ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

Том 57 **2021** **Вып. 2**

УДК 621.391 : 519.178

© 2021 г. **М.Н. Вялый**[1]

ПОДСЧЕТ ЧИСЛА СОВЕРШЕННЫХ ПАРОСОЧЕТАНИЙ И ОБОБЩЕННЫЕ РАЗРЕШАЮЩИЕ ДЕРЕВЬЯ

Изучается обобщение подхода Пойа – Кастелейна к подсчету числа совершенных паросочетаний в графах, основанное на вычислении символического пфаффиана ориентированной матрицы смежности графа. Трудоемкость алгоритмов, основанных на таком подходе, связана со сложностью функции знака совершенного паросочетания в моделях обобщенных разрешающих деревьев. Получены нижние оценки сложности знака совершенного паросочетания через детерминированную коммуникационную сложность XOR-функции знака паросочетания. Эти оценки показывают ограничения метода символического пфаффиана как для общего случая, так и для случая разреженных графов.

Ключевые слова: совершенное паросочетание, пфаффиан, разрешающее дерево, коммуникационная сложность.

DOI: `10.31857/S0555292321020042`

§ 1. Введение

Хорошо известно [1], что задача подсчета числа совершенных паросочетаний в графе алгоритмически трудна; более точно, она является полной в классе $\#\mathbf{P}$.

Самый быстрый из известных на данный момент алгоритмов подсчета числа совершенных паросочетаний работает за время $O^*(2^{n/2})$, где n – число вершин в графе, $O^*(\cdot)$ обозначает асимптотическую оценку с точностью до полиномиального по n множителя [2].

Известно также [3], что в предположении одного из вариантов сильной гипотезы экспоненциального времени не существует алгоритмов подсчета числа совершенных паросочетаний, работающих за время $O^*(2^{o(n)})$.

Большое количество работ посвящено решению задачи подсчета числа совершенных паросочетаний для некоторых классов графов. Известны полиномиальные алгоритмы решения этой задачи для планарных графов, а также для графов ограниченного рода [4–6], графов, не содержащих минора $K_{3,3}$ [7], графов, не содержащих минора K_5 [8]. Для разреженных двудольных графов, в которых количество ребер не более чем в Δ раз превосходит количество вершин, известен алгоритм с временем работы $O^*(2^{(1-1/(5\Delta\log\Delta))n/2})$ [9].

Многие из этих алгоритмов используют предложенные Кастелейном в [4] пфаффовы ориентации графов. Судя по литературе, первым эту идею высказал Пойа [10] применительно к двудольным графам (точнее, к $(0,1)$-матрицам, которые естественным образом задают двудольный граф). Основанные на этой идее алгоритмы сводят подсчет числа совершенных паросочетаний в графе к вычислению детерминанта

[1] Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект № 20-11-20203).

(для двудольных графов) или пфаффиана (в общем случае) ориентированной матрицы смежности графа.

Естественным обобщением идеи Пойа – Кастелейна является использование символических детерминантов и пфаффианов вместо простого присваивания знаков. Под символическим детерминантом (пфаффианом) мы понимаем детерминант (пфаффиан) матрицы, элементы которой принадлежат некоторому кольцу многочленов от вспомогательных переменных. Подсчет числа совершенных паросочетаний в графе сводится к арифметическим операциям с коэффициентами многочленов от вспомогательных переменных.

В работах [11,12] исследовались возможности такого подхода для подсчета числа совершенных паросочетаний в двудольных графах. Для некоторого варианта реализации такого метода в [11] были доказаны нижние оценки времени работы вида $2^{\Omega(n)}$. В [12] эти оценки усилены до оптимальных (с точностью до мультипликативной константы) нижних оценок вида $2^{\Omega(n \log n)}$, а также получены нижние оценки для разреженных двудольных графов вида $2^{\Omega(n)}$.

В настоящей статье мы обобщаем проделанный в [11,12] анализ на случай общих графов. Предлагается вариант метода символического пфаффиана (см. § 3), сложность которого зависит от представления булевой функции знака паросочетания (см. определение (6) в § 4) разрешающим деревом в базисе целочисленных линейных функций. Модель обобщенных разрешающих деревьев подробно описана в § 4. Имея разрешающее дерево T в базисе целочисленных линейных функций, которое вычисляет функцию знака паросочетания для графа G, можно найти количество совершенных паросочетаний в графе G за время $\mathrm{poly}((nL(T))^{h(T)})$, где n – количество вершин в графе, $L(T)$ – максимум модулей коэффициентов линейных функций дерева, $h(T)$ – высота дерева (теорема 1). В частности, при $L = \mathrm{poly}(n)$ и $h = O(1)$ время вычисления ограничено полиномом от n. Это обобщает известные результаты [4,6].

Получены также нижние оценки для сложности функции знака паросочетания в моделях обобщенных разрешающих деревьев для полного графа K_{2n} (§ 4, теорема 2). Эти оценки имеют вид $\Omega(n \log n)$ и показывают, что предложенный подход неэффективен в случае произвольных графов. Линейные нижние оценки $\Omega(n)$ получены для связных графов на n вершинах, степень каждой вершины равна 3 (§ 7, теорема 3), что показывает неэффективность данного подхода и для произвольных графов ограниченной степени.

Остается открытым вопрос об описании тех классов графов, для которых метод символического пфаффиана дает эффективные алгоритмы.

Основным техническим приемом для построения нижних оценок является анализ коммуникационной сложности XOR-функции знака паросочетания (см. определения в § 5).

Полученные нижние оценки представляют самостоятельный интерес с точки зрения теории сложности булевых функций. Они также показывают, что знаки паросочетаний полного графа в некотором смысле распределены очень равномерно. Этот комбинаторный факт может оказаться полезным в других вопросах теории алгоритмов и теории сложности.

§ 2. Детерминант, перманент, пфаффиан и хафниан

Напомним определения основных многочленов, которые будут использоваться далее, и зафиксируем обозначения.

Пусть x_{ij}, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, – набор из n^2 переменных. Их естественно представлять как элементы матрицы переменных X порядка n.

Перманент и детерминант – это два многочлена от таких переменных, которые задаются очень похожими формулами в разложении на мономы:

$$\operatorname{per} X = \sum_{\pi \in S_n} \prod_{i=1}^{n} x_{i\pi(i)}, \tag{1}$$
$$\det X = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sign}(\pi) \prod_{i=1}^{n} x_{i\pi(i)},$$

здесь S_n – группа всех перестановок, $\operatorname{sign}(\pi)$ – знак перестановки π.

Однако сложность этих многочленов резко различается. Детерминант вычислим эффективно. Существуют алгоритмы вычисления детерминанта матрицы с элементами из любого коммутативного кольца, которые требуют выполнения лишь полиномиального количества арифметических операций в кольце [13] (в частности, эти алгоритмы не используют операцию деления).

С другой стороны, вычисление перманента $(0,1)$-матрицы является #**P**-полной задачей [1].

Перманент $(0,1)$-матрицы имеет простую комбинаторную интерпретацию. По двудольному графу G построим $(0,1)$-матрицу B_G, строки которой соответствуют вершинам одной доли, а столбцы – другой. На пересечении i-й строки и j-го столбца стоит 1 тогда и только тогда, когда в G есть ребро из вершины i в вершину j. Это соответствие взаимно однозначно: для любой $(0,1)$-матрицы X существует такой граф G, что $X = B_G$. Из определения перманента (1) сразу видно, что $\operatorname{per} B_G$ равен количеству совершенных паросочетаний в графе G.

В случае произвольной матрицы значение перманента будем понимать как сумму весов совершенных паросочетаний во взвешенном двудольном графе, считая вес паросочетания равным произведению весов входящих в него ребер.

Паросочетаниям в произвольных графах отвечают значения другого многочлена – хафниана – на $(0,1)$-матрицах. Хафниан для симметрической матрицы переменных размера $2n \times 2n$ (т.е. $x_{ij} = x_{ji}$ для всех i, j) определяется так:

$$\operatorname{Hf} X = \sum_{\mathfrak{m} \in \mathcal{M}_{2n}} \prod_{\{i,j\} \in \mathfrak{m}}^{n} x_{ij}. \tag{2}$$

Здесь $\mathcal{M}_{2n}$ – это множество разбиений множества $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ на n неупорядоченных пар (и разбиение, и пары неупорядоченные). Другими словами, $\mathcal{M}_{2n}$ – это множество совершенных паросочетаний в полном графе K_{2n}.

Обозначим через X_G симметрическую матрицу с элементами из множества переменных x_e, $e \in E(G)$, и 0, такую что $(X_G)_{i,j} = x_e$, если $e = \{i, j\}$, и $(X_G)_{i,j} = 0$, если $\{i, j\} \notin E(G)$. Через A_G будем обозначать матрицу смежности графа G. Она получается из X_G подстановками $x_e = 1$.

Из (2) видно, что $\operatorname{Hf} A_G$ равен количеству совершенных паросочетаний в графе G. Как и в случае двудольных графов, значение $\operatorname{Hf} X_G$ равно сумме весов совершенных паросочетаний в графе G.

Между перманентом и хафнианом есть простое соотношение (см. [2])

$$\operatorname{per} X = \operatorname{Hf} Y, \quad \text{где } Y = \begin{pmatrix} 0 & X \\ X^T & 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому вычисление хафниана $(0,1)$-матрицы также является #**P**-полной задачей.

