ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

Том 57 2021 Вып. 2

УДК 621.391 : 519.174.7

© 2021 г. А.В. Бердников, А.М. Райгородский

ОЦЕНКИ ЧИСЕЛ БОРСУКА ПО ДИСТАНЦИОННЫМ ГРАФАМ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА[1]

В 1933 г. Борсук сформулировал ставшую классической гипотезу о том, что минимальное число частей меньшего диаметра, на которые может быть разбито произвольное множество диаметра 1 в $\mathbb{R}^n$, равно $n+1$. В 1993 г. гипотеза была опровергнута с помощью совокупностей точек с координатами 0 и 1. Позже вторым автором статьи были получены более сильные контрпримеры, основанные на семействах точек с координатами $-1, 0, 1$. В настоящей статье устанавливаются новые нижние оценки для чисел Борсука в семействах такого типа.

Ключевые слова: проблема Борсука, $(0,1)$-векторы, разбиения, графы диаметров, раскраски.

DOI: 10.31857/S0555292321020030

§ 1. Введение и формулировки результатов

Настоящая статья посвящена одному важному аспекту классической проблемы Борсука о разбиении множеств на части меньшего диаметра (см. [1–3]). Напомним, что *число Борсука* – это величина $f(d)$, равная минимальному количеству частей меньшего диаметра, на которые может быть разбито произвольное множество $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, имеющее диаметр 1. Долгое время большинство специалистов верило, что $f(d) = d+1$. Однако в 1993 г. эта гипотеза была опровергнута, и сейчас известно, что хотя $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(3) = 4$, уже $f(64) > 65$ (см. [1, 4]), и более того,

$$\left(\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{2}} + o(1)\right)^{\sqrt{d}} \leqslant f(d) \leqslant \left(\sqrt{\frac{3}{2}} + o(1)\right)^{d} \qquad (1)$$

(см. нижнюю оценку в [1], а верхнюю – в [5, 6]). При малых d множество смежных результатов и ссылок можно найти в [7–9].

В дальнейшем нас будут интересовать нижние оценки величины $f(d)$ при $d \to \infty$. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ – конечное множество точек. Граф $G = G_\Omega = (\Omega, E)$ называется его *графом диаметров*, если $(x, y) \in E$ тогда и только тогда, когда расстояние $|x-y|$ между точками x, y равно диаметру $\operatorname{diam} \Omega$ множества Ω. Напомним, что *хроматическое число* произвольного графа H – это минимальное число цветов $\chi(H)$, в которые можно так покрасить вершины H, чтобы концы каждого ребра имели разные цвета. Нетрудно видеть, что для конечных множеств разбиение на части меньшего диаметра и раскраска графа диаметров суть одно и то же. Поэтому имеет место оценка $f(d) \geqslant \chi(G_\Omega)$, коль скоро $\Omega \subset \mathbb{R}^d$.

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (номер проекта 18-01-00355) и гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ (номер гранта НШ-2540.2020.1).

Напомним, далее, что *дистанционным графом* в $\mathbb{R}^d$ называется любой граф $G = (V, E)$, у которого $V \subset \mathbb{R}^d$, а ребра – всевозможные пары вершин, между которыми одно и то же наперед заданное расстояние (см. [10–13]).

Нижняя оценка в неравенстве (1) получается следующим образом. Сперва в $\mathbb{R}^n$ берется дистанционный граф G, у которого вершины являются $(-1,0,1)$-векторами с равными (общими для всех) количествами отрицательных и положительных координат, а ребра порождаются парами ортогональных вершин. Затем ищется граф диаметров H, изоморфный G и расположенный в $\mathbb{R}^d$ с $d \leqslant \frac{n(n+1)}{2}$. В итоге оказывается, что

$$\chi(G) \geqslant \left(\frac{2}{\sqrt{3}} + o(1)\right)^n,$$

откуда

$$f(d) \geqslant \chi(H) = \chi(G) \geqslant \left(\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{2}} + o(1)\right)^{\sqrt{d}}.$$

