальная детерминированная энергия, накопленная в буфере, не влияет на члены первого и второго порядков в границах достижимости и верхних границах.

**Остаточная энергия.** В предыдущих рассуждениях количество начальной энергии предполагалось фиксированным. На практике, когда посылается несколько сообщений одно за другим, остаточное количество энергии после каждой успешной передачи изменяется случайным образом. Как и ранее, рассмотрим постановку задачи для СЭ-АБГШ-канала с  $n$  интервалами для передачи и фиксированной максимальной вероятностью ошибки  $\varepsilon$ . Для каждого сообщения, как и ранее, имеются фазы накопления и передачи. В дальнейшем будем предполагать, что если в течение передачи сообщения в некоторый момент энергии не хватило, то передача этого сообщения прекращается и оно возвращается передатчику. Однако энергия, накапливаемая в течение *оставшейся* части этого промежутка, сохраняется и будет использована при передаче следующего сообщения. В дальнейшем будем обозначать энергию, оставшуюся после передачи в  $\ell$ -м промежутке, через  $R_\ell$ . Выведем для нее оценки снизу  $r_\ell$ .

Определим случайную последовательность  $r_\ell$  следующим образом. Положим  $r_0 = e_0$  для начальной энергии  $e_0$  в начале промежутка  $\ell = 1$ . Тогда  $r_\ell$  для  $\ell \geq 1$  изменятся по закону

$$r_\ell = (r_{\ell-1} + \zeta_\ell)^+, \quad (65)$$



где

$$\zeta_\ell = \sum_{k=1}^{n+N_n} E_{(\ell-1)(n+N_n)+k} - \sum_{j=1}^n \Lambda(X_{(\ell-1)(n+N_n)+j}),$$

а  $\Lambda(\cdot)$  – функция энергии, описанная ранее для СЭ-ДКБП и для СЭ-АБГШ-каналов,  $\Lambda(x) = x^2$ . Кроме того,  $\mathbf{E}[\zeta_\ell] = (n + N_n) \mathbf{E}[E_1] - nP$  при  $1 \leq \ell \leq L$ , где предполагается, что входы канала  $X_i$  – н.о.р. случайные величины с конечным средним и  $\mathbf{E}[\Lambda(X_i)] = P$ , где  $P$  будет выбрано позже. Можно показать, что  $r_\ell \leq R_\ell$  для  $\ell \geq 1$ . Соотношение (65) – это уравнение Линдли, хорошо известное при изучении систем массового обслуживания с очередями GI/GI/1 (см. [27]). Поэтому  $r_\ell$  будет иметь стационарное распределение, если  $\mathbf{E}[\zeta_1] < 0$ . Однако для наших целей работа в таком режиме не дает ничего. Вместо этого мы будем выбирать  $\mathbf{E}[\zeta_1] > 0$ , но достаточно близкое к 0, благодаря чему

$$P \leq \left(1 + \frac{N_n}{n}\right) \mathbf{E}[E_1].$$

При таком выборе мы остаемся в описанных выше условиях и можем применять все приведенные выше результаты. Более того, остаточная энергия  $r_\ell$  будет стремиться к  $\infty$  с ростом  $\ell$ . Из [28] получаем, что для  $r_\ell$  справедливо

$$\frac{r_\ell}{\ell} \xrightarrow{p} \mathbf{E}[\zeta_1], \quad \frac{r_\ell - \ell \mathbf{E}[\zeta_1]}{\sqrt{\ell} \sigma_\zeta} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1) \quad (66)$$

при  $\ell$ , стремящемся к бесконечности, где  $\sigma_\zeta^2 = \text{Var}(\zeta_1)$ . Таким образом, при достаточно больших  $\ell$  можно считать, что  $e_0 = r_\ell \approx \ell \mathbf{E}[\zeta_1] - a\sqrt{\ell} \sigma_\zeta$ , где  $a$  выбирается достаточно большим, чтобы событие  $\frac{r_\ell - \ell \mathbf{E}[\zeta_1]}{\sqrt{\ell} \sigma_\zeta} \geq -a$  имело большую вероятность.

Используя вышеупомянутые границы, зависящие от  $e_0$ , можно вывести нижнюю границу для остаточной энергии. У нас имеются дальнейшие улучшения этой аппроксимации, но для краткости изложения эти подробности мы опускаем.

## § 9. Асимптотика умеренных уклонений

В этом параграфе обсуждаются границы на асимптотическое поведение умеренных уклонений для СЭ-АБГШ-канала и СЭ-ДКБП. Здесь, в отличие от анализа вторых приближений в предыдущих параграфах, мы позволяем вероятности ошибки стремиться к нулю как функции от длины блока  $n$ . Однако так мы будем поступать в режиме умеренных уклонений, который формально определяется следующим образом (см. [16]).

**Определение 3** (коэффициент умеренных уклонений). Для заданного канала  $W$  пусть  $\rho_n$  – последовательность неотрицательных вещественных чисел, такая что  $\rho_n \rightarrow 0$  и  $n\rho_n^2 \rightarrow \infty$ . Тогда для кодов объема  $M_n$ , такого что  $\log M_n = n(C - \rho_n)$ , где  $C$  – пропускная способность канала, коэффициентом умеренных уклонений (КУУ)  $\xi$  называется предел (если он существует)

$$\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \varepsilon(n)}{n\rho_n^2},$$

где  $\varepsilon(n)$  – вероятность ошибки как функция длины блока  $n$ .

Для каналов без памяти с дисперсией канала  $V > 0$  в [16] было показано, что коэффициентом умеренных уклонений является  $\xi = -\frac{1}{2V}$ . В случае каналов со сбо-

ром энергии он устроен более сложно. Это происходит благодаря тому, что точное значение дисперсии не известно, а также в силу того, что каналы со сбором энергии на самом деле не являются каналами без памяти из-за наличия вектора энергии. Однако в их составе имеется подсистема без памяти, и именно этот факт мы все время использовали в нашем анализе.

**9.1. КУУ для СЭ-АБГШ-каналов.** Сформулируем теорему, дающую границу на КУУ для СЭ-АБГШ-каналов.

*Теорема 5. Для СЭ-АБГШ-канала, в котором процесс поступления энергии  $E_i$  – н.о.р. с дисперсией  $\sigma_E^2$ , КУУ удовлетворяет следующим неравенствам:*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \varepsilon(n)}{n\rho_n^2} \geq -\frac{1}{2V_{EG2}}, \quad (67)$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \varepsilon(n)}{n\rho_n^2} \leq -\frac{1}{2V_{EG}}, \quad (68)$$

где  $V_{EG}$  определено в (11), а  $V_{EG2}$  – в (12).