Как и у перманента, у хафниана есть эффективно вычислимый компаньон – пфаффиан. Пфаффиан определяется для кососимметрических матриц. В кососимметрической матрице порядка $2n$ выделим *ориентацию* $\varepsilon_{ij} \in \{+1, -1\}$, $\varepsilon_{ij} = -\varepsilon_{ji}$, и симметрическую часть $x_{ij} = x_{ji}$. Ориентация задает направление на ребрах полного графа: если $\varepsilon_{ij} = +1$, то у ребра $\{i, j\}$ считаем началом вершину i, а концом – вершину j. Поэтому паросочетанию $\mathfrak{m}$ отвечает *ориентированное паросочетание* – ориентированный граф $\mathfrak{m}^\varepsilon$ с множеством ребер

$$\{(i_s j_s) : \{i_s j_s\} \in \mathfrak{m},\ \varepsilon_{i_s j_s} = +1\}.$$

Нетрудно видеть, что перестановки S_n, сохраняющие ориентированное паросочетание $\mathfrak{m}^\varepsilon$, четные. Поэтому все ориентированные паросочетания разбиваются на два класса: внутри каждого класса ориентированные паросочетания переводятся друг в друга четными перестановками, а между классами – нечетными.

Присвоив знак $+1$ какому-нибудь ориентированному паросочетанию $\mathfrak{m}_0^{\varepsilon_0}$, определим знаки остальных паросочетаний по правилу: $\operatorname{sign}(\mathfrak{m}^\varepsilon) = +1$, если $\mathfrak{m}^\varepsilon$ лежит в том же классе, что и $\mathfrak{m}_0^{\varepsilon_0}$, а в противном случае $\operatorname{sign}(\mathfrak{m}^\varepsilon) = -1$. Обычно в определении пфаффиана выбирается паросочетание

$$\{(1, 2), (3, 4), \ldots, (2n - 1, 2n)\},$$

но выбор другого $\mathfrak{m}_0^{\varepsilon_0}$ разве что изменит знаки всех паросочетаний одновременно.

В этих терминах пфаффиан матрицы $\varepsilon \bullet X = (\varepsilon_{ij} x_{ij})$ равен

$$\operatorname{Pf}(\varepsilon \bullet X) = \sum_{\mathfrak{m} \in \mathcal{M}_{2n}} \operatorname{sign}(\mathfrak{m}^\varepsilon) \prod_{\{i,j\} \in \mathfrak{m}} x_{ij}.$$

Здесь и далее мы обозначаем через $\bullet$ покомпонентное умножение матриц (произведение Адамара, или произведение Шура [14]).

Пфаффиан выражается через детерминант (см., например, [15]):

$$\det X = (\operatorname{Pf} X)^2. \tag{3}$$

Аналогично детерминанту, для вычисления пфаффиана матрицы с элементами из любого коммутативного кольца также существуют алгоритмы, которые требуют выполнения лишь полиномиального количества арифметических операций (сложения, вычитания и умножения) в кольце [16].

Нетрудно проверить следующие свойства знаков ориентированных паросочетаний.

Во-первых, $\operatorname{sign}(\mathfrak{m}^{\varepsilon'}) = \operatorname{sign}(\mathfrak{m}^{\varepsilon''})$, если и только если четное количество ребер $\mathfrak{m}$ имеет разную ориентацию в ε' и ε''.

Во-вторых, $\operatorname{sign}(\mathfrak{m}_1^\varepsilon)\operatorname{sign}(\mathfrak{m}_2^\varepsilon)$ совпадает с произведением *знаков циклов*, на которые разбивается симметрическая разность $\mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2$ (все эти циклы имеют четную длину). Знак цикла равен $(-1)^{1+b}$, где b – количество ребер на цикле, ε-ориентированных против направления обхода цикла (выбор направления обхода неважен для цикла четной длины).

Пример 1. Занумеруем вершины графа числами от 1 до $2n$ и ориентируем ребро (i, j) от вершины с меньшим номером к вершине с бóльшим номером.

Будем считать положительным знак паросочетания

$$\{(1, 2), (3, 4), \ldots, (2n - 1, 2n)\}.$$

Используя знаки циклов, нетрудно проверить, что знак паросочетания $\mathfrak{m}$ определяется четностью количества пересекающихся пар ребер [6]. По определению ребра $\{a, b\}$, $\{c, d\}$ пересекаются, если $a < c < b < d$.

§ 3. Метод символического пфаффиана

Граф G называется *пфаффовым*, если для некоторой ориентации ε знаки всех ориентированных совершенных паросочетаний $\mathfrak{m}^{\varepsilon}$ графа G одинаковы. Такая ориентация называется *пфаффовой*.

Для графа G с пфаффовой ориентацией ε выполняется равенство

$$\operatorname{Hf} X_G = |\operatorname{Pf}(\varepsilon \bullet X_G)|.$$

Поэтому хафниан $\operatorname{Hf} X_G$ и, в частности, количество совершенных паросочетаний $\operatorname{Hf} A_G$ в пфаффовом графе с заданной пфаффовой ориентацией вычисляется за полиномиальное время.

Для простоты мы ограничиваемся подсчетом количества совершенных паросочетаний в графе, т.е. вычислением $\operatorname{Hf} A_G$. Заметим, что все последующие рассуждения без труда переносятся на задачу подсчета значения хафниана $\operatorname{Hf} X_G$ при заданных значениях переменных x_e.

Примером пфаффовых графов являются планарные графы. Доказательство существования пфаффовых ориентаций для планарных графов и эффективный алгоритм их построения были предложены Кастелейном [4]. До сих пор не известны ни структурный критерий пфаффовости графов, ни полиномиальный алгоритм проверки пфаффовости. Отметим, что для двудольных графов известны как структурная характеризация (теорема Литтла – см. [17] или альтернативное доказательство в [18]), так и полиномиальный алгоритм проверки пфаффовости двудольного графа [19].

Мы рассматриваем обобщение этого подхода. А именно, вместо задающих ориентацию знаков будем домножать элементы матрицы X_G на мономы из алгебры $\mathcal{R}_h = \mathbb{R}[t_0, \ldots, t_{h-1}]$ многочленов от h вспомогательных переменных[2]. Зафиксируем некоторую ориентацию ребер ε^0 и для краткости знаки паросочетаний относительно этой ориентации обозначаем просто через $\operatorname{sign}(\mathfrak{m})$. Через τ обозначим матрицу с многочленами (мономами) из алгебры $\mathcal{R}_h$ (матрица "обобщенных знаков"). Пфаффиан матрицы $A_{\tau,G} = \varepsilon^0 \bullet \tau \bullet A_G$ является многочленом от переменных t_i. Обозначим множество совершенных паросочетаний в графе G через $\mathcal{M}(G)$. Тогда

$$\operatorname{Pf} A_{\tau,G} = \sum_{\mathfrak{m} \in \mathcal{M}(G)} \operatorname{sign}(\mathfrak{m}) \prod_{\{i,j\} \in \mathfrak{m}}^{n} \tau_{ij}(t_1, \ldots, t_h) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\mathfrak{m} \in \mathcal{M}(G)} \operatorname{sign}(\mathfrak{m}) \tau(\mathfrak{m}). \tag{4}$$

Суть метода символического пфаффиана состоит в том, чтобы подсчитать количество совершенных паросочетаний, исходя из многочленов вида $\operatorname{Pf} A_{\tau,G}$ (возможно использование нескольких матриц τ). Основная идея состоит в том, чтобы мономы $\tau(\mathfrak{m})$ разделяли знаки паросочетаний из $\mathcal{M}(G)$: если $\operatorname{sign}(\mathfrak{m}_1) \neq \operatorname{sign}(\mathfrak{m}_2)$, то $\tau(\mathfrak{m}_1) \neq \tau(\mathfrak{m}_2)$. В таком случае количество совершенных паросочетаний равно сумме модулей коэффициентов $\operatorname{Pf} A_{\tau,G}$. В следующем § 4 мы опишем более сложный вариант этого метода, в котором используются мономы из многочленов $\operatorname{Pf} A_{\tau,G}$ с разными τ.

Для пфаффовых графов метод символического пфаффиана применим в этом, самом простом, виде. Пусть ε – пфаффова ориентация. Сопоставим ей матрицу τ, где $\tau_{ij} = t$, если $\varepsilon_{ij} = -\varepsilon^0_{ij}$, и $\tau_{ij} = 1$, если $\varepsilon_{ij} = \varepsilon^0_{ij}$. Как уже отмечалось выше, $\operatorname{sign}(\mathfrak{m}^{\varepsilon}) = \operatorname{sign}(\mathfrak{m}^{\varepsilon^0})$, если и только если четное количество ребер $\mathfrak{m}$ имеет разную ориентацию в ε и ε^0. Это означает, что $\tau(\mathfrak{m}) = t^{2k}$, если $\operatorname{sign}(\mathfrak{m}^{\varepsilon}) = \operatorname{sign}(\mathfrak{m}^{\varepsilon^0})$, и $\tau(\mathfrak{m}) =$

[2] Конечно, в качестве множителей можно использовать произвольные многочлены. Однако пока не видно способов применить эту более общую конструкцию. Поэтому здесь мы ограничиваемся мономами.

$= t^{2k+1}$, если $\operatorname{sign}(\mathfrak{m}^{\varepsilon}) = -\operatorname{sign}(\mathfrak{m}^{\varepsilon^0})$. Поэтому в (4) знаки всех мономов четной степени одинаковы, как и знаки всех мономов нечетной степени.

