ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

Том 57 | 2021 | Вып. 2

УДК 621.391 : 519.175.4 : 519.214

© 2021 г. **Т. Константопулос[1], А.В. Логачёв[2], А.А. Могульский[2], С.Г. Фосс[1,2]**

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ МАКСИМАЛЬНОГО ВЕСА ПУТИ В НАПРАВЛЕННОМ ГРАФЕ НА ЦЕЛОЧИСЛЕННОЙ ПРЯМОЙ СО СЛУЧАЙНЫМИ ВЕСАМИ РЕБЕР

Рассматривается бесконечный направленный граф, вершины которого занумерованы целыми числами $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$, а любая пара вершин $j < k$ соединена ребром (j, k) между ними, направленным из j в k и имеющим случайный вес $v_{j,k} \in [-\infty, \infty)$, где $\{v_{j,k},\ j < k\}$ – семейство независимых и одинаково распределенных случайных величин, которые принимают либо конечные значения (любого знака), либо значение $-\infty$. Путь в таком графе – это последовательность связанных между собой ребер $(j_0, j_1), (j_1, j_2), \ldots, (j_{m-1}, j_m)$ (где $j_0 < j_1 < \ldots < j_m$), а его вес – сумма весов этих ребер $\sum\limits_{s=1}^{m} v_{j_{s-1},j_s} \geqslant -\infty$. Пусть $w_{0,n}$ – максимальный вес среди всех путей из 0 в n. В предположениях, что $\mathbf{P}(v_{0,1} > 0) > 0$, условное распределение $\mathbf{P}(v_{0,1} \in \cdot \mid v_{0,1} > 0)$ невырождено и $\mathbf{E}\exp(Cv_{0,1}) < \infty$ при некотором $C = \mathrm{const} > 0$, изучается асимптотическое поведение случайной последовательности $w_{0,n}$ при стремлении $n \to \infty$. В области нормальных и умеренно больших уклонений получена локальная предельная теорема в случае, когда распределение случайных величин $v_{i,j}$ является арифметическим, и интегро-локальная предельная теорема, если это распределение является нерешетчатым.

Ключевые слова: направленный граф, максимальный вес пути, осевые и стержневые вершины, нормальные и умеренно большие уклонения, (интегро-)локальная предельная теорема.

DOI: 10.31857/S0555292321020054

§ 1. Введение, основные обозначения и формулировка основного результата

Мы рассматриваем бесконечный направленный граф $G(\mathbb{Z}, E)$, множество вершин которого – все целые числа $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$, а множество направленных ребер $E = \{e = (j, k),\ j < k,\ j, k \in \mathbb{Z}\}$ – все ребра, направленные из меньших вершин в большие. Предполагается, что в графе нет ребер из больших вершин в меньшие и нет петель вида (j, j).

Каждому ребру $e \in E$ сопоставляется его "вес" v_e, который может быть либо числом (положительным или отрицательным), либо принимать значение $-\infty$. Будем предполагать, что случайные величины $\{v_{j,k},\ j < k\}$ независимы и одинаково распределены с некоторой случайной величиной v, принимающей значения в $[-\infty, \infty)$.

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке совместного российско-французского гранта Российского фонда фундаментальных исследований и Национального центра научных исследований Франции (номера проектов РФФИ-НЦНР 19-51-15001 и CNRS 193-382).

[2] Работа выполнена в рамках Международного Центра в Академгородке (соглашение 075-15-2019-1675 с Министерством науки и высшего образования).

Пусть $p = \mathbf{P}(v > -\infty)$ и $p^+ = \mathbf{P}(v > 0)$. Пусть v^+ – случайная величина с распределением

$$\mathbf{P}(v^+ < t) = \mathbf{P}(v < t \,|\, v > 0), \quad t > 0. \tag{1.1}$$

В этой статье мы будем предполагать выполнение следующих условий:

$$\begin{aligned} &p^+ > 0, \quad \mathbf{P}(v^+ = c) < 1 \quad \text{при любом } c > 0, \\ &\mathbf{E}\, e^{Cv^+} < \infty \quad \text{при некотором } C > 0, \end{aligned} \tag{1.2}$$

т.е. случайная величина v принимает положительные значения с положительной вероятностью, ее распределение на положительной полуоси невырождено и правый хвост ее распределения относительно тонок.

В литературе используется и такая интерпретация этой модели: если $v_e = -\infty$, то считается, что ребро e отсутствует, а если $v_e > -\infty$, то ребро существует и его вес равен v_e. При таком задании появляются две независимые “случайности”: ребро может существовать или нет, и если ребро существует, то его вес – независимая ни от чего случайная величина, имеющая распределение $\mathbf{P}(v \in \cdot \,|\, v > -\infty)$.

Назовем *путем* π длины $L(\pi) = m$ последовательность m связанных ребер $e_1 = (j_0, j_1)$, $e_2 = (j_1, j_2)$, $\ldots$, $e_m = (j_{m-1}, j_m)$, где конечная вершина каждого ребра совпадает с начальной вершиной следующего и $j_0 < j_1 < \ldots < j_m$, и будем говорить, что это путь из j_0 в j_m и писать $e_i \in \pi$, $i = 1, \ldots, L(\pi)$. Вес $w(\pi)$ этого пути определим как сумму весов входящих в него ребер, т.е.

$$w(\pi) = \sum_{s=1}^{L(\pi)} v_{j_{s-1}, j_s} = \sum_{e \in \pi} v_e.$$

Ясно, что путь имеет конечный вес тогда и только тогда, когда конечны веса всех его ребер.

При $j < k$ обозначим через $\Pi_{j,k}$ множество всех путей из j в k с конечными весами (т.е. $w(\pi) > -\infty$ для $\pi \in \Pi_{j,k}$), а через $w_{j,k}$ – максимальный из весов всех путей из j в k. Тогда

$$w_{j,k} = \max_{\pi \in \Pi_{j,k}} w(\pi)$$

с вероятностью единица, так как используется соглашение, что максимум по пустому множеству равен $-\infty$. Положим также $w_{j,j} = 0$ при всех j.

Рассматриваемые нами графы со случайными весами могут возникать естественным образом в различных приложениях. Скажем, если вес ребра принимает только два значения, 1 (ребро есть) и $-\infty$ (ребра нет), т.е.

$$p = \mathbf{P}(v = 1) = 1 - \mathbf{P}(v = -\infty), \tag{1.3}$$

то такой граф может описывать порядок работы некоторой вычислительной сети (см., например, [1,2]), где под вершинами понимаются выполняемые работы, а ребра описывают их временные ограничения (если $v_{j,k} = 1$, то выполнение работы k не может начаться до завершения выполнения работы j), или функционирование биологических моделей (см., например, [3,4]), где вершины – это виды животных, а пути описывают “пищевые цепочки” (food chains): если $v_{j,k} = 1$, то вид k может быть пищей для вида j).

Введем следующие два взаимоисключающих условия:

[$\mathbf{R}$] *Распределение случайной величины v является нерешетчатым*, т.е. при любых a и $h>0$ вероятность того, что v принимает значения на решетке шага h, сдвинутой на a, строго меньше единицы: $\sum\limits_{s=-\infty}^{\infty}\mathbf{P}(v=a+sh)<1$;

[$\mathbf{Z}$] *Распределение случайной величины v является арифметическим*, т.е. имеет место равенство $\sum\limits_{s=-\infty}^{\infty}\mathbf{P}(v=sh)=1$ при некотором $h>0$. Не ограничивая общности рассуждений, мы дополнительно предположим, что шаг решетки равен $h=1$, т.е. значения v целочислены и наибольший общий делитель множества $\{k\geqslant 1:\ \mathbf{P}(v=k)>0\}$ равен единице[3].

Отметим, что мы исключаем из рассмотрения случай $v^+=\mathrm{const}$ (см. (1.2)) и случай неарифметического, но решетчатого распределения.

Нас интересует асимптотическое поведение случайной последовательности $w_{0,n}$ при $n\to\infty$. Мы рассмотрим область нормальных и умеренно больших уклонений и докажем локальную предельную теорему при выполнении условия [$\mathbf{Z}$] и интегро-локальную предельную теорему при выполнении условия [$\mathbf{R}$].

Доказательство этих утверждений разбито на два шага. На первом шаге (приведенном в § 2) мы сначала построим вложенную регенерирующую последовательность с соответствующими "весами" (воспользовавшись методами, предложенными в работах [5,6]), а затем покажем, что как длины циклов регенерации τ_k, так и соответствующие им веса циклов ζ_k имеют конечные показательные моменты (точные определения этих величин даны в § 3). Отметим, что последовательность $\{(\tau_k,\zeta_k)\}_{k=1}^{\infty}$ состоит из независимых при $k\geqslant 1$ и одинаково распределенных при $k\geqslant 2$ двумерных случайных векторов, имеющих при $k\geqslant 2$ общее распределение с вектором (τ,ζ), координаты которого, как правило, зависят друг от друга.