*Доказательство.* Для доказательства (67) рассмотрим неравенство (47) с заменой  $\varepsilon$  на  $\varepsilon(n)$ , которое перепишем следующим образом:

$$\varepsilon(n) \geq \Pr \left[ \log \frac{W(\mathbf{Y}^n | \mathbf{x}^n(\bar{\mathbf{m}}, \mathbf{E}))}{Q_{Y^n}} \leq \log \gamma_n \right] - \frac{\gamma_n}{M}.$$

Кроме того, из (52) вытекает

$$\Pr \left[ \log \frac{W(\mathbf{Y}^n | \mathbf{x}^n(\bar{\mathbf{m}}, \mathbf{E}))}{Q_{Y^n}} \leq \log \gamma_n \right] = \Pr \left[ \sum_{i=1}^n \eta_i \geq nC_{EG} - \log \gamma_n \right].$$

Теперь положим  $\log M = n(C_{EG} - \rho_n)$  и  $\log \gamma_n = n(C_{EG} - \alpha\rho_n)$  для любого  $\alpha > 1$ . Из [29, теорема 3.7.1] получаем

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \Pr \left[ \sum_{i=1}^n \eta_i \geq nC_{EG} - \log \gamma_n \right]}{n\rho_n^2} \geq -\inf_{x \geq \alpha} \frac{x^2}{2V_{EG2}} = -\frac{\alpha^2}{2V_{EG2}},$$

откуда, замечая, что  $V_{EG2}$  является дисперсией  $\eta_i$ , и устремляя  $\alpha \rightarrow 1$ , получаем (67).

Для доказательства границы (68) требуется модифицировать некоторые из наших аргументов, использовавшихся при обсуждении схемы накопления и передачи. Это связано с тем, что мы хотим показать существование кодов с  $\log M = n(C_{EG} - \rho_n)$ . До сих пор анализ проводился так, чтобы работать с оптимальным порядком  $\sqrt{n}$ , но теперь это не так, поскольку  $\rho_n > 1/\sqrt{n}$ .

Вспомним события  $\mathcal{E}_0$  и  $\mathcal{E}_1$ , введенные, соответственно, в (17) и (20), и покажем, что при подходящем выборе  $N_n$  и  $E_{0n}$  можно добиться того, чтобы

$$\Pr(\mathcal{E}_0) + \Pr(\mathcal{E}_1) \leq \frac{\varepsilon(n)}{2}.$$

Для этого выбираем

$$N_n = \max \left\{ \frac{16\sigma_E^2}{\varepsilon(n) \mathbf{E}[E_1]^2}, \frac{4\sqrt{n(2\mathbf{E}[E_1]^2 + \sigma_E^2)}}{\mathbf{E}[E_1]\sqrt{\varepsilon(n)}} \right\}.$$

Очевидно,  $N_n \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ , и при этом как  $\Pr(\mathcal{E}_0)$ , так и  $\Pr(\mathcal{E}_1)$  ограничены сверху величиной  $\varepsilon(n)/4$ .

Следовательно, вероятность ошибки  $\varepsilon(n)$  ограничена величиной

$$\varepsilon(n) \leq \frac{\varepsilon(n)}{2} + \Pr \left[ \log \left( \frac{W^n(\mathbf{Y}^n | \mathbf{X}^n)}{P_{\mathbf{Y}^n}(\mathbf{Y}^n)} \right) \leq \log \gamma_n \right] + \frac{M}{\gamma_n},$$

$$\frac{\log(\varepsilon(n)/2)}{n\rho_n^2} \leq \frac{1}{n\rho_n^2} \log \left[ \Pr \left\{ \sum_{i=1}^n G_i \leq \log \gamma_n \right\} + 2^{-(1-\alpha)n\rho_n} \right].$$

Теперь положим  $\log \gamma_n = n(C_{EG} - \alpha\rho_n)$ , где  $\alpha < 1$  и  $\log M = n(C_{EG} - \rho_n)$ . Коды такого объема существуют согласно лемме Файнштейна. Тогда из (25) и [29, теорема 3.7.1] получаем

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\rho_n^2} \log \Pr \left\{ \sum_{i=1}^n G_i \leq \log \gamma_n \right\} \leq - \inf_{x \leq -\alpha} \frac{x^2}{2V_{EG}} = -\frac{\alpha^2}{2V_{EG}}. \quad (69)$$

Полагая  $\alpha \rightarrow 1$ , приходим к (68).  $\blacktriangle$

**9.2. КУУ для СЭ-ДКБП.** Границы на КУУ для СЭ-ДКБП должны быть аналогичны границам для СЭ-АБГШ-канала. Однако поскольку  $V_{ED}$  изменяется при разном выборе  $\lambda$ , требуются некоторые уточнения.

*Теорема 6. Для СЭ-ДКБП справедливы следующие границы на КУУ:*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \varepsilon(n)}{n\rho_n^2} \geq - \inf_{\eta > 0} \frac{1}{2V_{\min, \eta}}, \quad (70)$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \varepsilon(n)}{n\rho_n^2} \leq -\frac{1}{2V_{\min}}, \quad (71)$$

где

$$V_{\min} = \min_{P \in \Gamma_{\mathbf{E}[E_1]}} V(P; W), \quad V_{\min, \eta} = \min_{P \in \Gamma_{\mathbf{E}[E_1] + \eta}} V(P; W),$$

а  $\Gamma$  – множество распределений на входе, на которых достигается пропускная способность, принадлежащих множеству  $\mathcal{F}_{\mathbf{E}[E_1]}$ .

*Доказательство.* Граница (70) вытекает из [16, теорема 6] при следующих изменениях:

1. Распределения должны быть допустимыми, т.е. принадлежать  $\mathcal{F}_{\bar{E}_n}$ ;
2. Следует заменить  $\varepsilon(n)$  на  $\varepsilon(n) + \tau_n$ . Но в нашей конструкции  $\tau_n < \varepsilon(n)/4$ . Поэтому это то же самое, что и заменить  $\varepsilon(n)$  на  $\frac{5}{4}\varepsilon(n)$ .