Возникает следующая естественная постановка. Пусть $n, k_{-1}, k_0, k_1 \in \mathbb{N}$, причем $k_{-1} + k_0 + k_1 = n$. Пусть $V(n, k_{-1}, k_0, k_1)$ – множество $(-1,0,1)$-векторов в $\mathbb{R}^n$, в каждом из которых k_i координат, равных $i \in \{-1, 0, 1\}$. Пусть $\mathcal{G}(k_{-1}, k_0, k_1)$ – множество всех таких дистанционных графов с вершинами $V(n, k_{-1}, k_0, k_1)$, что для каждого из них существует изоморфный ему граф диаметров в $\mathbb{R}^d$ с $d \leqslant \frac{n(n+1)}{2}$. Пусть, наконец, $\chi(n, k_{-1}, k_0, k_1)$ – максимум величины $\chi(G)$ по всем $G \in \mathcal{G}(k_{-1}, k_0, k_1)$. Ясно, что сказанное выше означает справедливость неравенства

$$\max_{k_1} \chi(n, k_1, k_0, k_1) \geqslant \left(\frac{2}{\sqrt{3}} + o(1)\right)^n.$$

Вопрос в том, как ведет себя с ростом n исходная величина $\chi(n, k_{-1}, k_0, k_1)$. Растет ли она экспоненциально при $k_{-1} \neq k_1$? Тут важно не забывать, что даже при фиксированных n, k_{-1}, k_1 максимизация ведется по величине расстояния, задающего дистанционный граф из множества $\mathcal{G}(k_{-1}, k_0, k_1)$, с нетривиальным, однако, условием существования изоморфного графа диаметров в пространстве сравнительно малой размерности.

Ответ на поставленные вопросы дает следующая

Теорема 1. *Пусть $k'_{-1} \leqslant k'_1$, $k'_1 + k'_{-1} \in (0, 1/2)$. Пусть $k_{-1} \sim k'_{-1}n$, $k_1 \sim k'_1 n$, и стало быть, $k_0 \sim (1 - k'_{-1} - k'_1)n$ при $n \to \infty$. Положим $p' = k'_{-1} + k'_1 - (k'_1 - k'_{-1})^2$. Пусть x' – меньший корень квадратного уравнения $x(1 - p' + x) = (p' - 2x)^2$. Тогда*

$$\chi(n, k_{-1}, k_0, k_1) \geqslant \left(\frac{(x')^{x'}(p'-2x')^{p'-2x'}(1-p'+x')^{1-p'+x'}}{(k'_{-1})^{k'_{-1}}(k'_1)^{k'_1}(1-k'_1-k'_{-1})^{1-k'_1-k'_{-1}}} + o(1)\right)^n.$$

В табл. 1 приведены значения оснований экспоненты из теоремы 1. В ней по вертикали отмечены значения k'_{-1}, а по горизонтали – значения k'_1. Видно, что во всех клетках числа больше единицы. Таким образом, в условиях теоремы 1 оценка всегда экспоненциальна. С другой стороны, максимум чисел в таблице (как показывает более детальный расчет) равен $2/\sqrt{3} = 1{,}154\ldots$, т.е. оценка в исходной проблеме Борсука остается прежней.

В следующем параграфе мы докажем теорему 1. Отметим, что смежные исследования, связанные с конструкциями на $(-1,0,1)$-векторах, можно найти в работах [14–31].