На втором шаге доказательства (в § 3) мы отметим, что векторы (τ_k,ζ_k) определяют стационарный обобщенный процесс восстановления (о.п.в.), при изучении которого применимы методы и результаты работы [7]. После этого мы докажем, что асимптотика в предельных теоремах для последовательности $w_{0,n}$ совпадает с такой же асимптотикой для построенного о.п.в., что завершит доказательство требуемых результатов.

Для формулировки результатов нам осталось ввести функцию уклонений для о.п.в., управляемого случайным вектором $(\tau,\zeta)\overset{d}{=}(\tau_2,\zeta_2)$. Для $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ обозначим

$$A(\lambda,\mu):=\ln\mathbf{E}e^{\lambda\tau+\mu\zeta}. \tag{1.4}$$

Рассмотрим выпуклое множество

$$\mathcal{A}^{\leqslant 0}:=\{(\lambda,\mu):\ A(\lambda,\mu)\leqslant 0\}$$

и положим

$$D(\alpha):=\sup_{(\lambda,\mu)\in\mathcal{A}^{\leqslant 0}}\{\lambda+\mu\alpha\}.$$

Функция $D(\alpha)$ играет определяющую роль в описании логарифмической асимптотики вероятностей больших уклонений о.п.в., определяемого вектором (τ,ζ), и она достаточно полно изучена (см., например, [8]). Отметим, что это выпуклая функция, принимающая неотрицательные значения и обращающаяся в 0 в единственной

[3] Условия [$\mathbf{R}$] и [$\mathbf{Z}$] можно также сформулировать в терминах характеристической функции $f(z)=\mathbf{E}\,e^{izv}$ случайной величины v, а именно:
[$\mathbf{R}$] $|f(2\pi z)|<1$ для всех $z\neq 0$;
[$\mathbf{Z}$] $f(2\pi z)=1$ для всех $z\in\mathbb{Z}$ и $|f(2\pi z)|<1$ для всех $z\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$.

точке $\alpha = a$, где

$$a = \frac{\mathbf{E}\,\zeta}{\mathbf{E}\,\tau} > 0. \tag{1.5}$$

В наших условиях функция $D(\alpha)$ аналитична в некоторой окрестности точки минимума $\alpha = a$ и при этом

$$D(a) = 0, \quad D'(a) = 0, \quad D''(a) = \frac{1}{\sigma^2},$$

где

$$\sigma^2 := \frac{\mathbf{E}(\zeta - a\tau)^2}{\mathbf{E}\,\tau}. \tag{1.6}$$

Приведем основное утверждение данной статьи.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (1.2).

I. *Если случайная величина v удовлетворяет условию* [$\mathbf{Z}$], *то для любой последовательности $x = x_n \in \mathbb{Z}$, такой что $\alpha := x/n \to a$ при $n \to \infty$, имеет место асимптотическое соотношение*

$$\mathbf{P}(w_{0,n} = x) \sim \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi n}} e^{-nD(\alpha)}. \tag{1.7}$$

Если при этом $y_n := x - an = o(n^{2/3})$, то справедливо

$$\mathbf{P}(w_{0,n} = x) \sim \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi n}} e^{-\frac{y_n^2}{2n\sigma^2}}.$$

II. *Если случайная величина v удовлетворяет условию* [$\mathbf{R}$], *то для некоторой последовательности положительных чисел $\Delta_n^{(0)} = o(1)$ и для любой последовательности $x = x_n \in \mathbb{R}$, такой что $\alpha := x/n \to a$ при $n \to \infty$, имеет место асимптотическое соотношение*

$$\mathbf{P}(w_{0,n} \in [x, x + \Delta_n)) \sim \frac{\Delta_n}{\sigma\sqrt{2\pi n}} e^{-nD(\alpha)}, \tag{1.8}$$

в котором последовательность $\Delta_n = o(1)$ удовлетворяет неравенству $\Delta_n \geqslant \Delta_n^{(0)}$ (т.е. сходится к 0 достаточно медленно).
Если при этом $y_n := x - an = o(n^{2/3})$, то справедливо

$$\mathbf{P}(w_{0,n} \in [x, x + \Delta_n)) \sim \frac{\Delta_n}{\sigma\sqrt{2\pi n}} e^{-\frac{y_n^2}{2n\sigma^2}}.$$

Замечание 1. Можно несколько усилить утверждения теоремы 1, рассмотрев наряду с нормальными и умеренно большими уклонениями вида $\alpha := x/n \to a$ большие уклонения вида $|\alpha - a| \leqslant \delta$ при некотором (вообще говоря, малом) $\delta > 0$. При этом в правых частях соотношений (1.7), (1.8) множители $\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ (константы) следует заменить на более сложные, зависящие от параметра $\alpha = x/n$ функции. Однако для вычисления этих функций необходимы дополнительные довольно громоздкие построения, поэтому мы ограничились в теореме 1 рассмотрением нормальных и умеренно больших уклонений.

Замечание 2. Утверждение теоремы 1 формулируется в терминах функции уклонений $D(\alpha)$, строящейся по распределению случайного вектора (τ, ζ), которое задается неявно и зависит от двух параметров c_1 и c_2, выбираемых произвольно из некоторого интервала (см. лемму 1). Однако в теореме 3 мы докажем, что результаты теоремы 1 не зависят от того, какими эти константы выбраны.

Асимптотические свойства последовательности $w_{0,n}$ при стремлении $n \to \infty$ изучались ранее в работах [5,6,9,10]. В работе [9] рассмотрен случай, когда $\mathbf{P}(v > 0) = 1$ и доказаны закон больших чисел и центральная предельная теорема при условии конечности третьего момента случайной величины v, а также получены другие предельные теоремы при отсутствии этого условия. Центральная предельная теорема для случая, когда случайная величина v может иметь произвольный знак, доказана в работе [10]. В более ранних работах [5, 6] изучались модели с весами вида (1.3). Отметим также работу [11], в которой изучаются асимптотики длины *минимального* пути из 0 в n при $n \to \infty$ для случая, когда веса постоянны, но вероятность существования ребра зависит от расстояния между вершинами и убывает к нулю при его возрастании.

Оставшаяся часть статьи включает три параграфа: в §§ 2, 3 мы доказываем основную теорему по схеме, изложенной выше, а в § 4 приводим один вспомогательный результат.

§ 2. Построение регенерирующей последовательности, изучение ее свойств

В этом параграфе мы предложим конструкцию, позволяющую задать п.н. бесконечное случайное множество вершин $\{\Gamma_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ (называемых нами в дальнейшем *стержневыми вершинами* – см. определение 3 ниже), где $\ldots < \Gamma_{-2} < \Gamma_{-1} < 0 \leqslant \leqslant \Gamma_0 < \Gamma_1 < \ldots$, обладающих следующими свойствами:

1. Последовательность двумерных векторов

$$(\Gamma_n - \Gamma_{n-1}, w_{\Gamma_{n-1},\Gamma_n}), \quad n \neq 0, \tag{2.1}$$

состоит из независимых и одинаково распределенных элементов, которые в совокупности не зависят от $(\Gamma_{-1}, \Gamma_0, w_{\Gamma_{-1},0}, w_{0,\Gamma_0})$. Используя язык случайных точечных процессов, можно сказать, что последовательность пар $\{(\Gamma_n, w_{\Gamma_{n-1},\Gamma_n})\}$ образует стационарный в дискретном времени маркированный точечный процесс с марками $\{w_{\Gamma_{n-1},\Gamma_n}\}$, определяющий стационарный о.п.в.

2. При некотором $C > 0$ все четыре экспоненциальных момента

$$\mathbf{E}\exp(C\Gamma_0), \quad \mathbf{E}\exp(C(\Gamma_1 - \Gamma_0)), \quad \mathbf{E}\exp(Cw_{0,\Gamma_0}), \quad \mathbf{E}\exp(Cw_{\Gamma_0,\Gamma_1}) \tag{2.2}$$

конечны. При этом для $C_1 = C/2$ с необходимостью конечны и моменты

$$\mathbf{E}\exp(C_1(\Gamma_0 + w_{0,\Gamma_0})) \quad \text{и} \quad \mathbf{E}\exp(C_1(\Gamma_1 - \Gamma_0 + w_{\Gamma_0,\Gamma_1})). \tag{2.3}$$

3. При любых $0 \leqslant m \leqslant n$, если $\Gamma_m \leqslant n$, то

$$w_{0,n} = w_{0,\Gamma_0} + w_{\Gamma_0,\Gamma_1} + \ldots + w_{\Gamma_{m-1},\Gamma_m} + w_{\Gamma_m,n} \tag{2.4}$$

(напомним, что мы полагаем $w_{j,j} = 0$ при любом $j \in \mathbb{Z}$).