Для доказательства (71) заметим, что все шаги очень похожи на шаги в доказательстве (68). Для начала выбираем распределение  $P_X$ , на котором достигается пропускная способность, и выполняем точно такие же действия, как и раньше. Получаем

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \varepsilon(n)}{n\rho_n^2} \leq -\frac{1}{2V(P_X; W)}.$$

Поскольку это верно для любого  $P_X \in \Gamma$ , самая точная граница получается при замене  $V(P_X; W)$  на  $V_{\min}$ .  $\blacktriangle$

## § 10. Обсуждение и сравнение с предыдущими результатами

**10.1. Сравнение с [14].** В работе [14] рассматривался вариант СЭ-АБГШ-канала, в котором энергия поступает блоками. В этой модели каждый блок имеет длину  $L$ , и процесс поступления н.о.р. поблочно. Внутри блока все поступления одинаковы. Изучалось влияние на скорости при конечной длине блока в случаях постоянного  $L$ , а также  $L$ , растущего сублинейно по  $n$  (т.е.  $L = \omega(1)$ ). Для средней вероятности ошибки  $0 \leq \varepsilon < 1/2$  было показано, что для такого СЭ-АБГШ-канала с блоковым поступлением энергии при постоянном  $L$ , достаточно больших  $n$  и единичной дисперсии шума справедливо

$$C_{EG} + V_{\varepsilon}^{-} \sqrt{\frac{L}{n}} - o\left(\sqrt{\frac{L}{n}}\right) \leq \frac{1}{n} M^*(n, \varepsilon) \leq C_{EG} + V_{\varepsilon}^{+} \sqrt{\frac{L}{n}} + o\left(\sqrt{\frac{L}{n}}\right), \quad (72)$$

где

$$V_{\varepsilon}^{-} = \sup_{0 < \lambda < 1} -C_{EG} \sqrt{2 \left( \frac{\mathbf{E}[E_1^2]}{\mathbf{E}[E_1]^2} + 1 \right) \log \frac{1}{\lambda \varepsilon}} + \sqrt{\frac{\mathbf{E}[E_1](\log e)^2}{L(1 + \mathbf{E}[E_1])} \Phi^{-1}((1 - \lambda)\varepsilon)}, \quad (73)$$

$$V_{\varepsilon}^{+} = \frac{\log e}{2(1 + \mathbf{E}[E_1])} \sqrt{\sigma_E^2 + \frac{2 \mathbf{E}[E_1](\mathbf{E}[E_1] + 2)}{L}} \Phi^{-1}(\varepsilon). \quad (74)$$

Модель СЭ-АБГШ-канала, рассмотренная нами, по существу такая же, что и в [14], но у нас  $L = 1$ , и при этом в [14] рассматривался только критерий средней вероятности ошибки. При сравнении этого результата с (11) видно, что выражения совпадают за исключением первого члена, в котором содержится  $\log \frac{1}{\lambda \varepsilon}$  вместо нашего  $\frac{2}{\lambda \varepsilon}$ . Таким образом, здесь коэффициенты вторых приближений несколько точнее наших. Что же касается выражения для  $V_{\varepsilon}^{+}$ , мы повторили его в точности, поскольку в этом случае использовалось альтернативное доказательство. В терминах техники доказательства в нашем случае мы разбили ограничения по сбору энергии на две части, а именно фазу сбора энергии и фазу передачи, и рассматривали их по отдельности (с помощью неравенства Колмогорова), в то время как в [14] они рассматривались вместе с помощью производящих функций моментов. Кроме того, в [14] использовалась гауссовость канала для упрощения выражений как в границе достижимости, так и в обратной теореме кодирования.

**10.2. Альтернативная обратная теорема кодирования для СЭ-АБГШ-канала с использованием результатов работ [7, 18].** Метод модификации метаобращения теоремы кодирования из работы [7], который мы применили для канала со сбором энергии, применялся также в [18, Приложение III] для анализа квазистатических АБГШ-каналов с замиранием. Хотя мы и не смогли применить этот метод непосредственно из-за очень больших различий между рассматриваемыми моделями, наш подход в некотором смысле навеян им. Приведем также набросок альтернативного вывода верхней границы, предложенного рецензентом настоящей статьи.

В предположении средней вероятности ошибки  $\varepsilon$  пусть  $\varepsilon(E^n)$  – средняя вероятность ошибки при заданной реализации энергии  $E^n$ . Заметим, что граница при средней вероятности ошибки будет ограничивать сверху границу при максимальной вероятности ошибки. Полагая  $\bar{E}_n = \sum_{i=1}^n E_i/n$  и замечая, что условие на сбор энергии, при котором не происходит сбоя, равносильно  $\sum_{i=1}^n X_i^2 \leq n\bar{E}_n$ , при фиксированном большом  $n$  согласно [7] получаем

$$\varepsilon(E^n) \geq \Phi \left( \frac{\log M - nC(\bar{E}_n) - 1/2 \log n - K(\bar{E}_n)}{\sqrt{nV(\bar{E}_n)}} \right). \quad (75)$$

Вычисление математического ожидания относительно распределения  $E^n$  в соотношении (75) должно привести к желаемой обратной теореме кодирования. Получаем

$$\varepsilon \geq \mathbf{E} \Phi \left( \frac{\log M - nC(\bar{E}_n) - 1/2 \log n - K(\bar{E}_n)}{\sqrt{nV(\bar{E}_n)}} \right). \quad (76)$$

Чтобы внести математическое ожидание под знак функции  $\Phi$ , заметим, что для любой вещественнозначной случайной величины  $U$  справедливо

$$\mathbf{E} \Phi \left( \frac{U+a}{b} \right) = \Pr(U \geq bz - a) = \int_{-\infty}^{\infty} f_Z(z) \Pr(U \geq bz - a) dz, \quad (77)$$

где  $Z \sim N(0, 1)$ . Если  $U$  – независимая гауссовская величина с нулевым средним и дисперсией  $\sigma_U^2$ , то (77) равно  $\Phi\left(\frac{a}{\sqrt{b^2 + \sigma_U^2}}\right)$ . С помощью разложения в ряд Тейлора по  $V(\bar{E}_n)$ , соотношения (77) и теоремы Берри – Эссеена неравенство (76) приводится к виду

$$\varepsilon \geq \mathbf{E} \Phi \left( \frac{\log M - nC(\bar{E}_n) - 1/2 \log n - K(\bar{E}_n)}{\sqrt{nV_{EG2}}} \right) - \frac{c_1(\mathcal{E}[E_1])}{n^{1/3}} \quad (78)$$

для постоянной  $c_1(\mathcal{E}[E_1])$ , не зависящей от  $n$ . Применяя неравенство

$$C(\bar{E}_n) \leq C_{EG} + \frac{\bar{E}_n - \mathbf{E}[E_1]}{2(\mathbf{E}[E_1] + \sigma^2)}$$

и равномерную оценку для  $K(\bar{E}_n)$ , получаем верхнюю границу

$$\begin{aligned} \log M &\leq nC(P) + \sqrt{nV_{EG}} \Phi^{-1} \left( \varepsilon + \frac{c_1(\mathbf{E}[E_1])}{n^{1/3}} + \frac{c_2}{\sqrt{n}} \right) + 0,5 \log n + O(1) \leq \\ &\leq nC(P) + \sqrt{nV_{EG}} \Phi^{-1}(\varepsilon) + n^{1/6} c_1(\mathbf{E}[E_1]) + 0,5 \log n + O(1), \end{aligned} \quad (79)$$

что слабее, чем (12). Кроме того, в этом доказательстве неявно используются свойства структуры гауссовского канала, которые нельзя напрямую применить к СЭ-ДКБП. Однако это дает прямой способ получения верхних границ (не обязательно наилучших) на скорости для каналов специального вида (таких как каналы с замораживанием) при наличии АБГШ; дальнейшие подробности см. в [18].