Таблица 1

	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10	0,12	0,14	0,16	0,18	0,20	0,22	0,24
0,02	1,026											
0,06	1,044	1,060	1,072									
0,10	1,056	1,076	1,089	1,100	1,109							
0,14	1,068	1,088	1,103	1,113	1,122	1,129	1,135					
0,18	1,078	1,099	1,113	1,124	1,132	1,138	1,144	1,147	1,150			
0,20	1,083	1,104	1,118	1,128	1,136	1,142	1,147	1,150	1,152	1,154		
0,22	1,088	1,108	1,122	1,132	1,139	1,145	1,149	1,152	1,153	1,154	1,154	
0,24	1,092	1,112	1,125	1,135	1,142	1,147	1,150	1,152	1,153	1,154	1,153	1,151
0,26	1,096	1,116	1,128	1,137	1,143	1,148	1,151	1,152	1,153	1,152	1,151	
0,28	1,099	1,119	1,131	1,139	1,144	1,148	1,150	1,151	1,151	1,150		
0,30	1,103	1,121	1,133	1,140	1,145	1,148	1,149	1,149	1,148			
0,32	1,106	1,123	1,134	1,140	1,144	1,146	1,147	1,146				
0,36	1,110	1,126	1,134	1,139	1,141	1,141						
0,40	1,112	1,126	1,132	1,134								
0,44	1,113	1,123										

§ 2. Доказательство теоремы 1

2.1. Построение дистанционного графа. Прежде всего заметим, что максимальное скалярное произведение векторов из множества $V(n, k_{-1}, k_0, k_1)$ равно скалярному квадрату любого из них, т.е. величине $k_1 + k_{-1}$. Напротив, выбор параметров таков, что минимальное скалярное произведение равно $-2k_{-1}$. Пусть p – минимальное простое число, строго большее величины $k_1 + k_{-1} - (k_1 - k_{-1})^2/n$. Согласно известным результатам теории чисел (см. [32]) $p \sim p'n$ при $n \to \infty$. При этом

$$k_1 + k_{-1} - 2p < -2k_{-1}. \tag{2}$$

В самом деле, достаточно проверить, что $k_1 + k_{-1} - p < (k_1 - k_{-1})/2$, т.е. что

$$\frac{(k_1 - k_{-1})^2}{n} < \frac{k_1 - k_{-1}}{2} \iff k_1 - k_{-1} < \frac{n}{2},$$

а это мгновенно следует из условия теоремы.

Соединим ребром две вершины из $V(n, k_{-1}, k_0, k_1)$ тогда и только тогда, когда скалярное произведение соответствующих векторов равно $k_1 + k_{-1} - p$. Возникает дистанционный граф G в $\mathbb{R}^n$. Однако мы пока не знаем, принадлежит ли он множеству $\mathcal{G}(k_{-1}, k_0, k_1)$. Ниже мы докажем это, а также убедимся в том, что для хроматического числа графа G справедлива оценка, фигурирующая в теореме 1. На этом доказательство теоремы 1 будет завершено.

2.2. Принадлежность графа G множеству $\mathcal{G}(k_{-1}, k_0, k_1)$. Пусть λ – корень квадратного уравнения

$$\lambda^2 n - 2\lambda(k_1 - k_{-1}) + k_1 + k_{-1} - p = 0.$$

Он вещественный, поскольку положительность дискриминанта следует из условий, наложенных на величину p.

Пусть $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n) \in V(n, k_{-1}, k_0, k_1)$. Рассмотрим вектор

$$\boldsymbol{x}^* = \bigl((x_1 - \lambda)(x_1 - \lambda), (x_1 - \lambda)(x_2 - \lambda), \dots, (x_1 - \lambda)(x_n - \lambda),$$
$$(x_2 - \lambda)(x_1 - \lambda), \dots, (x_2 - \lambda)(x_n - \lambda), \dots, (x_n - \lambda)(x_n - \lambda)\bigr).$$

Множество таких векторов обозначим через W. Оно лежит в подпространстве размерности $\dfrac{n(n+1)}{2}$ пространства $\mathbb{R}^{n^2}$. Таким образом, остается доказать, что граф диаметров этого множества изоморфен графу G.