Приведем также ряд вспомогательных утверждений. Мы будем частично использовать схему доказательства из работы [9], где рассматривались веса, принимающие только положительные значения либо значение $-\infty$, и изучались вопросы существования первых и вторых степенных моментов у величин Γ_0 и w_{0,Γ_0}.

2.1. Построение осевых и стержневых вершин. Мы последовательно введем в рассмотрение четыре случайных подмножества множества вершин $\mathbb{Z}$: множество осевых вершин $\mathcal{S}$, осевых-плюс $\mathcal{S}^+$, стержневых $\mathcal{R}$ и стержневых-плюс $\mathcal{R}^+$.

Определение 1. Назовем вершину $x \in \mathbb{Z}$ *осевой*, если она связана путями конечного веса с каждой из других вершин, т.е. для любых $j < x$ и $k > x$ выполнены неравенства $w_{j,x} > -\infty$ и $w_{x,k} > -\infty$. Обозначим через $\mathcal{S}$ случайное множество осевых точек.

Если $p = \mathbf{P}(v > -\infty) = 1$, то любая точка $x \in \mathbb{Z}$ является осевой. Если p – любое число из интервала $(0, 1)$, то, как следует из лемм 5–7 работы [6], верны следующие пять утверждений.

1. Вероятность того, что вершина x является осевой, строго положительна и одна и та же при всех $x \in \mathbb{Z}$.
2. Последовательность событий $\{x \in \mathcal{S}\}$, $x = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$, является стационарной эргодической, и поэтому с вероятностью единица существует почти наверное бесконечно много осевых вершин $\{t_i\}$.
3. Последовательность $\{t_i\}$ (где $\ldots t_{-2} < t_{-1} < 0 \leqslant t_0 < t_1 < \ldots$) образует стационарный процесс восстановления (в дискретном времени), и в частности, длительности интервалов между соседними точками $\{t_i - t_{i-1},\ i \in \mathbb{Z},\ i \neq 0\}$ являются независимыми и одинаково распределенными случайными величинами и не зависят от пары случайных величин (t_{-1}, t_0), а эти величины зависят друг от друга, и t_0 имеет то же распределение, что и $|t_{-1}| - 1$. При этом $\mathbf{P}(t_{-1} = -i) = \mathbf{P}(t_1 - t_0 \geqslant i) / \mathbf{E}(t_1 - t_0)$, $i = 1, 2, \ldots$
4. При некотором $C > 0$
$$\mathbf{E}\, e^{Ct_0} < \infty, \quad \text{и следовательно,} \quad \mathbf{E}\, e^{C(t_1 - t_0)} < \infty. \tag{2.5}$$
5. Для любых $j < k$ обозначим через
$$L_{j,k} = \max_{\pi \in \Pi_{j,k}} L(\pi) \quad (\text{где максимум по пустому множеству равен } -\infty)$$
максимальную длину пути среди всех путей из $\Pi_{j,k}$. Тогда при каждом $n > 0$, если $L_{0,n} > 0$, то любой путь длины $L_{0,n}$ из 0 в n должен проходить через все промежуточные осевые точки (если таковые имеются). А именно пусть $0 \leqslant t_0 < t_1 < \ldots < t_m \leqslant n < t_{m+1}$ при некотором $m \geqslant 0$. Тогда любой путь максимальной длины из 0 в n, принадлежащий множеству $\Pi_{0,n}$, должен проходить через каждую из вершин $t_0, \ldots, t_m$. При этом с необходимостью все значения $L_{t_0,t_1}, \ldots, L_{t_{m-1},t_m}$ строго положительны и
$$L_{0,n} = L_{0,t_0} + L_{t_0,t_1} + \ldots + L_{t_{m-1},t_m} + L_{t_m,n}.$$

Наряду с введенным в § 1 классом путей $\Pi_{j,k}$, использующих только ребра с конечными весами, введем также множество путей $\Pi^+_{j,k}$ из j в k, использующих только ребра с положительными весами (т.е. $v_e > 0$ для всех $e \in \pi$, если $\pi \in \Pi^+_{j,k}$), и положим
$$w^+_{j,k} := \max_{\pi \in \Pi^+_{j,k}} w(\pi).$$

Определение 2. Назовем вершину $x \in \mathbb{Z}$ *осевой-плюс*, если она связана с каждой из других вершин путями, использующими только ребра положительного веса, т.е. для любых $j < x$ и $k > x$ найдутся путь π из j в x и путь $\widetilde{\pi}$ из x в k, такие что $v_e > 0$ при всех $e \in \pi$ и всех $e \in \widetilde{\pi}$ и, в частности, выполнены неравенства $w^+_{j,x} > 0$ и $w^+_{x,k} > 0$. Обозначим через $\mathcal{S}^+ = \{t^+_i\}$ множество осевых-плюс точек.

Отметим, что так как мы предполагаем, что $p^+ > 0$, то результаты работы [6] применимы и к множеству $\mathcal{S}^+$, и в частности, (2.5) остается справедливым при замене $\{t_i\}$ на $\{t^+_i\}$.

Теперь мы определим множества $\mathcal{R}$ *стержневых* и $\mathcal{R}^+$ *стержневых-плюс* вершин. Пусть $c_1 \geqslant c_2 > 0$ – фиксированные числа. Для $x \in \mathbb{Z}$ определим следующие события:

$$A_x^r(c_1) = \bigcap_{i=1}^{\infty}\{w_{x,x+i} \geqslant c_1 i\},$$

$$A_x^0(c_2) = \bigcap_{j,i=1}^{\infty}\{v_{x-j,x+i} < c_2(j+i)\},$$

$$A_x^l(c_1) = \bigcap_{j=1}^{\infty}\{w_{x-j,x} \geqslant c_1 j\}.$$

Здесь событие $A_x^r(c_1)$ означает, что вершина x соединена путями конечного веса со всеми вершинами, находящимися справа от нее, и более того, все соответствующие максимальные веса путей строго положительны и растут по крайней мере линейно (со скоростью не меньшей c_1) с ростом расстояния от вершины x. Аналогично, событие $A_x^l(c_1)$ означает, что вершина x соединена путями конечного веса со всеми вершинами, находящимися слева от нее, и более того, все соответствующие максимальные веса путей строго положительны и растут по крайней мере линейно с ростом расстояния от вершины x. В частности, если происходят оба события $A_x^r(c_1)$ и $A_x^l(c_1)$, то вершина x является с необходимостью осевой, и к тому же $w_{x-j,x+i} \geqslant c_1(j+i)$ при всех $j, i \geqslant 0$. А если к тому же происходит и событие $A_x^0(c_2)$, то так как $c_2 \leqslant c_1$, то с необходимостью при любых $j, i \geqslant 0$ любой путь максимального веса из вершины $x-j$ в вершину $x+i$ обязан проходить через вершину x.

Определение 3. Назовем вершину x *стержневой*, если происходят все три события $A_x^l(c_2)$, $A_x^0(c_1)$ и $A_x^r(c_2)$, и пусть $\mathcal{R} = \{\Gamma_i\}$ – случайное множество стержневых вершин.

Так как события $\{x \in \mathcal{R}\}$ образуют стационарную эргодическую последовательность, то выполнен "закон нуля или единицы": либо с вероятностью единица множество $\mathcal{R}$ бесконечно, либо с вероятностью единица пусто. Предположим, что это множество бесконечно на некотором элементарном исходе. Тогда его элементы можно упорядочить:

$$\ldots < \Gamma_{-1} < 0 \leqslant \Gamma_0 < \Gamma_1 < \ldots,$$

и имеет место представление (2.4). Именно это свойство помогает нам в изучении асимптотики последовательности $w_{0,n}$ при стремлении n к бесконечности.