## § 11. Численные результаты

Здесь мы представляем в виде графиков результаты вычислений границ при конечной длине блока для скорости, а также для для числа интервалов времени, необходимых для фазы накопления в схеме накопления и передачи, в зависимости от длины блока. Для вычислений этих величин использовались выведенные выше формулы при конкретных наборах значений параметров. Для случая СЭ-ДКБП описаны двоичный симметричный канал (ДСК) и двоичный канал со стиранием (ДКС) со сбором энергии, и для них построены графики соответствующих границ. Отметим, что на всех графиках не учитывались постоянные члены в границах для скоростей, т.е. коэффициенты в  $O(1/n)$ . Кроме этого, наши результаты сравнивались с нижними границами при конечной длине блока для эквивалентного канала без сбора энергии. Например, в случае СЭ-АБГШ-канала рассматривался АБГШ-канал с ограничением на среднюю мощность  $\mathbf{E}[E_1]$ , а в случае СЭ-ДКБП – соответствующие ДКБП с ограничением по мощности  $\mathbf{E}[E_1]$ . В случаях, когда нижняя граница

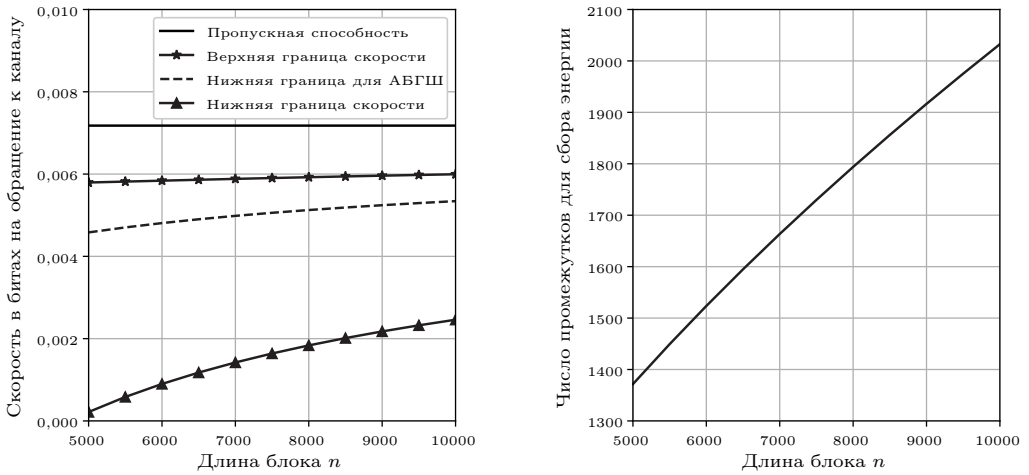


Рис. 2. Графики скоростей для СЭ-АБГШ-канала в зависимости от общей длины блока (сбор энергии плюс передача) в режиме низких ОСШ. На втором графике показано число промежутков времени, необходимых для сбора энергии

для эквивалентного канала оказывается выше верхней границы для канала со сбором энергии, это позволяет сделать выводы о влиянии сбора энергии на скорость. В дальнейшем под разрывом между скоростями мы подразумеваем эту разность между границами, деленную на верхнюю границу и выраженную в процентах.

**11.1. Результаты для СЭ-АБГШ-канала.** Выбираются максимальная вероятность ошибки  $\varepsilon = 0,1$ ,  $E[E_1] = 1$  и  $\sigma_E^2 = 5$ . Длины блока  $n$  берутся в промежутке от 5000 до 10000. Рассматриваются три различных режима:

1. Низкие ОСШ ( $-20$  дБ). В этом режиме (рис. 2) видно, что нижняя граница дает плохое приближение к скорости при конечной длине блока. Из-за большего количества ошибок в этом режиме требуется также большее количество промежутков времени для сбора энергии (примерно от 20,5% до 27,6%), чтобы снизить ошибки, вызываемые сбоями.
2. Умеренные ОСШ (0 дБ). По сравнению с низкими ОСШ этот режим (см. рис. 3) дает лучшее приближение к скорости при конечной длине блока. Разрыв между скоростями значительно снижается и составляет примерно от 19% до 27%. При этом число промежутков времени в фазе накопления также значительно снижается (от 16% до 22%).
3. Высокие ОСШ (20 дБ). В этом режиме (рис. 4) разрыв между скоростями составляет примерно от 18,2% до 24,2%, а число промежутков времени в фазе накопления находится между 15,8% и 21,6%. Это результат улучшения по сравнению с умеренными ОСШ, и он не столь значителен, как при переходе от низких ОСШ к умеренным.

Итак, границы при конечной длине блока достаточно хорошо аппроксимируют скорость при конечной длине блока в режимах умеренных и высоких значений ОСШ. Дальнейшие улучшения потребуют улучшения нижней границы, что в свою очередь может потребовать изменения схемы передачи. За исключением случая низких ОСШ, мы видим, что верхняя граница передачи со сбором энергии лежит ниже нижней границы для эквивалентного АБГШ-канала. Отсюда можно заключить, что скорости передачи со сбором энергии при конечной длине блока ниже, чем для случая передачи без сбора энергии, в режимах умеренных и высоких ОСШ.

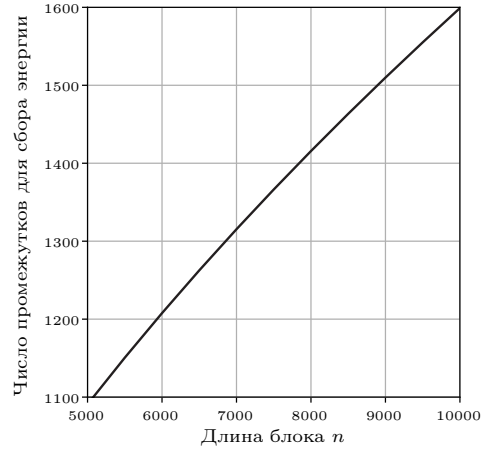
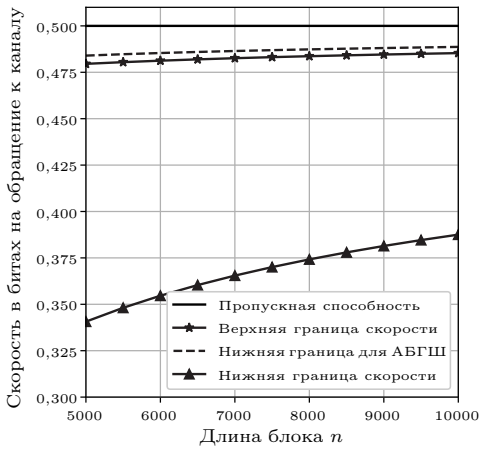