Уже Кастелейн отмечал, что хафниан матрицы X_G для графа ограниченного рода g выражается как сумма 4^g пфаффианов. Первое математическое доказательство для случая ориентированного рода появилось, по всей видимости, в работе [5]. Несколько позже Теслер [6] предложил другое доказательство этого факта и доказал аналогичное утверждение для неориентированного рода. В терминах метода символического детерминанта он доказал, что для графов ограниченного рода g существует подходящая матрица мономов τ от $2g$ переменных, которая разделяет знаки паросочетаний. В случае ориентированного рода достаточно учитывать только четность степеней переменных в мономах $\tau(\mathfrak{m})$, в случае неориентированного рода требуется учитывать степени переменных по модулю 4.

Обсудим вычислительную сложность метода символического пфаффиана. Помимо порядка матрицы n, она зависит от количества вспомогательных переменных h, максимума показателей степеней в мономах матрицы τ, который будем обозначать через L, и количества вычислений символических пфаффианов N (в общем случае будет вычисляться несколько пфаффианов). Сложность конкретной реализации метода мы будем измерять величиной $N(nL)^h$ по следующим соображениям.

Алгоритм вычисления пфаффиана [16] выполняет $\Theta(n^4)$ арифметических действий с элементами кольца, где n – порядок матрицы. Алгебраические схемы вычисления пфаффиана из работы [16] устроены так, что все промежуточные результаты вычисления являются суммами произведений матричных элементов с коэффициентами ±1. Все мономы, возникающие в этих вычислениях, являются произведениями мономов матрицы τ. Поэтому при вычислении пфаффиана матрицы мономов в промежуточных вычислениях и окончательном ответе возникают многочлены, степени мономов в которых ограничены величиной n^2L, а коэффициенты ограничены по модулю 2^{n^2}. Общее количество таких мономов от h вспомогательных переменных равно $(n^2L)^h$. Поэтому время выполнения арифметических операций на таких многочленах составляет $\operatorname{poly}((n^2L)^h)$. Общее время вычисления оказывается ограниченным полиномом от выбранной меры сложности $N(nL)^h$.

В частности, при $L = \operatorname{poly}(n)$ и $h = O(1)$ время вычисления символического пфаффиана ограничено полиномом от n.

Отметим, что верхняя оценка числа мономов может быть улучшена в некоторых случаях. Например, если использовать не алгебру многочленов, а ее факторалгебру $\mathcal{A}_{h,d} = \mathbb{R}[t_1, \dots, t_{2g}]/(t_i^d - 1 : \ 1 \leqslant i \leqslant h)$, количество мономов будет оцениваться сверху как d^h после приведения монома к стандартному виду. Скажем, для графов ограниченного рода g достаточно проводить вычисления в алгебрах $\mathcal{A}_{2g,2}$ (случай ориентированного рода) и $\mathcal{A}_{2g,4}$ (случай неориентированного рода).

Заметим, что случай алгебры $\mathcal{A}_h = \mathcal{A}_{h,2}$ особенно важен при анализе возможностей метода символического пфаффиана (см. обсуждение в § 5 и лемму 3 там же).

Для вариантов метода символического пфаффиана, использующих алгебры $\mathcal{A}_{h,d}$, более естественной мерой сложности является Nnd^h.

Отметим, что используемая мера сложности не дает абсолютных нижних оценок времени работы. В принципе возможна такая реализация метода, в которой количество мономов в промежуточных многочленах гораздо меньше $(n^2L)^h$. Однако в настоящее время неизвестны способы существенного сокращения количества мономов, и сомнительно, что они вообще существуют.

§ 4. Разрешающие деревья

В этом параграфе мы опишем самую общую известную на данный момент форму метода символического пфаффиана и свяжем анализ возможностей этого метода с задачами вычисления булевых функций в модели обобщенных разрешающих деревьев.

В стандартной модели разрешающих деревьев вычисление булевой функции происходит в результате последовательности запросов переменных, а сложность вычисления зависит лишь от количества запросов (подробнее см., например, в [20]).

В обобщенной модели возможны запросы не только переменных, но и произвольных функций от булевых переменных из некоторого множества функций B. По аналогии со схемной сложностью это множество будем называть *базисом.*

Разрешающее дерево в базисе B – это корневое дерево. Каждой внутренней вершине v (не листу) разрешающего дерева приписана некоторая функция $l_v(x) \in B$. Потомков вершины столько, сколько значений может принимать функция $l_v(x)$. Каждому потомку присвоено одно из возможных значений этой функции. В листьях дерева дополнительно записаны *результаты* вычисления: значения 0 или 1.

Разрешающее дерево в базисе B вычисляет булеву функцию $f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ по такому правилу. Аргумент x функции f определяет последовательность вершин, которая начинается в корне и заканчивается в листе. Следующим после вершины v является тот ее потомок, которому присвоено значение $l_v(x)$. Результат в листе, на котором заканчивается эта последовательность, и есть $f(x)$.

Разрешающее дерево по определению вычисляет всюду определенную функцию. Далее потребуются частичные функции. Будем считать, что разрешающее дерево вычисляет частичную функцию, если оно вычисляет некоторое всюду определенное продолжение этой функции.

Сложность булевой функции в модели разрешающих деревьев в базисе B – это минимум величины $h(T)\lceil \log_2 b(T) \rceil$ по всем разрешающим деревьям в базисе B, вычисляющим функцию f. Здесь $h(T)$ – высота дерева, а $b(T)$ – максимальное ветвление (количество потомков у одной вершины)[3]. Будем обозначать сложность функции f в модели разрешающих деревьев в базисе B через $\mathbf{D}_B(f)$.

Стандартная модель разрешающих деревьев отвечает базису, состоящему из функций-проекций $(x_1,\ldots,x_n) \mapsto x_i$. Сложность булевой функции в таком базисе обозначаем через $\mathbf{D}(f)$. В этом случае значения функций принадлежат множеству $\{0,1\}$ и разрешающие деревья являются бинарными деревьями, а сложность f совпадает с минимальной высотой разрешающего дерева, которое вычисляет f.

Разрешающие деревья с линейными запросами (или линейные разрешающие деревья – parity decision trees) отвечают базису линейных булевых функций $(x_1,\ldots,x_n) \mapsto x_{i_1} \oplus x_{i_2} \oplus \ldots \oplus x_{i_k}$ ($\oplus$ обозначает сложение по модулю 2). Сложность булевой функции в базисе линейных разрешающих деревьев обозначается через $\mathbf{D}_\oplus(f)$. В этом случае множество значений функций также $\{0,1\}$, и линейное разрешающее дерево – бинарное.

Отметим одно существенное различие между сложностью (частичной) функции в стандартной модели разрешающих деревьев и в модели линейных разрешающих деревьев.

Очевидной верхней оценкой сложности $\mathbf{D}(f)$ является количество переменных (при известных значениях всех аргументов значение функции однозначно определено). Для сложности в стандартной модели разрешающих деревьев известны примеры тотальных функций от n переменных сложности ровно n. Например, такой функцией является дизъюнкция переменных. Применением метода противника (adversary method) [20] нетрудно проверить, что также равна n сложность частичной функции, которая определена на $n+1$ наборе значений аргументов $(0,\ldots,0)$, $(1,0,\ldots,0)$, $(0,1,0,\ldots,0)$, $\ldots$, $(0,0,\ldots,0,1)$ и совпадает с дизъюнкцией на области

[3] Неформально смысл логарифмического множителя в том, чтобы свести общую модель к модели с запросами, допускающими бинарный ответ.

определения. Стратегия противника остается той же самой, что и для обычной (всюду определенной) дизъюнкции.

Для сложности в модели линейных разрешающих деревьев такой пример невозможен. Через $\mathrm{Dom}\, f$ обозначаем область определения f.

Лемма 1. $\mathbf{D}_{\oplus}(f) = O(\log|\mathrm{Dom}\, f|)$ *для любой функции* f.

Доказательство. Докажем, что для любого множества $D \subseteq \mathbb{F}_2^n$ существуют $k = O(\log|D|)$ линейных функционалов (линейных однородных функций) $s_1, \dots, s_k$ на $\mathbb{F}_2^n$, разделяющих точки D. Это означает, что для любой пары $x \in D$, $y \in D$, $x \neq y$, существует такое i, что $s_i(x) \neq s_i(y)$.

Для двух различных точек $x \neq y$ есть ровно 2^{n-1} линейных функционалов, которые не разделяют x, y (т.е. равны 0 на $x \oplus y$, здесь $\oplus$ обозначает покомпонентное сложение векторов). Поэтому k случайных линейных функционалов, выбранных независимо, не различают эту пару с вероятностью 2^{-k}. Всего есть $|D|(|D|-1)/2$ пар точек из D. Поэтому при $2^{-k}|D|(|D|-1)/2 < 1$ найдутся k функционалов, которые разделяют все пары (оценка объединения). Это условие выполняется для некоторого $k = O(\log|D|)$.

Имея набор из $k = O(\log|\mathrm{Dom}\, f|)$ линейных функционалов, разделяющих точки из $\mathrm{Dom}\, f$, легко построить разрешающее дерево, которое вычисляет f. Это полное бинарное дерево высоты k. На уровне i этого дерева вычисляется функционал s_i (запросы неадаптивные, не зависят от ответов). В каждом листе, отвечающем (ровно одной) точке из $\mathrm{Dom}\, f$, записываем значение функции, в остальных листах пишем произвольный результат вычисления. ▲

Обобщая, можно рассмотреть базис S, состоящий из всех симметрических функций от некоторого подмножества переменных. В этот базис входят не только линейные функции, но функции сложения по произвольному модулю q, а также функции голосования. Сложность булевой функции в таком базисе обозначаем через $\mathbf{D}_S(f)$.