Заметим, что

$$(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i-\lambda)(x_j-\lambda)(y_i-\lambda)(y_j-\lambda) =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\lambda)(y_i-\lambda)\right)^2 = \big((\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - 2\lambda(k_1-k_{-1}) + \lambda^2 n\big)^2.$$

Величина λ подобрана так, чтобы получившийся полный квадрат принимал минимальное по $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ значение (равное нулю) тогда и только тогда, когда $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = k_1 + k_{-1} - p$. Последнее равенство в точности соответствует образованию ребра между вершинами $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ графа G. А максимум расстояния между векторами из множества W достигается ровно тогда, когда их скалярное произведение минимально, ведь, как мы видим из формулы для их скалярного произведения, все их скалярные квадраты одинаковы. Следовательно, граф G изоморфен графу диаметров множества W, и эта часть доказательства завершена.

2.3. Оценка хроматического числа графа $\boldsymbol{G}$. Хорошо известно, что $\chi(G) \geqslant \dfrac{|V|}{\alpha(G)}$, где $\alpha(G)$ – *число независимости* графа, равное максимальной мощности такого множества вершин графа, что никакие две вершины в нем не соединены ребром (сами такие множества называются *независимыми*). Легко видеть, что в нашем случае

$$|V| = C_n^{k_1} C_{n-k_1}^{k_{-1}} = \left(\frac{1}{(k'_{-1})^{k'_{-1}}(k'_1)^{k'_1}(1-k'_1-k'_{-1})^{1-k'_1-k'_{-1}}} + o(1)\right)^n.$$

Соответственно, неравенство в теореме 1 подсказывает, что верхняя оценка числа независимости должна иметь вид

$$\left(\frac{1}{(x')^{x'}(p'-2x')^{p'-2x'}(1-p'+x')^{1-p'+x'}} + o(1)\right)^n,$$

и нам остается обосновать это.

Рассмотрим произвольное независимое множество вершин нашего графа $W = \{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_t\}$. Каждому вектору $\boldsymbol{x}_i$ сопоставим многочлен $P_{\boldsymbol{x}_i} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[y_1, \ldots, y_n]$ (здесь p – простое число из формулировки теоремы), задаваемый в виде

$$P_{\boldsymbol{x}_i}(\boldsymbol{y}) = \prod_{j\in J}(j - (\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y})), \quad \boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n),$$

$$J = \{0, 1, \ldots, p-1\} \setminus \{k_1 + k_{-1} - p\}.$$

Преобразуем многочлены $P_{\boldsymbol{x}_i}$ следующим образом. Раскроем все скобки в определении и получим некоторую комбинацию одночленов. Степень каждого одночлена не превосходит $p-1$. Если одночлен имеет вид $y_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \cdot \ldots \cdot y_{i_q}^{\alpha_{i_q}}$, где

$$q \leqslant p-1, \quad 1 \leqslant \alpha_{i_\nu} \leqslant p-1, \quad 1 \leqslant \nu \leqslant q, \quad \alpha_{i_1} + \ldots + \alpha_{i_q} \leqslant p-1,$$

то заменим в нем все четные α_{i_ν} на двойки, а все нечетные – на единицы. После приведения подобных слагаемых над $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ возникает новый многочлен $P'_{\boldsymbol{x}_i}$. Степень каждого такого многочлена по-прежнему не выше $p-1$. При этом все эти многочлены расположены в линейном пространстве, размерность которого не больше величины

$$\sum_{(i,j)\colon\, i+2j\leqslant p-1} C_n^i C_{n-i}^j.$$

Здесь i – число переменных первой степени, а j – число переменных второй степени в мономах, образующих стандартный базис.