Рис. 3. Графики скоростей для СЭ-АБГШ-канала в зависимости от общей длины блока (сбор энергии плюс передача) в режиме умеренных ОСШ. На втором графике показано число промежутков времени, необходимых для сбора энергии

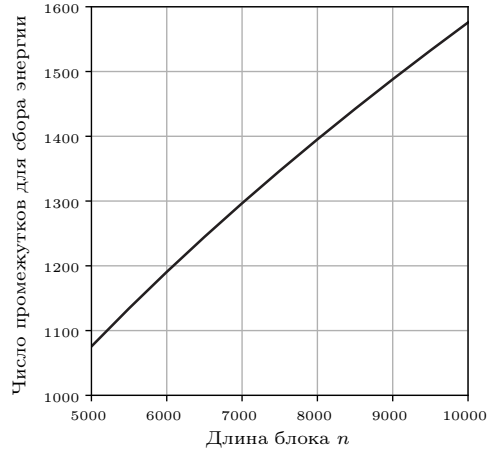
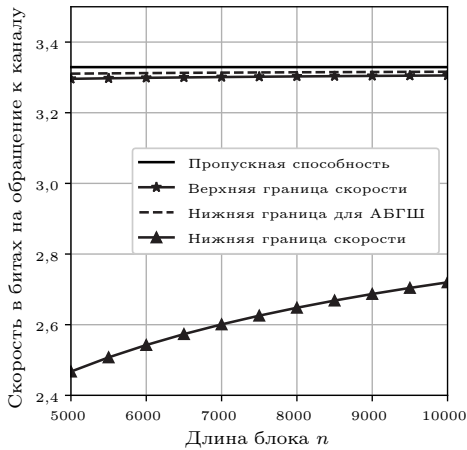


Рис. 4. Графики скоростей для СЭ-АБГШ-канала в зависимости от общей длины блока (сбор энергии плюс передача) в режиме высоких ОСШ. На втором графике показано число промежутков времени, необходимых для сбора энергии

**11.2. СЭ-ДСК.** Рассмотрим двоичный симметричный канал  $W$  с вероятностью перехода  $\alpha$ , т.е.  $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \{0, 1\}$ ,  $W(0|1) = W(1|0) = \alpha$ . Положим  $p_0 := \Pr(X = 0)$ . Если распределение, на котором достигается пропускная способность, удовлетворяющее условиям по сбору энергии, единственно при указанном  $p_0$ , то

$$C_{ED} = C_{ДСК} = h(\alpha p_0 + \bar{\alpha} \bar{p}_0) - h(\alpha),$$

$$V(P; W) = V_{ДСК} = \sum_{x \in \{\alpha, \bar{\alpha}\}} \sum_{y \in \{p_0, \bar{p}_0\}} xy \left[ \log \left( \frac{x}{xy + \bar{x}y} \right) \right]^2 - C_{ДСК}^2,$$

где  $\bar{u} := 1 - u$ , а  $h(x) = -x \log_2(x) - \bar{x} \log_2(\bar{x})$  — функция двоичной энтропии. Заметим, что такой выбор  $p_0$  обусловлен ограничениями по сбору энергии. В этом примере выбраны  $\alpha = 0,05$ , функция энергии  $\Lambda(x) = 3x$  и  $\mathbf{E}[E_1] = 1$ . Этим гарантирует

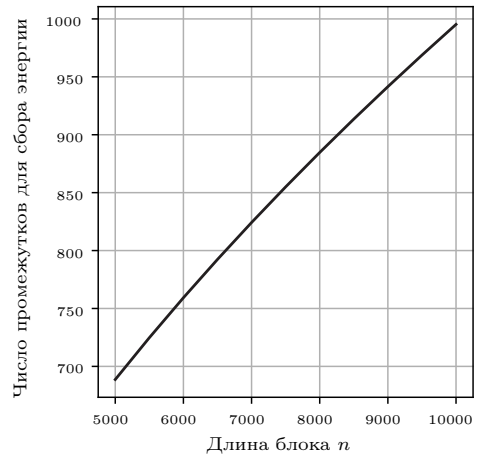
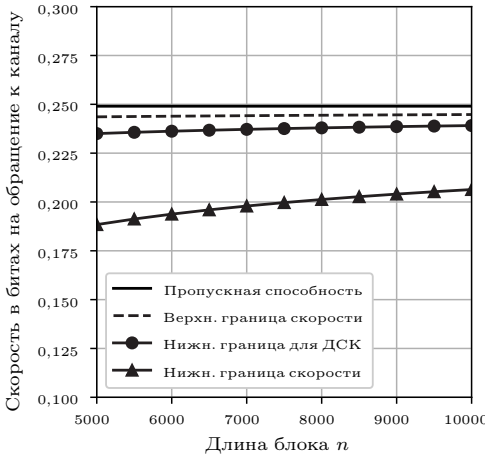


Рис. 5. Графики скоростей для СЭ-ДСК в зависимости от общей длины блока (сбор энергии плюс передача). На правом графике показано число промежутков времени, необходимых для сбора энергии

ся единственность распределения, на котором достигается пропускная способность, при  $p_0 = 2/3$ . Здесь мы берем  $\varepsilon = 0,1$  и  $\sigma_E^2 = 0,2$ . На рис. 5 построены нижняя и верхняя границы для этого примера для значений  $n$  от 5000 до 10000.

Видно, что разница между верхней и нижней границами для этого примера составляет от 13,7% до 23%. Длина, необходимая для сбора энергии, варьируется при выбранных параметрах от 9,8% до 13,8%. В этом случае нижняя граница передачи без сбора энергии лежит ниже верхней границы передачи со сбором энергии. Следовательно, в этом случае нельзя сделать никакого вывода о скоростях в зависимости от  $\sigma_E^2$ .

**11.3. СЭ-ДСК.** Двоичный канал со стиранием  $W$  – это канал с двоичными входами  $\mathcal{X} = \{0, 1\}$ , троичными выходами  $\mathcal{Y} = \{0, E_R, 1\}$ , такой что  $W(0|0) = W(1|1) = 1 - \alpha$  и  $W(E_R|0) = W(E_R|1) = \alpha$ , где  $\alpha$  – вероятность стирания. Аналогично случаю ДСК, если имеется единственное распределение, на котором достигается пропускная способность, с  $p_0 = \text{Pr}(X = 0)$ , то

$$C_{ED} = C_{\text{ДСК}} = (1 - \alpha)h(p_0),$$

$$V(P; W) = V_{\text{ДСК}} = (1 - \alpha)p_0(\log(p_0))^2 + (1 - \alpha)(1 - p_0)(\log(1 - p_0))^2 - C_{\text{ДСК}}^2.$$

При тех же значениях параметров, что и для случая ДСК, получаем графики границ, представленные на рис. 6.