Из определений очевидны неравенства

$$\mathbf{D}_S(f) \leqslant \mathbf{D}_{\oplus}(f) \leqslant \mathbf{D}(f).$$

Для метода символического пфаффиана важен базис целочисленных линейных функций. В целочисленном разрешающем дереве вершинам приписаны линейные функционалы $\ell_v(x_1, \dots, x_n)$ с целыми неотрицательными коэффициентами. Значения таких функционалов лежат на отрезке $[0, nL]$, где L – максимум коэффициентов линейных функционалов в разрешающем дереве. Сложность булевой функции f в этом базисе обозначаем через $\mathbf{D}_{\mathbb{Z}}(f)$.

Предложение 1. $\mathbf{D}_{\mathbb{Z}}(f) \leqslant \mathbf{D}_S(f)\lceil\log_2(n+1)\rceil$ *для любой булевой функции* f *от* n *переменных.*

Доказательство. Значение симметрической булевой функции зависит только от количества единиц среди ее аргументов $y_1, \dots, y_k$, т.е. от значения линейной функции $y_1 + \ldots + y_k$.

По дереву T в базисе симметрических булевых функций построим дерево $z(T)$ в базисе целочисленных линейных функций по следующему правилу.

Если T имеет высоту 0, то корень является листом. Дерево $z(T)$ в таком случае также имеет высоту 0 и в его корне записан тот же результат, что и в корне дерева T.

Если T имеет высоту > 0 и в корне вычисляется симметрическая функция $s(y)$ от k переменных $y_1, \dots, y_k$, то дерево $z(T)$ имеет ветвление $k+1$ в корне. Корню дерева $z(T)$ присваивается функция $y_1 + \ldots + y_k$, а потомок корня, которому присвоено значение j, является корнем дерева $z(T_\alpha)$, где $\alpha = s(z)$, а в z ровно j единиц.

Индукцией по построению дерева доказывается, что оба дерева вычисляют одну и ту же функцию.

Высота деревьев T и $z(T)$ одинакова, а максимальное ветвление дерева $z(T)$ не превосходит $n+1$. ▲

Для сложности разрешающих деревьев в базисе целочисленных функций выполняется аналог леммы 1.

Лемма 2. *Для любой функции f справедлива оценка* $\mathbf{D}_{\mathbb{Z}}(f) = O(\log|\mathrm{Dom}\, f|)$.

Доказательство. Рассуждение повторяет доказательство леммы 1. Но теперь разделяем точки целочисленными функционалами.

Для применения вероятностной оценки оценим количество целочисленных функционалов с коэффициентами в отрезке $[1, L]$, которые не различают некоторый фиксированный вектор $x - y \in \{\pm 1, 0\}^n$. Выберем первые $n-1$ коэффициентов произвольно. Тогда из условия неразличения получаем линейное уравнение на последний коэффициент (не все решения таких уравнений годятся, они могут лежать вне $[1, L]$; нам достаточно верхней оценки). Поэтому неразличающих функционалов не более чем L^{n-1}, их доля среди всех линейных функционалов с коэффициентами из отрезка $[1, L]$ не более L^{-1}.

Аналогично доказательству леммы 1 при выполнении неравенства

$$L^{-k} D(D-1)/2 < 1$$

k линейных функционалов, выбранных случайно и независимо, разделяют множество из D точек с положительной вероятностью. Поэтому для существования k разделяющих линейных функционалов, коэффициенты которых лежат в отрезке $[1, L]$, достаточно выполнения условия

$$k \log L > 2 \log D. \tag{5}$$

Выберем $L = n$. Тогда ветвление разрешающего дерева, неадаптивно вычисляющего k разделяющих функционалов, равно $b = nL = L^2$. Выбирая как можно меньшее k, при котором выполняется (5), получаем верхнюю оценку на сложность разрешающего дерева $k \log b = 2k \log L = O(\log|\mathrm{Dom}\, f|)$. ▲

Нас будет интересовать вычисление знака паросочетания в модели разрешающих деревьев. Для определения этой (частичной) булевой функции перейдем от ориентаций ребер к булевым переменным. Рассмотрим координатное векторное пространство $\mathbb{F}_2^{\binom{2n}{2}}$, индексированное парами $\{i, j\}$, $i \neq j$, $1 \leqslant i, j \leqslant 2n$, т.е. ребрами полного графа на $2n$ вершинах (вершины перенумерованы числами от 1 до $2n$). Графам на этом множестве вершин, в том числе и паросочетаниям, сопоставляются векторы пространства $\mathbb{F}_2^{\binom{n}{2}}$. Через $\mathbb{F}_2^{E(G)}$ будем обозначать координатное подпространство, натянутое на базисные векторы, отвечающие ребрам графа G. Зафиксируем некоторую ориентацию ребер полного графа ε_0 (скажем, выбранную в примере 1), знак паросочетания $\mathfrak{m}$ относительно этой ориентации обозначаем через $\mathrm{sign}(\mathfrak{m})$.

Для каждого графа G определим частичную функцию знака паросочетаний этого графа $\mathrm{sign}_G \colon \mathbb{F}_2^{E(G)} \to \{0, 1\}$ как

$$\mathrm{sign}_G(X) = \begin{cases} 0, & \text{если } X = \mathfrak{m} \in \mathcal{M}(G) \text{ и } \mathrm{sign}(\mathfrak{m}) = 1, \\ 1, & \text{если } X = \mathfrak{m} \in \mathcal{M}(G) \text{ и } \mathrm{sign}(\mathfrak{m}) = -1, \\ \text{не определена} & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{6}$$

Пример 2. Для цикла четной длины C_{2k} область определения функции $\mathrm{sign}_{C_{2k}}$ состоит из двух векторов, отвечающих двум совершенным паросочетаниям, на которые разбивается цикл. Хотя граф C_{2n} пфаффовый, функция $\mathrm{sign}_{C_{2k}}$ не обязательно постоянна на области определения, это зависит от выбора ориентации ε_0.

Однако для любого пфаффова графа эта функция линейна на области определения (поскольку знак паросочетания $\mathfrak{m}$ относительно пфаффовой ориентации отличается от знака относительно ориентации ε_0 на четность количества ребер в $\mathfrak{m}$, различно ориентированных в этих ориентациях).

Т е о р е м а 1. *Пусть дано разрешающее дерево T в базисе целочисленных линейных функций, вычисляющее функцию* sign_G *графа G на n вершинах. Количество листьев в этом дереве обозначим через $s(T)$, высоту – через $h(T)$, максимум коэффициентов в линейных функциях разрешающего дерева T – через $L(T)$. Тогда количество совершенных паросочетаний в графе G вычисляется за время* $\mathrm{poly}(n)$ *по результатам вычисления $s(T)$ символических пфаффианов, мономы в матрицах которых зависят от $h(T)$ вспомогательных переменных, а степени переменных в мономах ограничены величиной $L(T)$. В частности, общее время вычисления составляет* $\mathrm{poly}((n^2L(T))^{h(T)}, n)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть вычисление функции sign_G на векторе $X \in \mathbb{F}_2^{E(G)}$ порождает последовательность вершин $v_0, \ldots, v_h$ дерева T, от корня к листу. Через

$$\ell_k(X) = \sum_{e \in E(G)} \lambda_e^{(k)} x_e, \quad 0 \leqslant k < h,$$

обозначим линейные функции, приписанные вершинам этого пути, а через α_k – значения этих функций на векторе X.

Поскольку дерево вычисляет функцию sign_G, все совершенные паросочетания графа G, удовлетворяющие соотношениям

$$\ell_k(\mathfrak{m}) = \alpha_k, \tag{7}$$

имеют одинаковый знак.

Зададим матрицу “обобщенных знаков” τ по правилу

$$\tau_{i,j} = \prod_{k=0}^{h-1} t_k^{\lambda_e^{(k)}}, \quad \{i,j\} = e \in E(G), \qquad \tau_{i,j} = 0, \quad \{i,j\} \notin E(G),$$

мономы в этой матрице зависят от $h(T)$ вспомогательных переменных, степени переменных ограничены величиной $L(T)$.

Коэффициент m_α при мономе $\prod\limits_{k=0}^{h-1} t_k^{\alpha_k}$ в разложении $\mathrm{Pf}\, A_{\tau,G}$ равен $\pm 1 \cdot P_{v_h}$, где P_{v_h} – количество совершенных паросочетаний графа G, удовлетворяющих (7).

Суммируя модули коэффициентов m_α по всем листьям дерева, получаем общее количество совершенных паросочетаний в графе G.

Каждый из этих коэффициентов вычисляется за время $\mathrm{poly}((nL(T))^{h(T)})$. Ветвление дерева в базисе целочисленных линейных функций ограничено сверху $nL(T)$, поэтому количество листьев $s(T)$ не превосходит $(nL(T))^{h(T)}$. Отсюда следует указанная в теореме оценка времени работы. ▲

Замечание 1. Для базиса линейных разрешающих деревьев оценку теоремы можно улучшить до $\mathrm{poly}(2^{h(T)}, n)$. В этом случае можно проводить вычисления в алгебре $\mathcal{A}_{h(T)}$, размерность которой равна $2^{h(T)}$.

Для применения теоремы 1 нужно уметь строить разрешающие деревья для sign_G в базисе целочисленных линейных функций небольшой высоты. Здесь возникают вопросы, аналогичные вопросам о пфаффовых графах: структурная характеризация графов, для которых возможны разрешающие деревья небольшой высоты, и алгоритмы построения таких деревьев. Эти вопросы далеки от разрешения.