Введем по аналогии события

$$A_x^{r+}(c_1) = \bigcap_{i=1}^{\infty}\{w^+_{x,x+i} \geqslant c_1 i\},$$

$$A_x^{0+}(c_2) \equiv A_x^0(c_2) = \bigcap_{j,i=1}^{\infty}\{v_{x-j,x+i} < c_2(j+i)\},$$

$$A_x^{l+}(c_1) = \bigcap_{j=1}^{\infty}\{w^+_{x-j,x} \geqslant c_1 j\}.$$

Здесь событие $A_x^{r+}(c_1)$ означает, что вершина x соединена путями, использующими только ребра с положительными весами, со всеми вершинами, находящимися справа от нее, и более того, все соответствующие максимальные веса путей строго положительны и растут по крайней мере линейно с ростом расстояния от вершины x. Аналогично, событие $A_x^{l+}(c_1)$ означает, что вершина x соединена путями, использующими только ребра с положительными весами, со всеми вершинами, находящимися слева от нее, и более того, все соответствующие максимальные веса путей строго положительны и растут по крайней мере линейно с ростом расстояния от вершины x. С необходимостью $A_x^{l+}(c_1) \subseteq A_x^l(c_1)$ и $A_x^{r+}(c_1) \subseteq A_x^r(c_1)$ при любом $c_1 > 0$.

Определение 4. Назовем вершину x *стержневой-плюс*, если происходит событие $A_x^{l+}(c_1) \cap A_x^{0+}(c_2) \cap A_x^{r+}(c_1)$, и обозначим через $\mathcal{R}^+$ множество всех стержневых-плюс вершин. Это множество также либо п.н. бесконечно, либо п.н. пусто.

Отметим, что имеют место соотношения

$$\mathcal{R}^+ \subseteq \mathcal{R} \subseteq \mathcal{S} \quad \text{и} \quad \mathcal{R}^+ \subseteq \mathcal{S}^+ \subseteq \mathcal{S}. \tag{2.6}$$

Кроме этого, множества $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}^+$ монотонно возрастают с ростом c_2 и убыванием c_1.

2.2. Регенерирующая структура и существование показательных моментов. Для формулировки следующего утверждения нам понадобится распределение случайной величины v^+, заданное в (1.1). Пусть $\operatorname{ess\,inf} v^+ = \inf\{t > 0 : \mathbf{P}(v^+ < t) > 0\}$ и $V = \mathbf{E} \min\limits_{t_0^+ \leqslant i < j \leqslant t_1^+} v_{i,j}^+$. Ясно, что $\operatorname{ess\,inf} v^+ < V$, если распределение случайной величины v^+ невырождено. Положим $\gamma^+ = \dfrac{1}{\mathbf{E}(t_1^+ - t_0^+)}$. Из лемм 5–7 работы [6] вытекает следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть выполнено условие* (1.2). *Тогда если*

$$\gamma^+ \operatorname{ess\,inf} v^+ < c_2 \leqslant c_1 < \gamma^+ V, \tag{2.7}$$

то для любого $x \in \mathbb{Z}$ выполнено неравенство $\mathbf{P}(A_x^{l+}(c_1) \cap A_x^0(c_2) \cap A_x^{r+}(c_1)) > 0$ и множество $\mathcal{R}^+$ бесконечно с вероятностью 1. *Следовательно, и множество $\mathcal{R}$ также бесконечно с вероятностью* 1.

Замечание 3. В работе [6] стержневые точки вводились при $c_1 = c_2$ и соответствующие утверждения формулировались только в этом случае. Однако их доказательства не претерпевают никаких изменений (кроме небольших изменений в обозначениях) при выполнении более общих условий (2.7).

Определим циклы

$$\mathcal{C}_k^+ := \Big(\Gamma_k^+ - \Gamma_{k-1}^+;\ \Big\{v^+_{\Gamma^+_{k-1+j},\Gamma^+_{k-1+i}},\ 0 \leqslant j < i \leqslant \Gamma_k^+ - \Gamma_{k-1}^+\Big\}\Big), \quad k \in \mathbb{Z},$$

и

$$\mathcal{C}_k := \big(\Gamma_k - \Gamma_{k-1};\ \big\{v_{\Gamma_{k-1+j},\Gamma_{k-1+i}},\ 0 \leqslant j < i \leqslant \Gamma_k - \Gamma_{k-1}\big\}\big), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Имеет место следующая

Лемма 2. *При выполнении условий* (1.2) *и* (2.7) *справедливы следующие два утверждения*:

(I) *Случайные элементы $\{\mathcal{C}_k^+,\ k \in \mathbb{Z}\}$ независимы в совокупности, причем элементы $\{\mathcal{C}_k^+,\ k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$ одинаково распределены. Процесс $\Big(\Gamma_k^+, w^+_{\Gamma^+_{k-1},\Gamma^+_k}\Big)$, $k \in \mathbb{Z}$, является стационарным маркированным точечным процессов в дискретном времени, порождающим стационарный о.п.в., т.е. его первые координаты Γ_k^+ образуют стационарный точечный процесс с соответствующими метками $w^+_{\Gamma^+_{k-1},\Gamma^+_k}$.*

(II) *Утверждение* (I) *остается верным для циклов $\mathcal{C}_k$ при естественной замене Γ_k^+ на Γ_k и $w^+_{\Gamma^+_{k-1},\Gamma^+_k}$ на $w_{\Gamma_{k-1},\Gamma_k}$.*

Отметим, что утверждение (I) является прямым следствием леммы 3.8 работы [9] и что схемы доказательств утверждений (I) и (II) идентичны.

Докажем теперь первое из основных утверждений этого параграфа.

Л е м м а 3. *Пусть выполнены условия* (1.2) *и* (2.7). *Тогда найдется константа* $C > 0$, *такая что*

$$\mathbf{E}\, e^{C\Gamma_0^+} < \infty, \quad \textit{и следовательно,} \quad \mathbf{E}\, e^{C(\Gamma_1^+ - \Gamma_0^+)} < \infty. \tag{2.8}$$

Так как последовательность $\{\Gamma_n^+\}$ *является подпоследовательностью последовательности* $\{\Gamma_n\}$, *то утверждение* (2.8) *остается верным и при замене* Γ_0^+ *и* Γ_1^+ *на, соответственно,* Γ_0 *и* Γ_1, *т.е. при некотором* $C > 0$ *конечны два первых математических ожидания в* (2.2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Мы позаимствуем из работы [9] ряд вспомогательных построений. Определим множество $\mathcal{U} = \{x \in \mathbb{Z} :\ \mathbf{I}(A_x^{l+}(c_1)) = 1\}$. Нетрудно видеть, что $\mathcal{R}^+ \subseteq \mathcal{U}$. Обозначим через $\ldots, \rho_{-1}, \rho_0, \rho_1, \ldots$ возрастающую последовательность точек множества $\mathcal{U}$, где ρ_0 – его наименьший неотрицательный элемент. Зададим новую последовательность циклов: при $k \in \mathbb{Z}$

$$\mathcal{D}_k = \bigl(\rho_k - \rho_{k-1};\ \bigl\{v^+_{\rho_{k-1}+j,\rho_{k-1}+i},\ 0 \leqslant j < i \leqslant \rho_k - \rho_{k-1}\bigr\}\bigr).$$

Из леммы 3.10 работы [9] вытекает следующее утверждение.

Л е м м а 4. *Пусть выполнены условия* (1.2) *и* (2.7). *Тогда циклы* $(\mathcal{D}_k,\ k \in \mathbb{Z})$ *независимы, причем* $(\mathcal{D}_k,\ k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$ *одинаково распределены, а последовательность* ρ_n, $n \in \mathbb{Z}$, *образует стационарный точечный процесс, порождающий стационарный процесс восстановления.*

Утверждение леммы 4 несложно пояснить “на пальцах”. Введем для этого при $d > 0$ события

$$A^{l+}_{x,d}(c_1) := \bigcap_{j=1}^{d} \bigl\{w^+_{x-j,x} \geqslant c_1 j\bigr\}.$$

Отметим, что при любых целых $k \geqslant 0$ и $0 \leqslant s_0 < s_1 < \ldots < s_k$ событие $\{\rho_0 = s_0, \ldots, \rho_k = s_k\}$ однозначно определяется набором случайных величин $\mathcal{B}_{s_k} := \{v_{i,j},\ i < j \leqslant s_k\}$, и на этом событии равенство $\rho_{k+1} - \rho_k = m$ выполняется тогда и только тогда, когда $m = \min\bigl\{d > 0 :\ \mathbf{I}\bigl(A^{l+}_{s_k,s_k+d}(c_1)\bigr) = 1\bigr\}$, что определяется случайными величинами $\mathcal{B}_{s_k,s_k+m} := \{v^+_{i,j},\ s_k \leqslant i < j \leqslant m\}$. Нетрудно видеть, что семейства $\mathcal{B}_{s_k}$ и $\mathcal{B}_{s_k,s_k+m}$ не зависят друг от друга и к тому же распределение величин $\mathcal{B}_{s_k,s_k+m}$ не зависит от k и s_k, – это, по сути, и влечет утверждение леммы 4.