Если мы докажем, что многочлены $P'_{\boldsymbol{x}_1}, \ldots, P'_{\boldsymbol{x}_t}$ линейно независимы над $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, то мы установим оценку

$$\alpha(G) \leqslant \sum_{(i,j):\, i+2j \leqslant p-1} C_n^i C_{n-i}^j.$$

Предположим, что

$$c_1 P'_{\boldsymbol{x}_1} + \ldots + c_t P'_{\boldsymbol{x}_t} = 0.$$

Тогда для любого $\boldsymbol{y} \in W$ верно

$$c_1 P'_{\boldsymbol{x}_1}(\boldsymbol{y}) + \ldots + c_t P'_{\boldsymbol{x}_t}(\boldsymbol{y}) \equiv 0 \pmod p.$$

Более того, верно и

$$c_1 P_{\boldsymbol{x}_1}(\boldsymbol{y}) + \ldots + c_t P_{\boldsymbol{x}_t}(\boldsymbol{y}) \equiv 0 \pmod p.$$

Дело в том, что для $\boldsymbol{y} \in W$ все $y_i \in \{-1, 0, 1\}$, а на таких значениях переменных значения P и P' просто равны между собой.

Подставим вместо $\boldsymbol{y}$ вектор $\boldsymbol{x}_1$. Мы знаем, что $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_1) = k_1 + k_{-1}$. Но в множестве J (см. определение многочлена P) нет вычета $k_1 + k_{-1}$. Значит, $P_{\boldsymbol{x}_1}(\boldsymbol{x}_1) \not\equiv$ $\not\equiv 0 \pmod p$. С другой стороны, для любого другого $\boldsymbol{x}_i$ имеем

$$\begin{aligned} &(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_1) < k_1 + k_{-1}, \quad (\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_1) \neq k_1 + k_{-1} - p, \\ &(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_1) \geqslant -2k_{-1}, \quad k_1 + k_{-1} - 2p < -2k_{-1}, \end{aligned}$$

где второе неравенство является следствием отсутствия ребер в независимом множестве W, четвертое неравенство – это полученный ранее факт (2), а все вместе говорит о том, что

$$(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_1) \not\equiv k_1 + k_{-1} - p \pmod p,$$

откуда $P_{\boldsymbol{x}_i}(\boldsymbol{x}_1) \equiv 0 \pmod p$. В итоге видим, что $c_1 \equiv 0 \pmod p$. Действуя аналогично, получаем, что все коэффициенты равны нулю по модулю p, так что многочлены и впрямь линейно независимы.

Для завершения доказательства остается проверить, что

$$\sum_{(i,j):\, i+2j \leqslant p-1} C_n^i C_{n-i}^j = \left(\frac{1}{(x')^{x'} (p' - 2x')^{p'-2x'} (1 - p' + x')^{1-p'+x'}} + o(1) \right)^n.$$

Это довольно рутинный анализ, и мы опускаем подробности. Во-первых, ясно, что запись $(c + o(1))^n$ при $c > 1$ не чувствительна к домножению и делению на субэкспоненциальные функции – тем более на многочлены. Поэтому достаточно найти c в записи максимального слагаемого в сумме. Разумеется, в этом слагаемом $i + 2j = p - 1$. Стало быть, мы ищем максимум выражения $C_n^i C_{n-i}^{p-1-2i}$. Отбрасывая субэкспоненциальные величины и вспоминая, что $p \sim p'n$, видим, что максимизирующее i можно искать среди $i \sim xn$, где $x \in (0, 1)$ при $n \to \infty$. Тогда

$$C_n^i C_{n-i}^{p-1-2i} = \left(\frac{1}{x^x (p' - 2x)^{p'-2x} (1 - p' + x)^{1-p'+x}} + o(1) \right)^n.$$

Дифференцируя по x дробь, стоящую в скобках, находим необходимое условие экстремума как раз в виде квадратного уравнения из условия теоремы. Стандартными выкладками проверяем, что это и есть точка максимума. Заменяем x на x', и теорема доказана. ▲