Для выбранных значений параметров наблюдается разница между верхней и нижней границами от 8,6% до 12,2%, а число промежутков времени для сбора энергии составляет от 9,3% до 12,8%. Здесь наши границы дают лучшее приближение к скоростям, в отличие от случая ДСК. Кроме того, в этом случае нижняя граница передачи без сбора энергии лежит выше верхней границы, что означает, что в этом случае влияние сбора энергии ухудшает скорость.

**11.4. Влияние дисперсии процесса сбора энергии  $\sigma_E^2$ .** Сравнивая границы (11) и (12), полученные для СЭ-АБГШ-канала, мы видим, что обе границы понижаются с ростом  $\sigma_E^2$ . Это показано на рис. 7. Интересно, что по сравнению с нижними границами для АБГШ-канала верхние границы для СЭ-АБГШ-канала отличаются лишь на  $O(\log n/n)$  при  $\sigma_E^2 = 0$ . Однако нижние границы сильнее подвергаются влиянию дисперсии.



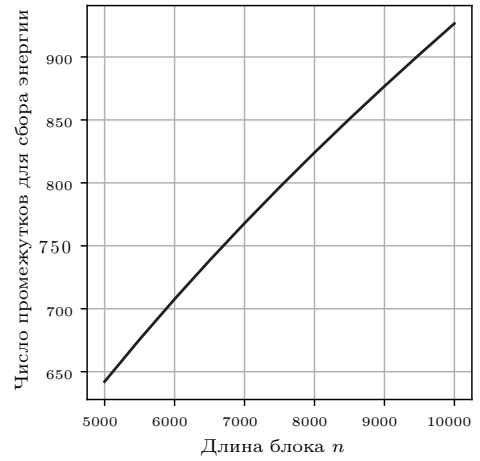
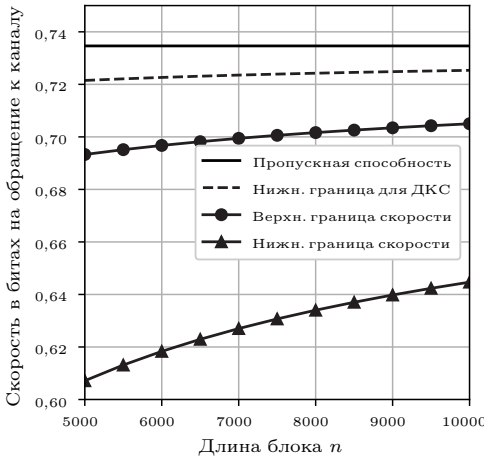


Рис. 6. Графики скоростей для СЭ-ДКС в зависимости от общей длины блока (сбор энергии плюс передача). На правом графике показано число промежутков времени, необходимых для сбора энергии

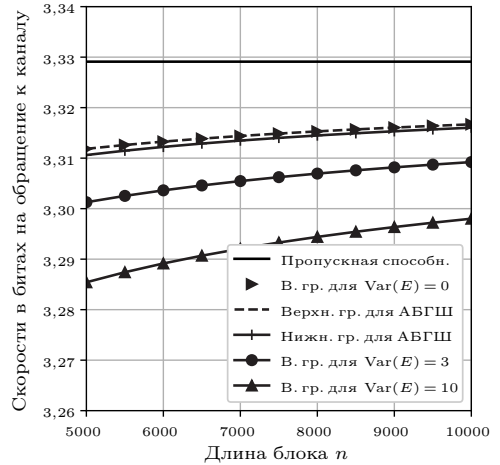
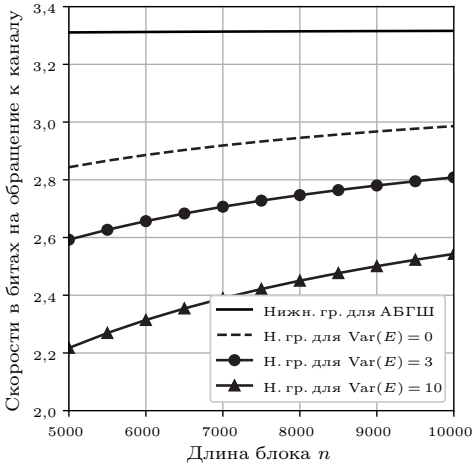


Рис. 7. Графики скоростей при конечной длине блока для СЭ-АБГШ-канала при различных значениях дисперсии процесса сбора энергии

## § 12. Обсуждение результатов и заключение

В статье показано, что как для СЭ-АБГШ-канала, так и для СЭ-ДКБП объем кода при конечной длине блока ведет себя как  $nC - \Theta(\sqrt{n})$  при критерии максимальной вероятности ошибки. Это показано с помощью вывода нижних и верхних границ второго порядка по  $\sqrt{n}$ . Также получена оценка асимптотики умеренных уклонений для обоих типов каналов.

Кроме того, построены графики этих границ для нескольких примеров. В некоторых случаях, таких как АБГШ-канал со значениями ОСШ от умеренных до высоких, а также в случае ДКС наблюдалось, что скорости ухудшаются с ростом дисперсии процесса сбора энергии. Для дальнейшей проверки этой гипотезы было бы желательно уменьшить зазор между нижними и верхними границами. В дальнейших исследованиях было бы полезно получить согласующиеся границы при конечной длине блока и в режиме умеренных уклонений.

Авторы благодарны рецензентам за ценные замечания и предложения, позволившие прояснить некоторые понятия и исправить ошибку в рукописи статьи.

#### ПРИЛОЖЕНИЕ А: ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ГРАНИЦЫ (41)

Пусть  $U \in [M]$  – передаваемое сообщение и аналогично  $\hat{U}$  – декодированное сообщение. Для канала  $W$  при максимальной вероятности ошибки  $\varepsilon$  имеются следующие шаги:

$$\begin{aligned} 1 - \varepsilon &\leq \Pr[\hat{U} = m | U = m] = \\ &= \int_{\mathbf{y}, \mathbf{e}} \Pr[\hat{U} = m | \mathbf{Y} = \mathbf{y}] W(\mathbf{y} | c(m, \mathbf{e})) dP_{\mathbf{E}}(\mathbf{e}), \end{aligned} \quad (80)$$

причем это справедливо для любого сообщения  $m$ .

Далее,  $\Pr[\hat{U} = m | \mathbf{Y} = \mathbf{y}]$  – тест на приемном конце, обеспечивающий условие на вероятность ошибки. Даже если он не зависит от  $\mathbf{e}$ , поскольку декодер не имеет доступа к отсчетам энергии, он все равно является достоверным тестом на  $(\mathbf{y}, \mathbf{e})$ .