Введем также при $d > 0$ вспомогательные события

$$A^{r+}_{x,d}(c_1) := \bigcap_{i=1}^{d} \{w^+_{x,x+i} \geqslant c_1 i\},$$

$$A^{0+}_{x,d}(c_2) := \bigcap_{1 \leqslant i \leqslant d,\, j \geqslant 1}^{\infty} \{v_{x-j,x+i} < c_2(j+i)\}.$$

Положим $\mu = \inf\bigl\{d > 0 :\ \mathbf{I}\bigl(A^{0+}_{0,d}(c_2) \cap A^{r+}_{0,d}(c_1)\bigr) = 0\bigr\}$. Отметим, что $\mathbf{P}(\mu = \infty) = \mathbf{P}(A^{0+}_0(c_2) \cap A^{r+}_0(c_1)) > 0$. Зададим теперь последовательно случайные величины $\sigma_0, \mu_0, \ldots, \sigma_K, \mu_K$, где $K = \min\{k \geqslant 0 :\ \mu_k = \infty\}$. Положим

$$\sigma_0 = \rho_0, \quad \mu_0 = \inf\Bigl\{d > 0 :\ \mathbf{I}\bigl(A^{0+}_{\sigma_0,\sigma_0+d}(c_2) \cap A^{r+}_{\sigma_0,\sigma_0+d}(c_1)\bigr) = 0\Bigr\},$$

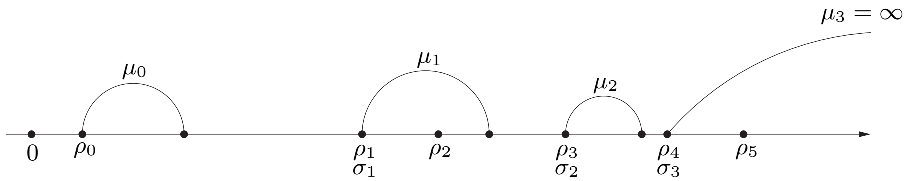

Рис. 1. Процесс построения последовательности σ_k. Изображен случай, когда $K = 3$; в изображенном случае $\sigma_3 = \rho_4$ – момент регенерации, который является оценкой сверху для Γ_0

и при $k = 0, 1, \dots$, если $\mu_k < \infty$, то

$$\begin{aligned}
&\sigma_{k+1} = \inf\{x \in \mathcal{U} :\ x \geqslant \sigma_k + \mu_k\},\\
&\mu_{k+1} = \inf\Big\{d > 0 :\ \mathbf{I}\big(A^{0+}_{\sigma_k,\sigma_k+d}(c_2) \cap A^{r+}_{\sigma_k,\sigma_k+d}(c_1)\big) = 0\Big\}.
\end{aligned}$$

Более наглядно процесс построения этой последовательности приведен на рис. 1.

Как следует из построения, $\sigma_k \in \mathcal{U}$ при $k \leqslant K$ и $\sigma_K \in \mathcal{R}^+$, и значит, $\sigma_K \geqslant \Gamma_0^+$ п.н. Кроме того, случайные величины $\{\mu_k\}$ образуют последовательность независимых и одинаково распределенных случайных величин, имеющих то же распределение, что и μ. Поэтому случайная величина K имеет геометрическое распределение с параметром q, и в частности, ее показательные моменты $\mathbf{E}\, e^{CK} < \infty$ конечны при $C < -1/\ln q$. Кроме этого, при любом $k \geqslant 1$ при условии $\{K = k\}$ случайные величины $\mu_0, \dots, \mu_{k-1}$ условно независимы и распределены как $\mathbf{P}(\mu_0 \in \cdot \,|\, \mu_0 < \infty)$.

В силу того, что $\rho_k - \rho_{k-1} \geqslant 1$,

$$\sigma_K \leqslant \rho_M = \rho_0 + \sum_{k=1}^{M} (\rho_k - \rho_{k-1}), \tag{2.9}$$

где $M := \sum\limits_{j=0}^{K-1} \mu_j$.

Поэтому если мы покажем, что выражение в правой части (2.9) имеет конечный показательный момент, то конечный показательный момент будет иметь также и σ_K, и из этого будет следовать утверждение леммы 3. С учетом леммы 9 из § 4 и элементарного неравенства $e^{x+y} < e^{2x} + e^{2y}$ при $x, y \geqslant 0$ нам достаточно показать, что, во-первых, случайная величина $\rho_1 - \rho_0$ имеет конечный показательный момент (поэтому конечный показательный момент будет существовать и у ρ_0), и во-вторых, вероятности $\mathbf{P}(\mu_0 = m \,|\, \mu_0 < \infty)$ убывают экспоненциально быстро по m.

В силу независимости ρ_0 и $\rho_1 - \rho_0$ и в силу того, что при каждом целом $n > 0$ при выполнении события $A_0^{l+}(c_1)$ события $A_n^{l+}(c_1)$ и $A_{n,n}^{l+}(c_1)$ либо происходят, либо не происходят одновременно, мы получаем, что распределения случайных величин $\rho_1 - \rho_0$ и $\nu := \min\{n :\ \mathbf{I}(A^{l+}_{n,n}(c_1)) = 1\}$ совпадают:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(\rho_1 - \rho_0 = m) = \mathbf{P}(\rho_1 - \rho_0 = m \,|\, \rho_0 = 0) = \mathbf{P}(\nu = m \,|\, \rho_0 = 0) = \mathbf{P}(\nu = m),\\
&\ m = 1, 2, \dots,
\end{aligned}$$

а существование показательного момента у случайной величины ν следует из предложения 3.12 работы [9].

Далее,

$$\mathbf{P}(\mu = d) = \mathbf{P}\Big(\big(A^{0+}_{0,d}(c_2) \cap A^{r+}_{0,d}(c_1)\big)^c \cap \big(A^{0+}_{0,d-1}(c_2) \cap A^{r+}_{0,d-1}(c_1)\big)\Big) \leqslant$$

$$\leqslant \mathbf{P}\Big(\big(A^{0+}_{0,d}(c_2)\big)^c \cap A^{0+}_{0,d-1}(c_2)\Big) + \mathbf{P}\Big(\big(A^{r+}_{0,d}(c_1)\big)^c \cap A^{r+}_{0,d-1}(c_1)\Big) \leqslant$$
$$\leqslant \mathbf{P}\Big(\sup_{j\geqslant 1}\big(v^+_{-j,d} - c_2 j\big) > c_2 d\Big) + \mathbf{P}(w^+_{0,d} < c_1 d) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{P}\big(v > c_2(d+j)\big) + \mathbf{P}\big(w^+_{0,d} < c_1 d\big).$$

В последнем выражении сумма вероятностей $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \mathbf{P}(v > c_2(d+j))$ убывает по d экспоненциально быстро в силу (1.2). Чтобы показать, что последняя вероятность также убывает экспоненциально быстро, мы найдем $\varepsilon > 0$, такое что $\widetilde{c} := c_1(1+3\varepsilon)$ также удовлетворяет (2.7). Положим $\eta(d) = \max\{k : t^+_k \leqslant d\}$ (где максимум по пустому множеству полагается равным $-\infty$). Тогда при $r = \gamma^+(1+\varepsilon)^{-1}$

$$\mathbf{P}\big(w^+_{0,d} < c_1 d\big) \leqslant \mathbf{P}(t^+_0 > d) + \mathbf{P}\Big(w^+_{t^+_0, t^+_{\eta(d)}} < c_1 d,\ t^+_0 \leqslant d\Big) \leqslant$$
$$\leqslant \mathbf{P}(t^+_0 > d) + \mathbf{P}\big(\eta(d) < [rd]\big) + \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{[rd]} w^+_{t_{i-1}, t_i} < c_1 d\right) \leqslant$$
$$\leqslant \mathbf{P}(t^+_0 > d) + \mathbf{P}\left(\sum_{1}^{[rd]} (t^+_i - t^+_{i-1}) > d\right) + \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{[rd]} w^+_{t_{i-1}, t_i} < c_1 d\right),$$