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Raigorodskii A.M.* Cliques and Cycles in Distance Graphs and Graphs of Diameters // Discrete Geometry and Algebraic Combinatorics (AMS Special Session on Discrete Geometry and Algebraic Combinatorics. San Diego, CA, USA. Jan. 11, 2013). Contemp. Math. V. 625. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2014. P. 93–109.
2. *Raigorodskii A.M.* Combinatorial Geometry and Coding Theory // Fund. Inform. 2016. V. 145. № 3. P. 359–369. https://doi.org/10.3233/FI-2016-1365
3. *Райгородский А.М.* Проблема Борсука и хроматические числа некоторых метрических пространств // УМН. 2001. Т. 56. № 1 (337). С. 107–146. https://doi.org/10.4213/rm358
4. *Райгородский А.М.* Вокруг гипотезы Борсука // Геометрия и механика. Современная математика. Фундаментальные направления. Т. 23. М: РУДН, 2007. С. 147–164. http://mi.mathnet.ru/cmfd96
5. *Bourgain J., Lindenstrauss J.* On Covering a Set in $\mathbb{R}^d$ by Balls of the Same Diameter // Geometric Aspects of Functional Analysis: Israel Seminar (GAFA) 1989–90. Lect. Notes Math. V. 1469. Berlin: Springer-Verlag, 1991. P. 138–144. https://doi.org/10.1007/BFb0089220
6. *Schramm O.* Illuminating Sets of Constant Width // Mathematika. 1988. V. 35. № 2. P. 180–189. https://doi.org/10.1112/S0025579300015175
7. *Боголюбский Л.И., Райгородский А.М.* Замечание о нижних оценках хроматических чисел пространств малой размерности с метриками ℓ_1 и ℓ_2 // Матем. заметки. 2019. V. 105. № 2. P. 187–213. https://doi.org/10.4213/mzm11736
8. *Райгородский А.М., Боголюбский Л.И.* Об оценках в проблеме Борсука // Тр. МФТИ. 2019. Т. 11. № 3. С. 20–49.
9. *Филимонов В.П.* О покрытии множеств в $\mathbb{R}^m$ // Матем. сб. 2014. Т. 205. № 8. С. 95–138. https://doi.org/10.4213/sm8316
10. *Райгородский А.М., Кошелев М.М.* Новые оценки клико-хроматических чисел графов Джонсона // Докл. РАН. 2020. Т. 490. № 1. С. 78–80. https://doi.org/10.31857/S268695432001018X
11. *Ипатов М.М., Кошелев М.М., Райгородский А.М.* Модулярность некоторых дистанционных графов // Докл. РАН. 2020. Т. 490. № 1. С. 71–73. https://doi.org/10.31857/S2686954320010142
12. *Raigorodskii A.M., Koshelev M.M.* New Bounds on Clique-Chromatic Numbers of Johnson Graphs // Discrete Appl. Math. 2020. V. 283. P. 724–729. https://doi.org/10.1016/j.dam.2020.01.015
13. *Пушняков Ф.А., Райгородский А.М.* Оценка числа ребер в особых подграфах некоторого дистанционного графа // Матем. заметки. 2020. Т. 107. № 2. С. 286–298. https://doi.org/10.4213/mzm12088
14. *Райгородский А.М., Харламова А.А.* О совокупностях $(-1, 0, 1)$-векторов с запретами на величины попарных скалярных произведений // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. Т. 29. М.: Изд-во МГУ, 2013. С. 130–146.
15. *Frankl P., Kupavskii A.* Erdős–Ko–Rado Theorem for $\{0, \pm 1\}$-Vectors // J. Combin. Theory Ser. A. 2018. V. 155. P. 157–179. https://doi.org/10.1016/j.jcta.2017.11.003
16. *Frankl P., Kupavskii A.* Incompatible Intersection Properties // Combinatorica. 2019. V. 39. № 6. P. 1255–1266. https://doi.org/10.1007/s00493-019-4064-6
17. *Kupavskii A.* Degree Versions of Theorems on Intersecting Families via Stability // J. Combin. Theory Ser. A. 2019. V. 168. P. 272–287. https://doi.org/10.1016/j.jcta.2019.06.002
18. *Ihringer F., Kupavskii A.* Regular Intersecting Families // Discrete Appl. Math. 2019. V. 270. P. 142–152. https://doi.org/10.1016/j.dam.2019.07.009
19. *Бобу А.В., Куприянов А.Э., Райгородский А.М.* Об одном обобщении кнезеровских графов // Матем. заметки. 2020. Т. 107. № 3. С. 351–365. https://doi.org/10.4213/mzm12205