Подсчет совершенных паросочетаний в графе является #**P**-полной задачей и даже возможность вычисления за время $2^{o(n)}$ противоречит популярным гипотезам теории сложности [3]. Противоречат ли верхние оценки времени работы алгоритма из теоремы 1 этим гипотезам? Мы дадим отрицательный ответ на этот вопрос.

Пусть T – разрешающее дерево в базисе целочисленных линейных функций, вычисляющее функцию $\mathrm{sign}_{K_{2n}}$ для полного графа K_{2n}. Используем те же обозначения для параметров дерева, что и в формулировке теоремы 1. Так как $b(T) \leqslant nL(T)$, то $2^{\mathbf{D}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{sign}_G)} \leqslant (nL(T))^{h(T)}$, т.е. логарифм меры сложности алгоритма из теоремы 1 ограничен снизу величиной $\mathbf{D}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{sign}_G)$.

Мы докажем сильные нижние оценки на эту сложность.

Теорема 2. *Справедливы оценки* $\mathbf{D}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{sign}_{K_{2n}}) = \Omega(n \log n)$ *и* $\mathbf{D}_{\oplus}(\mathrm{sign}_{K_{2n}}) = \Omega(n \log n)$.

Всего совершенных паросочетаний в полном графе $2^{O(n \log n)}$. В силу лемм 1 и 2 оценки теоремы оптимальны с точностью до мультипликативной константы.

Доказательство теоремы 2 см. ниже в § 6.

Замечание 2. Первая часть теоремы 2 и предложение 1 дают лишь линейную по n нижнюю оценку для $\mathbf{D}_S(\mathrm{sign}_{K_{2n}})$ и $\mathbf{D}_{\oplus}(\mathrm{sign}_{K_{2n}})$. Как уже отмечалось, в случае линейных разрешающих деревьев возможно вычисление в факторалгебре $\mathcal{A}_h$, которое быстрее общего алгоритма теоремы 1. Второе утверждение теоремы 2 показывает, что использование этой факторалгебры не дает существенного выигрыша в общем случае. Для разрешающих деревьев в базисе симметрических функций такого ускорения вычислений неизвестно.

Вопрос о сложности знака паросочетания в модели разрешающих деревьев в базисе симметрических функций представляется также интересным с точки зрения теории сложности булевых функций. В настоящее время этот вопрос остается открытым.

Для получения нижних оценок сложности знака паросочетания в моделях обобщенных разрешающих деревьев мы свяжем эту сложность с оценками сложности коммуникационных задач.

§ 5. Коммуникационная сложность для знака паросочетания

Кратко напомним основные понятия коммуникационной сложности, использованные в этой статье, и зафиксируем обозначения. Подробное изложение этой дисциплины читатель может найти в учебниках, скажем, в классическом учебнике [21] или в уже упомянутой книге [20]. Весьма подробный обзор методов построения нижних оценок в коммуникационной сложности содержится в [22].

Коммуникационная задача для двух участников (их по традиции именуют Алиса и Боб) задается функцией $F\colon A \times B \to Z$. Обычно функция предполагается всюду определенной, но все даваемые ниже определения имеют точно тот же смысл для частично определенных функций; использованные в статье результаты рутинно переносятся на случай частично определенных функций.

Задача состоит в следующем: Алиса знает первый аргумент x функции F, а Боб – второй аргумент y. Участникам нужно вычислить значение $F(x, y)$, обменявшись как можно меньшим количеством информации. Протокол коммуникации Алисы и Боба – это корневое бинарное дерево, каждому внутреннему узлу которого приписан участник и функция выбора потомка в зависимости от известного данному участнику аргумента функции. Листьям дерева приписаны элементы множества Z. Пара аргументов x, y функции F порождает путь по дереву протокола из корня в лист, а листу сопоставлен какой-то элемент из Z. Так определяется функция, вычисляемая протоколом.

Протокол всегда вычисляет всюду определенную функцию. Поэтому протоколом вычисления частичной функции называется протокол вычисления всюду определенного продолжения этой функции.

Детерминированной коммуникационной сложностью $\mathbf{C}(F)$ функции F называется наименьшая высота протокола, вычисляющего F.

Обозначим через $M_{2n}(\pm 1, 0)$ множество симметрических матриц порядка $2n$ с матричными элементами ± 1, 0. Определим аддитивную функцию знака совершенного паросочетания в графе G как

$$\operatorname{sign}_G^{\mathbb{Z}}(X, Y) = \begin{cases} \operatorname{sign}(\mathfrak{m}), & \text{если } X + Y = A_{\mathfrak{m}},\ \mathfrak{m} \in \mathcal{M}(G), \\ \text{не определена} & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{8}$$

Здесь $X, Y \in M_{2n}(\pm 1, 0)$, а сложение обычное, целочисленное. Мы считаем, что вершины графа нумеруются числами от 1 до $2n$.

Пример 3. Пусть $G = K_4$ – полный граф на четырех вершинах, занумерованных числами от 1 до 4, и фиксированная ориентация ε_0 та же, что и в примере 1. Тогда для

$$X_1 = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & +1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & +1 \\ +1 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$X_3 = \begin{pmatrix} +1 & 0 & +1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & +1 & 0 & +1 \end{pmatrix}$$

получаем $\operatorname{sign}_G^{\mathbb{Z}}(X_1, X_2) = +1$, $\operatorname{sign}_G^{\mathbb{Z}}(X_2, X_3) = -1$, а $\operatorname{sign}_G^{\mathbb{Z}}(X_1, X_3)$ не определена.

Предложение 2. *Справедливо неравенство* $\mathbf{C}(\operatorname{sign}_G^{\mathbb{Z}}) \leqslant 2\mathbf{D}_{\mathbb{Z}}(\operatorname{sign}_G)$.

Доказательство. Алиса и Боб могут имитировать вычисление по оптимальному разрешающему дереву T в базисе целочисленных линейных функций, обмениваясь значениями функций в вершинах разрешающего дерева на своих матрицах. В силу линейности это позволяет восстановить значение функции на сумме этих матриц. Для передачи одного значения нужно $\lceil \log b(T) \rceil$ битов, а общее количество переданной информации будет как раз $2h(T) \log b(T) = 2\mathbf{D}_{\mathbb{Z}}(\operatorname{sign}_G)$. Двойка возникает из-за того, что для корректного выбора пути по дереву коммуникационного протокола каждый участник должен знать значение функции в текущей вершине. ▲

Коммуникационная сложность $\mathbf{C}(\operatorname{sign}_G^{\mathbb{Z}})$ дает нижнюю оценку $\mathbf{D}_{\mathbb{Z}}(\operatorname{sign}_G)$. Поэтому для построения нижних оценок сложности функции знака паросочетания в модели разрешающих деревьев можно использовать хорошо развитую технику построения нижних оценок в коммуникационной сложности.

Функция (8) является обобщением хорошо известных XOR-функций. Для булевой функции $f(x)$, $x \in \{0, 1\}^m$, XOR-функция $f \circ \oplus$ является булевой функцией от $2m$ булевых переменных, она задается равенством $f \circ \oplus(x, y) = f(x \oplus y)$. XOR-функции были предложены в работе [23] и оказались полезными для анализа нескольких важных вопросов в коммуникационной сложности (см., например, [23–25]).

Для сложности $\mathbf{D}_{\oplus}(\operatorname{sign}_G)$ есть аналогичная оценка через XOR-функцию знака паросочетания $\operatorname{sign}_G \circ \oplus$, определенную на множестве $\operatorname{Sym}_{2n}(\mathbb{F}_2)$ симметрических матриц порядка $2n$ над полем $\mathbb{F}_2$ из двух элементов:

$$\operatorname{sign}_G \circ \oplus (X, Y) = \begin{cases} \operatorname{sign}_G(\mathfrak{m}), & \text{если } X \oplus Y = A_{\mathfrak{m}},\ \mathfrak{m} \in \mathcal{M}(G), \\ \text{не определена} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Здесь мы допускаем неоднозначность в обозначениях, используя $A_{\mathfrak{m}}$ и для целочисленной матрицы смежности, и для соответствующей матрицы над полем $\mathbb{F}_2$. Смысл этого обозначения всюду ясен из контекста.

Предложение 3. *Справедливо неравенство* $\mathbf{C}(f \circ \oplus) \leqslant 2\mathbf{D}_{\oplus}(f)$.

Доказательство по сути то же самое, что для предложения 2.

Замечание 3. Верхняя оценка сложности $\mathbf{D}_{\oplus}(f)$ функции f в модели линейных разрешающих деревьев через коммуникационную сложность XOR-функции $f \circ \oplus$ оказывается более трудной задачей. Известна верхняя оценка $O(\mathbf{C}(f \circ \oplus)^6)$, см. [26]. Ее точность остается открытым вопросом.

Нам потребуются сравнительно простые нижние оценки коммуникационной сложности. Напомним их формулировки.

Подмножества $S \subseteq A$, $Q \subseteq B$ задают *комбинаторный прямоугольник* $S \times Q$ (далее для краткости – прямоугольник). Прямоугольник называется монохроматическим для функции $F\colon A \times B \to Z$, если F постоянна на этом прямоугольнике (для частичных функций – на пересечении области определения с прямоугольником). Наименьшее количество монохроматических прямоугольников в покрытии области определения F обозначается $\mathrm{Cov}(F)$ и называется *величиной покрытия*. Каждый протокол вычисления порождает покрытие матричных элементов монохроматическими прямоугольниками. Наименьшее количество прямоугольников в покрытиях, порождаемых коммуникационными протоколами, обозначается через $\mathrm{Cov}^P(F)$.