где $[rd]$ – целая часть числа rd. В последней строке все слагаемые убывают экспоненциально быстро по d: первое слагаемое потому, что t^+_0 имеет конечный показательный момент, а второе слагаемое – потому, что $t^+_i - t^+_{i-1}$ имеют конечный показательный момент, $\mathbf{E}(t^+_1 - t^+_0)r < 1$, и следовательно, по экспоненциальному неравенству Чебышева при $h > 0$

$$\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{[rd]} (t^+_i - t^+_{i-1}) > d\right) \leqslant \Big(\big(\mathbf{E}\exp\big(h(t^+_1 - t^+_0)\big)\big)^r e^{-h}\Big)^d,$$

где правая часть неравенства убывает экспоненциально быстро по d, если взять h достаточно малым. Наконец, третье слагаемое убывает экспоненциально быстро, потому что, как хорошо известно, для любой последовательности независимых одинаково распределенных положительных случайных величин $X, X_1, X_2, \ldots$ с конечным средним $\mathbf{E}\,X$ и для любого $\delta \in (0,1)$ вероятности $\mathbf{P}\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i < (1-\delta) n\,\mathbf{E}\,X\Big)$ убывают экспоненциально быстро с ростом n. В нашем случае $n = [rd] \geqslant rd - 1$, $X_i = w_{t^0_{i-1}, t^0_i}$, $\mathbf{E}\,w_{t^+_0, t^+_1} \geqslant V$ и $c_1 d \leqslant c_1(1+n)(1+\varepsilon)/\gamma^+ \leqslant c_1(1+2\varepsilon)nV/\gamma^+ < (1-\delta)nV$ при достаточно больших n, где $\delta = \varepsilon/(1+3\varepsilon)$.

Значит, вероятности $\mathbf{P}(\mu = d)$, а следовательно, и $\mathbf{P}(\mu = d\,|\,\mu < \infty)$ убывают экспоненциально быстро с ростом d. Это завершает доказательство леммы 3. ▲

Приведем теперь доказательство конечности последних двух математических ожиданий в (2.2).

Лемма 5. *Пусть выполнены условия* (1.2) *и* (2.7). *Тогда* $\mathbf{E}\exp(Cw_{0,\Gamma_0})$, *и следовательно,* $\mathbf{E}\exp(Cw_{\Gamma_0,\Gamma_1})$ *конечны при некотором* $C > 0$.

Доказательство. Выберем произвольный путь π из вершины 0 в вершину Γ_0 и предположим, что он включает в себя $d+1$ вершину, $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_d = \Gamma_0$.

Так как $\sum\limits_{k=1}^{d}(x_k - x_{k-1}) = \Gamma_0$, то

$$
\begin{aligned}
w_{0,\Gamma_0} &= \sum_{k=1}^{d} v_{x_{k-1},x_k} \leqslant \Gamma_0 + \sum_{k=1}^{d}(v_{x_{k-1},x_k} - (x_k - x_{k-1}))^+ \leqslant \\
&\leqslant \Gamma_0 + \sum_{0\leqslant x<y\leqslant\Gamma_0}(v_{x,y} - (y-x))^+ \leqslant \Gamma_0 + \sum_{x=0}^{\Gamma_0-1} Z_x,
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

где $\bigl\{Z_x := \max\limits_{y>x}(v_{x,y} - (y-x))^+\bigr\}_{x\in\mathbb{Z}}$ – последовательность независимых и одинаково распределенных неотрицательных случайных величин. В силу условия (1.2) хвост распределения

$$
\mathbf{P}(Z_0 > m) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{P}(v > m+k)
$$

убывает экспоненциально быстро с ростом m. Для завершения доказательства осталось опять воспользоваться элементарным неравенством $e^{x+y} < e^{2x} + e^{2y}$ и леммой 9. ▲

Мы завершим § 2 коротким доказательством одного простого факта, который понадобится нам в следующем параграфе.

Лемма 6. *Пусть* $p \in (0,1]$, *и пусть выполнены условия* (1.2) *и* (2.7). *Тогда* $\mathbf{P}(\Gamma_1 - \Gamma_0 = 1,\, w_{\Gamma_0,\Gamma_1} \geqslant y) > 0$ *для* $y \in (c_2, \operatorname{ess\,sup} v^+)$.

Доказательство. Следующие два события совпадают:

$$
\begin{aligned}
&\{\Gamma_0 = 0,\, \Gamma_1 - \Gamma_0 = 1,\, w_{\Gamma_0,\Gamma_1} \geqslant y\} = \\
&= A_0^l(c_1) \cap A_{0,1}^{0+}(c_2) \cap \{v_{0,1} \geqslant y\} \cap B_{1,1}(c_2) \cap A_1^r(c_1),
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

где

$$
B_{1,1}(c_2) = \bigcap_{j=1}^{\infty}\{v_{0,1+j} < c_2(1+j)\},
$$

при этом все пять событий в правой части представления (2.11) взаимно независимы и каждое имеет положительную вероятность. ▲

§ 3. Изучение обобщенного процесса восстановления и доказательство основной теоремы

В этом параграфе мы изучим о.п.в., порожденный стационарным маркированным точечным процессом $(\Gamma_k, w_{\Gamma_{k-1},\Gamma_k})$, $k \in \mathbb{Z}$. Используя результаты предыдущего параграфа и работы [7], а также классическую теорему Стоуна [12], мы покажем, что построенный для произвольных фиксированных допустимых констант c_1, c_2 о.п.в. и последовательность $w_{0,n}$ имеют одинаковую точную асимптотику в области нормальных и умеренно больших уклонений (результат теоремы 1). При этом, чтобы убрать "недоскок" о.п.в., будет произведено преобразование исходной меры. Утверждение о том, что характеристики α, σ^2 и $D(\alpha)$ в теореме 1 на самом деле не зависят от выбора констант c_1 и c_2, завершает нашу статью.

Далее нам будет удобно использовать краткие обозначения, унифицированные с обозначениями работы [7]:

$$
(\tau_k, \boldsymbol{u}_k) := (\tau_k, (u_{k,1}, \ldots, u_{k,\tau_k})), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{3.1}
$$

где

$$(\tau_1, (u_{1,1}, \dots, u_{1,\tau_1})) := (\Gamma_0, (w_{0,1}, \dots, w_{0,\Gamma_0})),$$
$$(\tau_k, (u_{k,1}, \dots, u_{k,\tau_k})) := (\Gamma_{k-1} - \Gamma_{k-2}, (w_{\Gamma_{k-2},\Gamma_{k-2}+1}, \dots, w_{\Gamma_{k-2},\Gamma_{k-1}})) \quad \text{при } k \geqslant 2.$$

Как было показано в § 2, векторы $(\tau_k, \boldsymbol{u}_k)$, $k \geqslant 2$, имеют одинаковое распределение, и мы будем использовать обозначение

$$(\tau, \boldsymbol{u}) := (\tau,\ (u_1, \dots, u_\tau)) \tag{3.2}$$

для любого вектора с этим распределением. Положим также $\zeta = u_\tau$ и $\zeta_k = u_{\tau_k}$, $k \geqslant 1$. Тогда, в частности, $\{(\tau_k, \zeta_k)\}$ – последовательность независимых случайных векторов, имеющих при $k \geqslant 2$ общее распределение с вектором (τ, ζ).

Перечислим утверждения из § 2 (основанные на леммах 2, 3, 5 и 6), которые нам сейчас потребуются. Пусть $p \in (0, 1]$ и c_1, c_2 удовлетворяют условию (2.7).

S_{I}. Последовательность (3.1) является последовательностью независимых векторов; при $k \geqslant 2$ векторы $(\tau_k, \boldsymbol{u}_k)$ имеют общее распределение.

S_{II}. Случайные величины u_{1,τ_1} и $u_1, \dots, u_\tau$ положительны, и при этом

$$\max\{u_1, \dots, u_{\tau-1}\} \leqslant u_\tau.$$

S_{III}. Найдется $C > 0$, такое что

$$\mathbf{E}\, e^{C\tau_1} < \infty, \quad \mathbf{E}\, e^{C\tau} < \infty, \quad \mathbf{E}\, e^{Cu_{1,\tau_1}} < \infty, \quad \mathbf{E}\, e^{Cu_\tau} < \infty.$$

S_{IV}. Вероятность $\mathbf{P}(\tau = 1, u_\tau \geqslant y)$ строго положительна при $y \in (c_2, \operatorname{ess\,sup} v^+)$.

Обозначим

$$(\tau, \zeta) := (\tau, u_\tau), \quad (\tau_k, \zeta_k) := (\tau_k, u_{k,\tau_k}), \quad k = 1, 2, \dots \tag{3.3}$$

Тогда последовательность $\{(\tau_k, \zeta_k)\}$ – это последовательность независимых случайных векторов, имеющих при $k \geqslant 2$ общее распределение с вектором (τ, ζ).