Теперь представим себе, что вместо канала  $W$  сообщение посылается по вспомогательному каналу  $Q_{\mathbf{Y}}$ , игнорирующему вход, но имеющему тот же алфавит на выходе. При использовании указанного декодирования пусть  $\bar{m}$  – сообщение, на котором достигается максимальная вероятность ошибки относительно распределения  $Q_{\mathbf{Y}}$ . Тогда, очевидно,  $P(\hat{U} = \bar{m} | U = \bar{m}) \leq \frac{1}{M}$  относительно  $Q_{\mathbf{Y}}$ . Но тогда из (80) и определения  $\beta$ -функции ошибки получаем

$$\beta_{1-\varepsilon}(W(\cdot | c(\bar{m}, *)) P_{\mathbf{E}}(*), Q_{\mathbf{Y}} P_{\mathbf{E}}) \leq \int_{\mathbf{y}} P(\hat{U} = \bar{m} | \mathbf{Y} = \mathbf{y}) dQ_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) \leq \frac{1}{M}.$$

#### ПРИЛОЖЕНИЕ В: ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4

До определенного момента следуем тем же шагам, что и в доказательстве исходного метаобращения теоремы кодирования (см. [7]). Для заданного распределения  $Q_{\mathbf{Y}}$ , которое по существу является контрольным каналом, не зависящим от входа, пусть максимальная вероятность ошибки этого “канала” равна  $\varepsilon'$ . Пусть  $U$  – случайная величина, обозначающая посылаемое сообщение, а  $\hat{U}$  – декодированное сообщение.

Рассмотрим определение максимальной вероятности ошибки. Имеется сообщение (назовем его  $\bar{m}$ ), такое что

$$1 - \varepsilon' = \Pr[\hat{U} = \bar{m} | U = \bar{m}] = \int_{\mathbf{y}} P_{\hat{U}|\mathbf{Y}}(\bar{m} | \mathbf{y}) dQ_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}). \quad (81)$$

Но при этом

$$\begin{aligned} 1 - \varepsilon' &= \min_m \Pr[\hat{U} = m | U = m] \leq \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \Pr[\hat{U} = m | U = m] = \\ &= \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \int_{\mathbf{y}} \Pr[\hat{U} = m | \mathbf{Y} = \mathbf{y}] dQ_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = \\ &= \frac{1}{M} \int_{\mathbf{y}} \left( \sum_{m=1}^M \Pr[\hat{U} = m | \mathbf{Y} = \mathbf{y}] \right) dQ_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = \frac{1}{M}. \end{aligned} \quad (82)$$

Объединяя (81) и (82), получаем

$$M \leq \frac{1}{\int_{\mathbf{y}} P_{\hat{U}|Y}(\bar{m}|\mathbf{y}) dQ_Y(\mathbf{y})}. \quad (83)$$

Далее, для любого  $\mathcal{E}_1 \subset \mathbb{R}_+^n$  справедливо

$$\begin{aligned} 1 - \varepsilon &\leq \int_{\mathbf{e}} \int_{\mathbf{y}} P_{\hat{U}|Y}(\bar{m}|\mathbf{y}) dP_{Y|X}(\mathbf{y}|c(\bar{m}, \mathbf{e})) dP_{\mathbf{E}}(\mathbf{e}) \leq \\ &\leq \int_{\mathbf{e} \in \mathcal{E}_1} \int_{\mathbf{y}} P_{\hat{U}|Y^n}(\bar{m}|\mathbf{y}) dP_{Y|X}(\mathbf{y}|c(\bar{m}, \mathbf{e})) dP_{\mathbf{E}}(\mathbf{e}) + P_{\mathbf{E}}(\mathcal{E}_1^c). \end{aligned}$$

Преобразуя это выражение, используя определения, данные в условии леммы, и полагая  $\mathcal{E}_1 = \left\{ \mathbf{e} : \sum_{i=1}^n e_i \leq n\bar{E}_n \right\}$  и  $\tau_n = P_{\mathbf{E}}(\mathcal{E}_1^c)$ , получаем

$$1 - \varepsilon - \tau_n \leq \int_{\mathbf{e} \in \mathcal{E}_1} \int_{\mathbf{y}} P_{\hat{U}|Y}(\bar{m}|\mathbf{y}) dP_{Y|X}(\mathbf{y}|c(\bar{m}, \mathbf{e})) dP_{\mathbf{E}}(\mathbf{e}) \implies \quad (84)$$

$$\implies 1 - \varepsilon - \tau_n \leq \frac{1 - \varepsilon - \tau_n}{1 - \tau_n} \leq$$

$$\leq \int_{\mathbf{y}} P_{\hat{U}|Y}(\bar{m}|\mathbf{y}) \left\{ \int_{\mathbf{e} \in \mathcal{E}_1} dP_{Y|X}(\mathbf{y}|c(\bar{m}, \mathbf{e})) \frac{dP_{\mathbf{E}}(\mathbf{e})}{1 - \tau_n} \right\}. \quad (85)$$

Заметим, что мы делим на  $1 - \tau_n$ , чтобы обеспечить, что выражение в фигурных скобках является распределением вероятностей. Из (83), (85) и определения  $\beta$ -функции ошибки получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{M} &\geq \beta_{1-\varepsilon-\tau_n} \left( \int_{\mathbf{e} \in \mathcal{E}_1} dP_{Y|X}(\cdot|c(\bar{m}, \mathbf{e})) \frac{dP_{\mathbf{E}}(\mathbf{e})}{1 - \tau_n}, Q_Y \right) \geq \\ &\geq \inf_{\mathbf{x} \in \mathbb{F}_{\bar{E}_n}} \beta_{1-\varepsilon-\tau_n} \left( \int_{\mathbf{e} \in \mathcal{E}_1} dP_{Y|X}(\cdot|\mathbf{x}) \frac{dP_{\mathbf{E}}(\mathbf{e})}{1 - \tau_n}, Q_Y \right) = \\ &= \inf_{\mathbf{x} \in \mathbb{F}_{\bar{E}_n}} \beta_{1-\varepsilon-\tau_n} (P_{Y|X}(\cdot|\mathbf{x}), Q_Y). \end{aligned}$$

Отметим, что здесь мы можем брать инфимум по неслучайному множеству  $\mathbb{F}_{\bar{E}_n}$ , поскольку из  $e^n \in \mathcal{E}_1$  вытекает, что  $c(\bar{m}, e^n) \in \mathbb{F}$ . Следовательно, получаем (43).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Shenoy K.G., Sharma V.* Finite Blocklength Achievable Rates for Energy Harvesting AWGN Channels with Infinite Buffer // Proc. 2016 IEEE Int. Symp. on Information Theory (ISIT'2016). Barcelona, Spain. July 10–15, 2016. P. 465–469. <https://doi.org/10.1109/ISIT.2016.7541342>
2. *Kamalinejad P., Mahapatra C., Sheng Z., Mirabbasi S., Leung V.C., Guan Y.L.* Wireless Energy Harvesting for the Internet of Things // IEEE Commun. Mag. 2015. V. 53. № 6. P. 102–108. <https://doi.org/10.1109/MCOM.2015.7120024>