Величины покрытий используются в нижних оценках коммуникационной сложности в силу следующего простого неравенства.

Предложение 4 [20, 21]. *Справедливы неравенства* $\mathrm{Cov}(F) \leqslant \mathrm{Cov}^P(F) \leqslant$ $\leqslant 2^{\mathbf{C}(F)}$.

Заметим, что в [20, 21], как и в большинстве источников, это предложение доказано для всюду определенных функций. Однако доказательство без труда переносится на случай частичных функций: любое покрытие монохроматическими прямоугольниками всюду определенного продолжения F' частичной функции является покрытием монохроматическими прямоугольниками самой функции, т.е. $\mathrm{Cov}(F) \leqslant$ $\leqslant \mathrm{Cov}(F')$. Выбрав то продолжение F', которое отвечает оптимальному протоколу для F, получаем

$$\mathrm{Cov}(F) \leqslant \mathrm{Cov}(F') \leqslant 2^{\mathbf{C}(F')} = 2^{\mathbf{C}(F)}.$$

Нижние оценки коммуникационной сложности удобнее получать не для $\mathrm{sign}_G^{\mathbb{Z}}$, а для варианта XOR-функции $\mathrm{sign}_G^{\oplus} = (-1)^{\mathrm{sign}_G \circ \oplus}$, в которой множество значений изменено на $\{+1, -1\}$.

Напрямую сравнить коммуникационные сложности $\mathbf{C}(\mathrm{sign}_G^{\mathbb{Z}})$ и $\mathbf{C}(\mathrm{sign}_G^{\oplus})$ затруднительно. Однако нетрудно сравнить величины покрытий монохроматическими прямоугольниками для функций $\mathrm{sign}_G^{\mathbb{Z}}$ и $\mathrm{sign}_G^{\oplus}$.

Лемма 3. *Справедливо неравенство* $\mathrm{Cov}(\mathrm{sign}_G^{\mathbb{Z}}) \geqslant \mathrm{Cov}(\mathrm{sign}_G^{\oplus})$.

Доказательство. Определим отображение стирания знака $\sigma\colon \{-1, 0, 1\} \to \mathbb{F}_2$

$$\sigma(-1) = \sigma(1) = 1, \quad \sigma(0) = 0$$

и продолжим его на матрицы поэлементно. Докажем, что отображение стирания знака переводит матрицы из области определения $\mathrm{sign}_G^{\mathbb{Z}}$ в матрицы из области определения $\mathrm{sign}_G^{\oplus}$, т.е.

$$\sigma\big(\mathrm{Dom}(\mathrm{sign}_G^{\mathbb{Z}})\big) = \mathrm{Dom}(\mathrm{sign}_G^{\oplus}).$$

Пусть $(X, Y) \in \mathrm{Dom}(\mathrm{sign}_G^{\mathbb{Z}})$, т.е. $X + Y = A_{\mathfrak{m}}$, $\mathfrak{m} \subseteq E(G)$. Если $\{i, j\} \in \mathfrak{m}$, то из двух матричных элементов $X_{i,j}$ и $Y_{i,j}$ ровно один равен 1, а второй равен 0; остальные матричные элементы либо равны нулю в обеих матрицах X и Y, либо имеют разные знаки. Но это означает, что $\sigma(X) \oplus \sigma(Y) = A_{\mathfrak{m}}$.

И обратно: если $X^\sigma \oplus Y^\sigma = A_{\mathfrak{m}}$, то возможно приписать знак минус тем матричным элементам $Y^\sigma(i, j)$, которые равны 1 и $\{i, j\} \notin \mathfrak{m}$. Получим матрицу Y, а матрицу X возьмем равной X^σ (отождествляя 0 и 1 в целых числах и в поле $\mathbb{F}_2$). И тогда $X + Y = A_{\mathfrak{m}}$, где сложение уже целочисленное.

Проверим, что монохроматический для $\mathrm{sign}_G^{\mathbb{Z}}$ прямоугольник $S \times Q$ переводится отображением стирания знака в монохроматический для $\mathrm{sign}_G^{\oplus}$ прямоугольник $\sigma(S) \times \sigma(Q)$. Действительно, если $(X, Y) \in \mathrm{Dom}(\mathrm{sign}_G^{\mathbb{Z}})$, то

$$\mathrm{sign}_G^{\mathbb{Z}}(X, Y) = \mathrm{sign}_G^{\oplus}(\sigma(X), \sigma(Y)).$$

Поэтому любое покрытие монохроматическими для $\mathrm{sign}_G^{\mathbb{Z}}$ прямоугольниками является также покрытием монохроматическими для $\mathrm{sign}_G^{\oplus}$ прямоугольниками. ▲

Для оценки величины покрытия используем оценку отклонения (discrepancy) $\mathrm{disc}_U(f)$ (частичной) функции $f\colon A \times B \to \{-1, +1\}$ относительно равномерного распределения на области определения f. *Вес прямоугольника* $S \times Q$ относительно функции f равен сумме значений функции на пересечении прямоугольника с областью определения функции:

$$\delta_f(S, Q) = \sum_{\substack{x \in S,\ y \in Q \\ (x,y) \in \mathrm{Dom}\, f}} f(x, y).$$

Отклонение f по отношению к равномерному распределению U на области определения f задается как

$$\mathrm{disc}_U(f) = \frac{1}{\mathrm{Dom}\, f} \max_{S \subseteq A,\ Q \subseteq B} |\delta_f(S, Q)|.$$

Отклонение ограничивает сверху меру монохроматического прямоугольника относительно равномерного распределения на области определения f, поэтому

$$\mathrm{Cov}(F) \geqslant \frac{1}{\mathrm{disc}_U(f)}. \tag{9}$$

В свою очередь, отклонение частичной симметрической функции $f\colon A \times A \to \{-1, +1\}$, $f(x, y) = f(y, x)$, если $(x, y) \in \mathrm{Dom}\, f$, будем оценивать спектральным методом. Продолжим функцию f до всюду определенной функции f_0 нулями:

$$f_0(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in \mathrm{Dom}\, f, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Функцию f_0 можно рассматривать как матрицу симметрического линейного оператора F на пространстве $\mathbb{R}^A$ функций с действительными значениями и областью определения A. Через $\|F\|$ обозначаем спектральную норму оператора F.

Лемма 4. *Для любого прямоугольника $S \times Q$ выполняется*

$$|\delta_f(S, Q)| \leqslant \sqrt{|S||Q|}\, \|F\|.$$

Доказательство. Обозначим через $\mathbb{1}_S, \mathbb{1}_Q$ индикаторные функции подмножеств S, Q:

$$\mathbb{1}_S(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in S, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Запишем вес прямоугольника $S \times Q$ как

$$\delta_f(S,Q) = \sum_{x,y\in A} f(x,y)\mathbb{1}_S(X)\mathbb{1}_Q(Y) = \sum_{x\in A} \mathbb{1}_S(x)(F\mathbb{1}_Q)(x) = \langle \mathbb{1}_S, F\mathbb{1}_Q\rangle,$$

где $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ – стандартное скалярное произведение в координатном базисе.

Применяя неравенство Коши – Шварца, получаем

$$|\langle \mathbb{1}_S, F\mathbb{1}_Q\rangle| \leqslant \|\mathbb{1}_S\|_2\|\mathbb{1}_Q\|_2\|F\| = \sqrt{|S|}\sqrt{|Q|}\,\|F\|,$$

где $\|\cdot\|_2$ обозначает ℓ_2-норму. ▲

§ 6. Спектральные нижние оценки

Применим спектральный метод для получения нижних оценок коммуникационной сложности XOR-функции $\operatorname{sign}_G^{\oplus} = (-1)^{\operatorname{sign}_G \circ \oplus}$ знака паросочетания.

Обозначим через P_G оператор, отвечающий продолжению функции $\operatorname{sign}_G^{\oplus}$ нулями вне области определения. Чтобы использовать лемму 4, нам нужна оценка его спектральной нормы.

Оператор P_G действует на пространстве V функций $\operatorname{Sym}_{2n}(\mathbb{F}_2) \to \mathbb{R}$, размерность этого пространства равна $\binom{2n+1}{2}$. Спектральную норму этого оператора можно оценить сверху следующим образом.

Лемма 5. *Справедливо неравенство $\|P_G\| \leqslant D(G)$, где $D(G)$ – максимальное значение модуля пфаффиана $|\operatorname{Pf}(\varepsilon \bullet A_G)|$ по всем ориентациям ребер графа G.*

Доказательство. Выразим P_G как сумму

$$P_G = \sum_{\mathfrak{m}\in\mathcal{M}(G)} \operatorname{sign}(\mathfrak{m})P_{\mathfrak{m}}, \quad \text{где} \quad P_{\mathfrak{m}}(X,Y) = \begin{cases} 1, & \text{если } X \oplus Y = A_{\mathfrak{m}}, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Матрицы $P_{\mathfrak{m}}$ одновременно диагонализуются в базисе Фурье (базисе характеров). Напомним, что характеры χ_T индексируются симметрическими матрицами T размера $n \times n$ над $\mathbb{F}_2$ и задаются следующим образом:

$$\chi_T(X) = (-1)^{\sum\limits_{i\leqslant j} T_{i,j}X_{i,j}}.$$

Сумма в показателе определена корректно, так как существенна лишь четность этой суммы. Более подробно о преобразовании Фурье на булевом кубе см. [27].