Из перечисленных утверждений вытекает

Следствие 1. *Пусть выполнены условия* (1.2) *и* (2.7). *Тогда справедливы следующие утверждения.*

(I) *Если для случайной величины v выполнено условие* [**Z**], *то для случайного вектора (τ, ζ) выполнено условие*

[**ZZ**] *Распределение случайного вектора является арифметическим и сосредоточено на решетке с шагом 1 по каждой из координат.*

(II) *Если для случайной величины v выполнено условие* [**R**], *то для случайного вектора (τ, ζ) выполнено условие*

[**ZR**] *Маргинальное распределение первой координаты вектора является арифметическим с шагом 1, а маргинальное распределение второй координаты – нерешетчатым*[4].

Перейдем теперь к доказательству основного результата.

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим последовательность $\{(\tau_k, \zeta_k)\}_{k=1}^{\infty}$ независимых случайных векторов, имеющих при $k \geqslant 2$ общее распределение с вектором (τ, ζ) (см. формулу (3.2) и обозначения после нее). Введем последовательности

[4] В терминах характеристической функции $f(z, l) := \mathbf{E}\, e^{iz\tau + il\zeta}$ случайного вектора (τ, ζ) эти два условия имеют следующий вид:
[**ZZ**] $f(2\pi z, 2\pi t) = 1$ для любого $(z, t) \in \mathbb{Z}^2$, $|f(z, t)| < 1$ для любого $(z, t) \notin \mathbb{Z}^2$.
[**ZR**] $f(2\pi z, 0) = 1$ для любого $z \in \mathbb{Z}$, $|f(2\pi z, 0)| < 1$ для любого $z \notin \mathbb{Z}$ и $|f(0, t)| < 1$ для любого $t \neq 0$.

частичных сумм

$$T_n := \sum_{k=0}^{n} \tau_k, \quad Z_n := \sum_{k=0}^{n} \zeta_k, \quad n \geqslant 0,$$

где $(\tau_0, \zeta_0) := (0, 0)$. Пусть

$$\eta_+(n) := \min\{k \geqslant 1 : T_k > n\}, \quad \nu_+(n) := \max\{k \geqslant 0 : T_k \leqslant n\} = \eta_+(n) - 1,$$
$$\gamma_+(n) := n - \nu_+(n).$$

Определим о.п.в. (так называемый "первый о.п.в."), положив

$$Z_+(n) := \sum_{k=0}^{\nu_+(n)} \zeta_k.$$

Поясним, что здесь мы используем обозначение $Z_+(n)$ с нижним индексом $+$ исключительно для того, чтобы согласовать наши обозначения с обозначениями работы [7], в которой наряду с обозначениями $Z_+(n)$, $\nu_+(n)$, $\gamma_+(n)$ использовались обозначения $Z(n)$, $\nu(n)$, $\gamma(n)$, т.е. этот индекс никак не связан с $w^+_{j,m}$.

Используя введенные обозначения, получаем представление

$$w_{0,n} = Z_+(n) + w_{n-\gamma_+(n),n} = Z_{\nu_+(n)} + w_{\nu_+(n),n}.$$

Рассмотрим случайный вектор (случайной длины), заданный формулой (3.2):

$$(\tau, (u_1, u_2, \cdots, u_\tau)),$$

координаты которого по определению удовлетворяют соотношениям

$$\tau \geqslant 1, \quad \min_{1 \leqslant i \leqslant \tau} u_i \geqslant c_1 > 0, \quad \max_{1 \leqslant i \leqslant \tau} u_i \leqslant u_\tau.$$

Определим далее случайный вектор (τ^*, ζ^*), принимающий значения $(i, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$, $i \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, задав его распределение (и считая $u_0 = 0$ с вероятностью 1)

$$\mathbf{P}(\tau^* = i,\ \zeta^* \in dy) := \frac{1}{Q}\, \mathbf{P}(\tau \geqslant i+1,\ u_i \in dy),$$

где

$$Q := \sum_{i=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \mathbf{P}(\tau \geqslant i+1,\ u_i \in dy) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{P}(\tau \geqslant i+1) = \mathbf{E}\tau.$$

Из условия S_{III} следует, что найдется константа $C > 0$, такая что

$$\mathbf{E}\, e^{C\tau^*} < \infty, \quad \mathbf{E}\, e^{C\zeta^*} < \infty.$$

Наряду с последовательностью $\{(\tau_k, \zeta_k)\}$, которая определяет о.п.в. $Z_+(n)$ и функционалы $\nu_+(n)$, $\gamma_+(n)$, определим последовательность $\{(\tau^*_k, \zeta^*_k)\}$, положив

$$(\tau^*_1, \zeta^*_1) := (\tau_1, \zeta_1) + (\tau^*, \zeta^*), \quad (\tau^*_k, \zeta^*_k) := (\tau_k, \zeta_k) \quad \text{при } k \geqslant 2,$$

где вектор (τ^*, ζ^*) и последовательность $\{(\tau_k, \zeta_k)\}$ независимы. Новая последовательность $\{(\tau^*_k, \zeta^*_k)\}$ определяет новый о.п.в. $Z^*_+(n)$ и новые функционалы $\nu^*_+(n)$ и $\gamma^*_+(n)$.

Л е м м а 7. *Пусть выполнены условия* S_{I}–S_{IV}. *Тогда для любых целых* $n \geqslant 2$ *и любых вещественных* $x \geqslant c_1$ *и* $\Delta > 0$ *справедливо равенство*

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}\big(Z_+(n) + w_{n-\gamma_+(n),n} \in [x, x+\Delta),\ \tau_1 \leqslant n\big) = \\ &= Q\,\mathbf{P}\big(Z_+^*(n) \in [x, x+\Delta),\ \gamma_+^*(n) = 0\big). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$\begin{aligned} P_n &:= \mathbf{P}\big(Z_+(n) + w_{n-\gamma_+(n),n} \in [x, x+\Delta),\ \tau_1 \leqslant n\big) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\big(T_k = n,\ Z_k \in [x, x+\Delta)\big) + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}\int_0^{\infty} \mathbf{P}\big(T_k = n-i,\ Z_k + y \in [x, x+\Delta),\ \tau_{k+1} \geqslant i+1,\ u_{k+1,i} \in dy\big). \end{aligned}$$

Поскольку событие $\mathbf{P}(\tau \geqslant 1,\ u_0 = 0) = 1$ и векторы $(\tau_{k+1}, u_{k+1,i})$ и (T_k, Z_k) независимы, то

$$\begin{aligned} P_n &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\big(T_k = n,\ Z_k \in [x, x+\Delta)\big)\,\mathbf{P}(\tau \geqslant 1,\ u_0 = 0) + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}\int_0^{\infty} \mathbf{P}\big(T_k = n-i,\ Z_k + y \in [x, x+\Delta)\big)\,\mathbf{P}(\tau \geqslant i+1,\ u_i \in dy) = \\ &= Q\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}\int_0^{\infty} \mathbf{P}\big(T_k = n-i,\ Z_k + y \in [x, x+\Delta)\big)\frac{1}{Q}\,\mathbf{P}(\tau \geqslant i+1,\ u_i \in dy) = \\ &= Q\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}\int_0^{\infty} \mathbf{P}\big(T_k = n-i,\ Z_k + y \in [x, x+\Delta)\big)\,\mathbf{P}(\tau^* = i,\ \zeta^* \in dy) = \\ &= Q\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\big(T_k^* = n,\ Z_k^* \in [x, x+\Delta)\big) = \\ &= Q\,\mathbf{P}\big(Z_+^*(n) \in [x, x+\Delta),\ \gamma_+^*(n) = 0,\ \nu_+^*(n) \geqslant 1\big) = \\ &= Q\,\mathbf{P}\big(Z_+^*(n) \in [x, x+\Delta),\ \gamma_+^*(n) = 0\big) - \\ &- Q\,\mathbf{P}\big(Z_+^*(n) \in [x, x+\Delta),\ \gamma_+^*(n) = 0,\ \nu_+^*(n) = 0\big) = \\ &= Q\,\mathbf{P}\big(Z_+^*(n) \in [x, x+\Delta),\ \gamma_+^*(n) = 0\big), \end{aligned}$$

где последнее равенство является следствием того, что при $x > 0$ выполняется

$\mathbf{P}(Z_+^*(n) \in [x, x+\Delta), \nu_+^*(n) = 0) = 0.$ ▲

В частном случае, когда v имеет арифметическое распределение, полагая $\Delta = 1$ в лемме 7 и выбирая $x \in \mathbb{Z}$, получаем в качестве следствия леммы 7 следующее утверждение.