3. *Ku M.-L., Li W., Chen Y., Liu K.R.* Advances in Energy Harvesting Communications: Past, Present, and Future Challenges // *IEEE Commun. Surv. Tutor.* 2016. V. 18. № 2. P. 1384–1412. <https://doi.org/10.1109/COMST.2015.2497324>
4. *Raza M., Aslam N., Le-Minh H., Hussain S., Cao Y., Khan N.M.* A Critical Analysis of Research Potential, Challenges, and Future Directives in Industrial Wireless Sensor Networks // *IEEE Commun. Surv. Tutor.* 2017. V. 20. № 1. P. 39–95. <https://doi.org/10.1109/COMST.2017.2759725>
5. *Strassen V.* Asymptotische Abschätzungen in Shannons Informationstheorie // *Trans. 3rd Prague Conf. on Information Theory, Statistical Decision Functions, Random Processes held at Liblice near Prague. June 5–13, 1962. Prague: Czechoslovak Acad. Sci., 1964. P. 689–723.*
6. *Hayashi M.* Information Spectrum Approach to Second-Order Coding Rate in Channel Coding // *IEEE Trans. Inform. Theory.* 2009. V. 55. № 11. P. 4947–4966. <https://doi.org/10.1109/TIT.2009.2030478>
7. *Polyanskiy Y., Poor H.V., Verdú S.* Channel Coding Rate in the Finite Blocklength Regime // *IEEE Trans. Inform. Theory.* 2010. V. 56. № 5. P. 2307–2359. <https://doi.org/10.1109/TIT.2010.2043769>
8. *Polyanskiy Y., Poor H.V., Verdú S.* New Channel Coding Achievability Bounds // *Proc. 2008 IEEE Int. Symp. on Information Theory (ISIT'2008). Toronto, ON, Canada. July 6–11, 2008. P. 1763–1767. https://doi.org/10.1109/ISIT.2008.4595291*
9. *Tomamichel M., Tan V.Y.F.* A Tight Upper Bound for the Third-Order Asymptotics for Most Discrete Memoryless Channels // *IEEE Trans. Inform. Theory.* 2013. V. 59. № 11. P. 7041–7051. <https://doi.org/10.1109/TIT.2013.2276077>
10. *Tomamichel M., Tan V.Y.F.* Second-Order Coding Rates for Channels with State // *IEEE Trans. Inform. Theory.* 2014. V. 60. № 8. P. 4427–4448. <https://doi.org/10.1109/TIT.2014.2324555>
11. *Rajesh R., Sharma V., Viswanath P.* Capacity of Gaussian Channels with Energy Harvesting and Processing Cost // *IEEE Trans. Inform. Theory.* 2014. V. 60. № 5. P. 2563–2575. <https://doi.org/10.1109/TIT.2014.2311822>
12. *Ozel O., Ulukus S.* Achieving AWGN Capacity under Stochastic Energy Harvesting // *IEEE Trans. Inform. Theory.* 2012. V. 58. № 10. P. 6471–6483. <https://doi.org/10.1109/TIT.2012.2204389>
13. *Yang J.* Achievable Rate for Energy Harvesting Channel with Finite Blocklength // *Proc. 2014 IEEE Int. Symp. on Information Theory (ISIT'2014). Honolulu, HI, USA. June 29–July 4, 2014. P. 811–815. https://doi.org/10.1109/ISIT.2014.6874945*
14. *Fong S.L., Tan V.Y.F., Özgür A.* On Achievable Rates of AWGN Energy-Harvesting Channels with Block Energy Arrival and Non-vanishing Error Probabilities // *IEEE Trans. Inform. Theory.* 2018. V. 64. № 3. P. 2038–2064. <https://doi.org/10.1109/TIT.2017.2765545>
15. *Altuğ Y., Wagner A.B.* Moderate Deviations in Channel Coding // *IEEE Trans. Inform. Theory.* 2014. V. 60. № 8. P. 4417–4426. <https://doi.org/10.1109/TIT.2014.2323418>
16. *Polyanskiy Y., Verdú S.* Channel Dispersion and Moderate Deviations Limits for Memoryless Channels // *Proc. 48th Annu. Allerton Conf. on Communication, Control, and Computation. Monticello, IL, USA. Sept. 29–Oct. 1, 2010. P. 1334–1339. https://doi.org/10.1109/ALLERTON.2010.5707068*
17. *Truong L.V., Tan V.Y.F.* Moderate Deviation Asymptotics for Variable-Length Codes with Feedback, <https://arxiv.org/abs/1707.04850v2> [cs.IT], 2017.
18. *Yang W., Durisi G., Koch T., Polyanskiy Y.* Quasi-static Multiple-Antenna Fading Channels at Finite Blocklength // *IEEE Trans. Inform. Theory.* 2014. V. 60. № 7. P. 4232–4265. <https://doi.org/10.1109/TIT.2014.2318726>
19. *Cover T.M., Thomas J.A.* Elements of Information Theory. Hoboken, NJ, USA: Wiley, 2006.
20. *Han T.S.* Information-Spectrum Methods in Information Theory. Berlin: Springer, 2003.
21. *Csiszár I., Körner J.* Information Theory: Coding Theorems for Discrete Memoryless Systems. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2011.

22. *Kostina V., Verdú S.* Channels with Cost Constraints: Strong Converse and Dispersion // IEEE Trans. Inform. Theory. 2015. V. 61. № 5. P. 2415–2429. <https://doi.org/10.1109/TIT.2015.2409261>
23. *El Gamal A., Kim Y.-H.* Network Information Theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2011.
24. *Athreya K.B., Lahiri S.N.* Probability Theory. New Delhi, India: Hindustan Book Agency, 2006.
25. *Тюрин И.С.* Уточнение верхних оценок констант в теореме Ляпунова // УМН. 2010. Т. 65. № 3 (393). С. 201–202. <https://doi.org/10.4213/rm9337>
26. *Sun Y., Baricz Á., Zhou S.* On the Monotonicity, log-Concavity, and Tight Bounds of the Generalized Marcum and Nuttall  $Q$ -Functions // IEEE Trans. Inform. Theory. 2010. V. 56. № 3. P. 1166–1186. <https://doi.org/10.1109/TIT.2009.2039048>
27. *Wolff R.W.* Stochastic Modeling and the Theory of Queues. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1989.
28. *Gut A.* Stopped Random Walks. New York: Springer, 2009.
29. *Dembo A., Zeitouni O.* Large Deviations Techniques and Applications. Berlin: Springer, 2009. Corrected printing of the 1998 ed.

*Шеной Кончади Гаутам*  
*Шарма Винод*  
 Отделение техники электросвязи,  
 Индийский научный институт, Бангалор, Индия  
 konchady@iisc.ac.in  
 vinod@iisc.ac.in

Поступила в редакцию  
 22.02.2019  
 После доработки  
 08.10.2020  
 Принята к публикации  
 15.12.2020