Напомним, что спектральная норма симметрического оператора равна максимуму модулей собственных чисел этого оператора. Собственные числа $P_{\mathfrak{m}}$ легко вычисляются. Подействуем $P_{\mathfrak{m}}$ на базисный вектор (характер):

$$(P_{\mathfrak{m}}\chi_T)(X) = \sum_Y P_{\mathfrak{m}}(X,Y)\chi_T(Y) = \chi_T(X \oplus A_{\mathfrak{m}})) = \chi_T(A_{\mathfrak{m}})\chi_T(X).$$

В последнем равенстве использована мультипликативность характеров.

Собственное число оператора P_G на характере χ_T является суммой собственных чисел $P_{\mathfrak{m}}$:

$$\lambda_T = \sum_{\mathfrak{m}\in\mathcal{M}(G)} \chi_T(A_{\mathfrak{m}})\operatorname{sign}(\mathfrak{m}) = \sum_{\mathfrak{m}\in\mathcal{M}(G)} (-1)^{\sum\limits_{i\leqslant j} T_{i,j}(A_{\mathfrak{m}})_{i,j}} \operatorname{sign}(\mathfrak{m}) =$$
$$= \sum_{\mathfrak{m}\in\mathcal{M}(G)} \operatorname{sign}(\mathfrak{m}) \prod_{\{i,j\}\in\mathfrak{m}} (-1)^{T_{i,j}} = \operatorname{Pf}(\varepsilon\bullet A_G),$$

где ε отличается от фиксированной по умолчанию ориентации ε^0 в точности на тех ребрах, на которых $T(i,j)=1$.

Но это и означает, что максимальное по модулю собственное число оператора P_G равно $D(G)$. ▲

Используя эти факты, уже нетрудно получить верхнюю оценку отклонения для функции $\operatorname{sign}_G^{\oplus}$ и тем самым нижнюю оценку коммуникационной сложности XOR-функции знака паросочетания.

С л е д с т в и е 1. *Справедливы неравенства*

$$\operatorname{disc}_U(\operatorname{sign}_G^{\oplus}) \leqslant D(G)/|\mathcal{M}(G)|, \quad \mathbf{C}(\operatorname{sign}_G^{\oplus}) \geqslant \log_2|\mathcal{M}(G)|/D(G).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для каждого $X\in\operatorname{Sym}_{2n}(\mathbb{F}_2)$ есть ровно $|\mathcal{M}(G)|$ таких матриц Y, что $(X,Y)\in\operatorname{Dom}\operatorname{sign}_G^{\oplus}$. Это в точности матрицы вида $X\oplus A_{\mathfrak{m}}$ для всех $\mathfrak{m}\in\mathcal{M}(G)$. Поэтому область определения функции $\operatorname{sign}_G^{\oplus}$ имеет размер $|\mathcal{M}(G)|N$, где $N=2^{\dim V}=2^{\binom{2n+1}{2}}$.

Из лемм 4, 5 получаем

$$\operatorname{disc}_U(\operatorname{sign}_G^{\oplus}) = \frac{1}{N|\mathcal{M}(G)|}\max_{\substack{S\subseteq M_n(\mathbb{F}_2)\\ Q\subseteq M_n(\mathbb{F}_2)}} |\delta_{\operatorname{sign}_G^{\oplus}}(S,Q)| \leqslant \frac{1}{N|\mathcal{M}(G)|}\sqrt{|S||Q|}\,\|P_G\| \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{\frac{|S|}{N}\frac{|Q|}{N}}\frac{D(G)}{|\mathcal{M}(G)|} \leqslant \frac{D(G)}{|\mathcal{M}(G)|},$$

что и требовалось.

Второе неравенство следует из первого в силу предложения 4 и неравенства (9). ▲

Отсюда следуют оценки $\Omega(n\log n)$ на коммуникационную сложность XOR-функции $\operatorname{sign}_{K_{2n}}^{\oplus}$ знака паросочетания для полного графа и тем самым на сложность функции $\operatorname{sign}_{K_{2n}}$ в модели линейных разрешающих деревьев (теорема 2).

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2. Для применения следствия 1 нужно оценить отношение количества совершенных паросочетаний в полном графе на $2n$ вершинах $|\mathcal{M}(K_{2n})|$ и максимума модуля пфаффиана ориентированной матрицы смежности полного графа $D(K_{2n})$.

Оценим первую величину как

$$|\mathcal{M}(K_{2n})| = (2n-1)!! \geqslant (2n-2)!! = (2n-2)(2n-4)\ldots 2 = 2^{n-1}(n-1)!.$$

Оценим $D(K_{2n})$. Из формулы (3) и неравенства Адамара [14, следствие 7.8.2, с. 565] для матриц порядка $2n$ с матричными элементами $0,\pm1$ получаем

$$|\operatorname{Pf}(\varepsilon\bullet A_G)| \leqslant \sqrt{\det(\varepsilon\bullet A_G)} \leqslant (2n)^{n/2}.$$

Это означает, что $D(G) \leqslant (2n)^{n/2}$, и потому

$$\operatorname{Cov}(\operatorname{sign}^{\oplus}_{K_{2n}}) \geqslant \frac{2^{n-1}(n-1)!}{(2n)^{n/2}} = \frac{1}{2n}\frac{2^n n!}{(2n)^{n/2}} \geqslant \frac{1}{2n}2^{n/2}\frac{(n/3)^n}{n^{n/2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^n n^{n/2-1}.$$

После логарифмирования и применения предложения 4 и леммы 3 отсюда получаются нижние оценки коммуникационной сложности $\Omega(n\log n)$ для XOR-функций знака паросочетания. Указанные в теореме 2 нижние оценки сложности в моделях разрешающих деревьев для функции знака паросочетания следуют из предложений 2 и 3. ▲

§ 7. Оценки для разреженных графов

Следствие 1 дает нижнюю оценку $\log_2 |\mathcal{M}_G|/D(G)$ коммуникационной сложности XOR-функции знака паросочетания в любом графе. Из этой оценки следует также нижняя оценка на высоту разрешающего дерева в базисе линейных функций для функции sign_G.

Точность соотношения между коммуникационной сложностью и высотой разрешающих деревьев остается открытым вопросом. Заметим, что техника, использованная в работе [26] для оценки сложности в модели линейных разрешающих деревьев полиномом от коммуникационной сложности XOR-функции, не применима к частично определенным функциям.

Однако в предельном случае $|\mathcal{M}(G)| = D(G)$ оценка точна. Действительно, это равенство означает, что $|\operatorname{Pf}(\varepsilon \bullet A_G)| = |\mathcal{M}(G)|$ для некоторой ориентации ε. Поскольку вклад каждого паросочетания в $\operatorname{Pf}(\varepsilon \bullet A_G)$ по модулю равен 1, знаки всех паросочетаний при такой ориентации должны быть одинаковы, т.е. ε – пфаффова ориентация графа G. Но тогда значение линейной функции на матричных элементах, отвечающее оптимальному (пфаффову) выбору знаков, позволяет определить знак паросочетания. Это, в свою очередь, означает, что линейное разрешающее дерево высоты 1 вычисляет функцию знака паросочетания.

Любой непфаффовый граф H с $|\mathcal{M}(H)| > D(H)$ позволяет получать линейные по числу вершин оценки коммуникационной сложности XOR-функции знака паросочетания.

Заметим, что коммуникационная сложность XOR-функции знака паросочетания монотонна по увеличению ребер графа: если $E(G') \subset E(G)$, то $\mathbf{C}(\operatorname{sign}^{\oplus}_{G'}) \leqslant \mathbf{C}(\operatorname{sign}^{\oplus}_{G})$. Действительно, любой протокол для большего графа легко модифицируется для меньшего (на отсутствующих ребрах полагаем значения матриц X и Y равными нулю).

Подграф H графа G называется *центральным*, если подграф, индуцированный дополнением к вершинам H, содержит совершенное паросочетание.

Рассмотрим такую последовательность графов $H_1, \dots H_s$, для которых

$$|\mathcal{M}(H_i)|/D(H_i) \geqslant \alpha > 1.$$

Лемма 6. *Пусть в графе G есть центральный подграф H, связные компоненты которого – графы H_i, $1 \leqslant i \leqslant s$. Тогда $\mathbf{D}_{\oplus}(\operatorname{sign}_G) \geqslant \frac{1}{2}s\log_2\alpha$.*

Доказательство. Из предложения 3 и монотонности коммуникационной сложности по ребрам имеем

$$\mathbf{D}_{\oplus}(\operatorname{sign}_G) \geqslant \frac{1}{2}\mathbf{C}(\operatorname{sign}^{\oplus}_{G}) \geqslant \frac{1}{2}\mathbf{C}(\operatorname{sign}^{\oplus}_{H}).$$

Поэтому достаточно доказать неравенство $|\mathcal{M}(H)|/D(H) \geqslant \alpha^s$. Матрица смежности H распадается на блоки, отвечающие компонентам связности H_i.

Количество совершенных паросочетаний в графе H выражается как произведение $|\mathcal{M}(H)| = |\mathcal{M}(H_1)||\mathcal{M}(H_2)|\dots|\mathcal{M}(H_s)|$.

Пфаффиан матрицы $\varepsilon \bullet A_H$ также разбивается на произведение пфаффианов матриц $\varepsilon \bullet A_{H_i}$. Значит, $D(H) = D(H_1)\dots D(H_s)$.