20. *Sagdeev A.A., Raigorodskii A.M.* On a Frankl–Wilson Theorem and Its Geometric Corollaries // Acta Math. Univ. Comenian. (N.S.). 2019. V. 88. № 3. P. 1029–1033.
21. *Райгородский А.М., Шишунов Е.Д.* О числах независимости некоторых дистанционных графов с вершинами в $\{-1,0,1\}^n$ // ДАН. 2019. V. 485. № 3. P. 269–271. https://doi.org/10.31857/S0869-56524853269-271
22. *Райгородский А.М., Шишунов Е.Д.* О числах независимости дистанционных графов с вершинами в $\{-1,0,1\}^n$ // ДАН. 2019. V. 488. № 5. P. 486–487. https://doi.org/10.31857/S0869-56524885486-487
23. *Соколов А.А., Райгородский А.М.* О рациональных аналогах проблем Нелсона – Хадвигера и Борсука // Чебышевский сб. 2018. Т. 19. № 3. С. 270–281. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-19-3-270-281
24. *Райгородский А.М., Трухан Т.В.* О хроматических числах некоторых дистанционных графов // ДАН. 2018. Т. 482. № 6. С. 648–650. https://doi.org/10.31857/S086956520002950-8
25. *Cherkashin D., Kulikov A., Raigorodskii A.* On the Chromatic Numbers of Small-Dimensional Euclidean Spaces // Discrete Appl. Math. 2018. V. 243. P. 125–131. https://doi.org/10.1016/j.dam.2018.02.005
26. *Райгородский А.М., Сагдеев А.А.* Об одной оценке в экстремальной комбинаторике // ДАН. 2018. Т. 478. № 3. С. 271–273. https://doi.org/10.7868/S0869565218030040
27. *Сагдеев А.А.* Об одной теореме Франкла – Уилсона // Пробл. передачи информ. 2019. Т. 55. № 4. С. 86–106. https://doi.org/10.1134/S0555292319040041
28. *Cherkashin D., Kiselev S.* Independence Numbers of Johnson-type Graphs, arXiv:1907.06752 [math.CO], 2019.
29. *Захаров Д.А.* О хроматических числах некоторых дистанционных графов // Матем. заметки. 2020. Т. 107. № 2. С. 210–220. https://doi.org/10.4213/mzm11349
30. *Zakharov D.* Chromatic Numbers of Kneser-type Graphs // J. Combin. Theory Ser. A. 2020. V. 172. P. 105188 (16 pp.). https://doi.org/10.1016/j.jcta.2019.105188
31. *Просанов Р.И.* Контрпримеры к гипотезе Борсука, имеющие большой обхват // Матем. заметки. 2019. V. 105. № 6. P. 890–898. https://doi.org/10.4213/mzm12000
32. *Baker R.C., Harman G., Pintz J.* The Difference between Consecutive Primes. II // Proc. London Math. Soc. (3). 2001. V. 83. № 3. P. 532–562. https://doi.org/10.1112/plms/83.3.532

Бердников Алексей Викторович
Московский физико-технический институт
(государственный университет),
факультет инноваций и высоких технологий,
кафедра дискретной математики
alexey-berdnikov@yandex.ru
Райгородский Андрей Михайлович
Московский физико-технический институт
(государственный университет),
Физтех-школа прикладной математики и информатики и
лаборатория продвинутой комбинаторики и сетевых приложений
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
механико-математический факультет,
кафедра математической статистики и случайных процессов
Кавказский математический центр
Адыгейского государственного университета, Майкоп
Бурятский государственный университет,
институт математики и информатики, Улан-Удэ
mraigor@yandex.ru

Поступила в редакцию
14.07.2020
После доработки
06.11.2020
Принята к публикации
07.11.2020