Так как $|\mathcal{M}(H_i)|/D(H_i) \geqslant \alpha$, получаем искомое неравенство. ▲

Следствие 2. *Пусть H – непфаффовый граф, $|\mathcal{M}(H)| = h$. Тогда для графа, содержащего центральный подграф sH (несвязная сумма s копий H), выполняется неравенство*

$$\mathbf{D}_{\oplus}(\mathrm{sign}_G) \geqslant \frac{s}{2}\log_2\left(1 + \frac{2}{h-2}\right).$$

Доказательство. Для любой ориентации ε непфаффова графа H выполняется неравенство $|\mathrm{Pf}(\varepsilon \bullet H)| \leqslant h - 2$. Теперь применим лемму 6. ▲

Используя эти утверждения, можно доказать, что сложность разрешающих деревьев велика для функции знака паросочетания уже для связных графов, все вершины которых имеют степень 3. Это значительно сужает возможности метода символического пфаффиана.

Теорема 3. *Существует последовательность графов G_i, в которой все графы связные, степени вершин в каждом равны 3, и $\mathbf{D}_{\oplus}(\mathrm{sign}_{G_i}) = \Omega(n_i)$, где n_i – количество вершин в G_i, а константа, скрытая в Ω, не зависит от i.*

Доказательство. *Гекс* – это граф, полученный из полного двудольного графа $K_{3,3}$ подразбиением ребер. В гексе естественным образом выделяются девять путей, каждый получен в результате подразбиений одного ребра $K_{3,3}$. Будем называть эти пути *отрезками гекса*. Назовем гекс *нечетным*, если каждый отрезок состоит из нечетного количества ребер. Нечетный гекс является непфаффовым графом [17].

Заметим, что покрыть все внутренние вершины отрезка в нечетном гексе можно двумя паросочетаниями: одно содержит концевые вершины отрезка, другое – нет. Каждая из шести вершин, отвечающих графу $K_{3,3}$, из которого получен гекс, содержится ровно в одном паросочетании первого типа. Таким образом, выбор паросочетаний первого типа задает совершенное паросочетание на исходном графе $K_{3,3}$. Очевидно, верно и обратное. Поэтому совершенных паросочетаний в нечетном гексе столько же, сколько в $K_{3,3}$, т.е. шесть.

Возьмем граф sH, где H – нечетный гекс, в котором есть два отрезка длины 3, а остальные отрезки имеют длину 1. Граф G_s имеет те же вершины, что и sH, поэтому sH – центральный в G_s. Обозначим внутренние вершины первого отрезка длины 3 в i-й копии H_i гекса H через $u_i^{(1)}, v_i^{(1)}$, аналогично внутренние вершины второго отрезка длины 3 в H_i обозначим через $u_i^{(2)}, v_i^{(2)}$. Множество ребер графа G_s содержит все ребра гексов H_i, а также ребра $(u_i^{(1)}, u_{i-1}^{(2)}), (v_i^{(1)}, v_{i-1}^{(2)})$ (вычитание по модулю s). Других ребер нет. Из построения ясно, что граф G_s связный и степень каждой вершины равна 3.

Количество вершин в графе G_s равно $n_s = 10s$, а $\mathbf{D}_{\oplus}(G_s) \geqslant s\log_2(\sqrt{3/2})$ по следствию 2. Получаем оценку теоремы. ▲

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Valiant L.G.* The Complexity of Computing the Permanent // Theoret. Comput. Sci. 1979. V. 8. № 2. P. 189–201. https://doi.org/10.1016/0304-3975(79)90044-6

2. *Björklund A.* Counting Perfect Matchings as Fast as Ryser // Proc. 23rd Annu. ACM–SIAM Symp. on Discrete Algorithms (SODA'2012). Kyoto, Japan. Jan. 17–19, 2012. P. 914–921. https://dl.acm.org/doi/10.5555/2095116.2095189
3. *Dell H., Husfeldt T., Marx D., Taslaman N., Wahlén M.* Exponential Time Complexity of the Permanent and the Tutte Polynomial // ACM Trans. Algorithms. 2014. V. 10. № 4. Art. 21 (32 pp.). https://doi.org/10.1145/2635812
4. *Kasteleyn P.* Graph Theory and Crystal Physics // Graph Theory and Theoretical Physics. London: Academic, 1967. P. 43–110.
5. *Galluccio A., Loebl M.* On the Theory of Pfaffian Orientations. I: Perfect Matchings and Permanents // Electron. J. Combin. 1999. V. 6. Art. R6 (18 pp.). https://doi.org/10.37236/1438
6. *Tesler G.* Matchings in Graphs on Non-orientable Surfaces // J. Combin. Theory Ser. B. 2000. V. 78. № 2. P. 198–231. https://doi.org/10.1006/jctb.1999.1941
7. *Little C.H.C.* An Extension of Kasteleyn's Method of Enumerating the 1-Factors of Planar Graphs // Combinatorial Mathematics II. Lect. Notes Math. V. 403. Berlin: Springer, 1974. P. 63–72. https://doi.org/10.1007/BFb0057377
8. *Straub S., Thierauf T., Wagner F.* Counting the Number of Perfect Matchings in K_5-Free Graphs // Theory Comput. Syst. 2016. V. 59. № 3. P. 416–439. https://doi.org/10.1007/s00224-015-9645-1
9. *Izumi T., Wadayama T.* A New Direction for Counting Perfect Matchings // Proc. 2012 IEEE 53rd Annu. Symp. on Foundations of Computer Science (FOCS'2012). New Brunswick, NJ, USA. Oct. 20–23, 2012. P. 591–598. https://doi.org/10.1109/FOCS.2012.28
10. *Pólya G.* Aufgabe 424 // Arch. Math. Phys. (3). 1913. V. 20. P. 271.
11. *Бабенко А.В., Вялый М.Н.* О линейной классификации четных и нечетных перестановочных матриц и сложности вычисления перманента // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т. 57. № 2. С. 362–372. https://doi.org/10.7868/S004446691702003X
12. *Вялый М.Н.* Сложность вычисления знака перестановки в модели разрешающих деревьев и подсчет совершенных паросочетаний в двудольных графах // Тр. X междунар. конф. "Дискретные модели в теории управляющих систем". Москва и Подмосковье, 23–25 мая 2018 г. / Отв. ред. Алексеев В., Романов Д., Данилов Б. М.: МАКС Пресс, 2018. С. 94–97.
13. *Mahajan M., Vinay V.* Determinant: Old Algorithms, New Insights // SIAM J. Discrete Math. 1999. V. 12. № 4. P. 474–490. https://doi.org/10.1137/S0895480198338827
14. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989.
15. *Винберг Э.Б.* Курс алгебры. М.: Факториал, 1999.
16. *Mahajan M., Subramanya P.R., Vinay V.* A Combinatorial Algorithm for Pfaffians // Proc. 5th Annu. Int. Conf. on Computing and Combinatorics (COCOON'99). Tokyo, Japan. July 26–28, 1999. Lect. Notes Comput. Sci. V. 1627. Berlin: Springer, 1999. P. 134–143. https://doi.org/10.1007/3-540-48686-0_13
17. *Little C.H.C.* A Characterization of Convertible $(0,1)$-Matrices // J. Combin. Theory Ser. B. 1975. V. 18. № 3. P. 187–208. https://doi.org/10.1016/0095-8956(75)90048-9
18. *Thomas R., Whalen P.* Odd $k_{3,3}$ Subdivisions in Bipartite Graphs // J. Combin. Theory Ser. B. 2016. V. 118. P. 76–87. https://doi.org/10.1016/j.jctb.2016.01.005
19. *Robertson N., Seymour P.D., Thomas R.* Permanents, Pfaffian Orientations, and Even Directed Circuits // Ann. of Math. (2). 1999. V. 150. № 3. P. 929–975. https://doi.org/10.2307/121059
20. *Jukna S.* Boolean Function Complexity: Advances and Frontiers. Heidelberg: Springer, 2012.
21. *Kushilevitz E., Nisan N.* Communication Complexity. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997.
22. *Lee T., Shraibman A.* Lower Bounds in Communication Complexity // Found. Trends Theor. Comput. Sci. 2009. V. 3. № 4. P. 263–399. http://doi.org/10.1561/0400000040
23. *Zhang Z., Shi Y.* On the Parity Complexity Measures of Boolean Functions // Theoret. Comput. Sci. 2010. V. 411. № 26–28. P. 2612–2618. https://doi.org/10.1016/j.tcs.2010.03.027

24. *Lee T., Zhang S.* Composition Theorems in Communication Complexity // Proc. 37th Int. Colloq. on Automata, Languages and Programming (ICALP'2010). Bordeaux, France. July 6–10, 2010. Part I. Lect. Notes Comput. Sci. V. 6198. Berlin: Springer, 2010. P. 475–489. https://doi.org/10.1007/978-3-642-14165-2_41
25. *Tsang H.Y., Wong C.H., Xie N., Zhang S.* Fourier Sparsity, Spectral Norm, and the Log-Rank Conjecture // Proc. 2013 IEEE 54th Annu. Symp. on Foundations of Computer Science (FOCS'2013). Berkeley, CA, USA. Oct. 26–29, 2013. P. 658–667. https://doi.org/10.1109/FOCS.2013.76
26. *Hatami H., Hosseini K., Lovett S.* Structure of Protocols for XOR Functions // Proc. 2016 IEEE 57th Annu. Symp. on Foundations of Computer Science (FOCS'2016). New Brunswick, NJ, USA. Oct. 9–11, 2016. P. 282–288. https://doi.org/10.1109/FOCS.2016.38
27. *O'Donnell R.* Analysis of Boolean Functions. New York: Cambridge Univ. Press, 2014.

Вялый Михаил Николаевич
Национальный исследовательский университет
"Высшая школа экономики"
vyalyi@gmail.com

Поступила в редакцию
19.09.2020
После доработки
17.12.2020
Принята к публикации
17.12.2020