Л е м м а 8. *Пусть выполнены условия* S_{I}–S_{IV}, *и пусть* v *удовлетворяет условию* $[\mathbf{Z}]$. *Тогда при любых целых* $n \geqslant 2$ *и* $x \geqslant 1$ *справедливо соотношение*

$$\mathbf{P}\big(Z_+(n) + w_{n-\gamma_+(n),n} = x,\ \tau_1 \leqslant n\big) = Q\,\mathbf{P}\big(Z_+^*(n) = x,\ \gamma_+^*(n) = 0\big). \tag{3.5}$$

Продолжим доказательство теоремы 1.

I. Обратимся сначала к арифметическому случаю. Для того чтобы воспользоваться результатами работы [7], нам придется наряду с о.п.в. $Z_+(n)$ определить о.п.в. $Z(n)$ (основные утверждения работы [7] произведены для о.п.в. $Z(n)$).

Пусть для $n \geqslant 1$

$$\nu(n) := \max\{k \geqslant 1 : \ T_k < n\}, \quad \gamma(n) := n - \nu(n).$$

Тогда

$$Z(n) := Z_{\nu(n)}.$$

Легко видеть (считая, что процессы $Z(n)$, $Z_+(n)$ построены на одном вероятностном пространстве по общей последовательности $\{(\tau_k, \zeta_k)\}$), что для $n \geqslant 1$

$$\nu_+(n) = \nu(n+1), \quad Z_+(n) = Z(n+1), \quad \gamma_+(n) = \gamma(n) - 1. \tag{3.6}$$

В частности, величина недоскока $\gamma(n)$ принимает значения $\{1, 2, \ldots\}$, а величина недоскока $\gamma_+(n)$ – значения $\{0, 1, 2, \ldots\}$. О.п.в., построенный по последовательности $\{(\tau_k^*, \zeta_k^*)\}$, и соответствующие ему функционалы обозначим теми же символами, снабдив их верхним индексом $*$, например:

$$\nu^*(n), \quad \nu_+^*(n), \quad Z^*(n), \quad Z_+^*(n), \quad \gamma^*(n), \quad \gamma_+^*(n) \quad \text{и т.д.}$$

В силу формул (3.6) из утверждений теоремы 2.1, следствия 2.1 и теоремы 2.1* работы [7] без труда выводим следующие два соотношения в области нормальных и умеренно больших уклонений, когда $x \in \mathbb{N}$, $x - na = o(n)$: при $n \to \infty$

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}(Z(n) = x) \sim \mathbf{P}(Z_+(n) = x) \sim \mathbf{P}(Z^*(n) = x) \sim \mathbf{P}(Z_+^*(n) = x) \sim \\ &\sim \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi n}} e^{-nD(\frac{x}{n})}, \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\mathbf{P}\big(Z_+^*(n) = x, \ \gamma_+^*(n) = 0\big) \sim \mathbf{P}\big(Z_+(n) = x, \ \gamma_+(n) = 0\big) \sim \frac{1}{\mathbf{E}\tau} \mathbf{P}(Z_+^*(n) = x). \tag{3.8}$$

Соотношения (3.7) показывают, что в наших условиях для локальных теорем в области нормальных и умеренно больших уклонений “нивелируются” различия между процессами $Z(n)$ и $Z_+(n)$, равно как и различия, связанные с неоднородностью.

Привлекая далее утверждение леммы 8 и замечая, что $Q = \mathbf{E}\tau$ и для некоторого $h > 0$

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}\big(Z_+(n) + w_{n-\gamma_+(n),n} = x\big) = \\ &= \mathbf{P}\big(Z_+(n) + w_{n-\gamma_+(n),n} = x, \ \tau_1 > n\big) + \mathbf{P}\big(Z_+(n) + w_{n-\gamma_+(n),n} = x, \ \tau_1 \leqslant n\big) = \\ &= \mathbf{P}\big(Z_+(n) + w_{n-\gamma_+(n),n} = x, \ \tau_1 \leqslant n\big) + O(e^{-nh}), \end{aligned}$$

получаем из (3.7) и (3.8) утверждение части I теоремы 1:

$$\mathbf{P}\big(Z_+(n) + w_{n-\gamma_+(n),n} = x\big) \sim \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi n}} e^{-nD(\frac{x}{n})}.$$

II. В основе доказательства части II лежит интегро-локальная теорема в областях нормальных, умеренно больших и больших уклонений, полученная в работе Стоуна [12]. Приведем формулировку этой теоремы в удобных для нас обозначениях. Функцию уклонений для случайного вектора (τ, ζ) определим как

$$\Lambda(\theta, \alpha) := \sup_{\lambda, \mu}\{\lambda\theta + \mu\alpha - A(\lambda, \mu)\}.$$

Определитель матрицы $\Lambda''(\theta,\alpha)$ вторых производных функции уклонений $\Lambda(\theta,\alpha)$ обозначим через $|\Lambda''(\theta,\alpha)|$.

Т е о р е м а 2 [12]. *Пусть распределение вектора* (τ_1,ζ_1) *совпадает с распределением* (τ,ζ) *и выполнены условия* S_{III} *и* [**ZR**]. *Тогда для некоторого* $\delta>0$ *и некоторой последовательности* $\Delta^{(0)}:=\Delta_n^{(0)}>0$, *сходящейся к нулю при* $n\to\infty$, *для любых* $(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{R}$, *таких что* $|\theta-a_\tau|+|\alpha-a_\zeta|\leqslant\delta$, *где* $(\theta,\alpha):=\left(\dfrac{x}{n},\dfrac{y}{n}\right)$, *имеет место соотношение*

$$\mathbf{P}\bigl(T_n=x,\ Z_n\in[y,y+\Delta)\bigr)=\frac{\Delta\sqrt{|\Lambda''(\theta,\alpha)|}}{2\pi n}\exp\{-n\Lambda(\theta,\alpha)\}(1+o(1)),$$

в котором $\Delta:=\Delta_n\geqslant\Delta_n^{(0)}$, $\Delta_n\to 0$ *при* $n\to\infty$, *а остаточный член* $o(n)=\varepsilon_n(x,y)$ *удовлетворяет соотношению*

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{\substack{(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{R}\\|\theta-a_\tau|+|\alpha-a_\zeta|\leqslant\delta}}|\varepsilon_n(x,y)|=0.$$

Используя утверждения S_{I}–S_{IV} и повторяя все этапы доказательства теорем 2.1, 2.1* и следствия 2.1 работы [7], можно получить аналоги этих утверждений, в которых символы $=x$ заменены на $\in[x,x+\Delta)$, а в правых частях появляется множитель Δ. Далее доказательство части II полностью повторяет соответствующее доказательство части I. ▲

Покажем теперь, что справедлива

Т е о р е м а 3. *Характеристики* a, σ *и* $D(\alpha)$, *в терминах которых приведены результаты теоремы* 1, *не зависят от выбора констант* c_1 *и* c_2.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Мы доказали, что локальные теоремы в областях нормальных и умеренно больших уклонений для процессов $w_{0,n}$ и $Z_+(n)$ выглядят одинаково, и формулировка этого утверждения содержит характеристики a, σ и $D(\alpha)$, которые однозначно определяются по вектору (τ,ζ) (см. (1.4)–(1.6)), “управляющему” о.п.в. $Z_+(n)$. А поскольку в построении вектора (τ,ζ) заняты произвольные константы c_1 и c_2, удовлетворяющие условию (2.7), то естественно ожидать, что и характеристики a, σ и $D(\alpha)$ будут зависеть от этих констант. Покажем, что это не так, т.е. покажем, что для любых других констант $\widetilde{c}_2\leqslant\widetilde{c}_1$, удовлетворяющих (2.7), характеристики $\widetilde{a}$, $\widetilde{\sigma}$ и $\widetilde{D}(\alpha)$, построенные для вектора $(\widetilde{\tau},\widetilde{\zeta})$, совпадают с характеристиками a, σ и $D(\alpha)$.

В силу уже доказанного для процессов $w_{0,n}$ и $\widetilde{Z}_+(n)$ справедлива такая же локальная теорема, в формулировке которой используются характеристики $\widetilde{a}$, $\widetilde{\sigma}$ и $\widetilde{D}(\alpha)$. Таким образом, для процесса $w_{0,n}$ справедливы две локальные теоремы, формулировки которых отличаются только характеристиками $a,\sigma,D(\alpha)$ и $\widetilde{a},\widetilde{\sigma},\widetilde{D}(\alpha)$. Из локальных теорем в области нормальных уклонений очевидным образом вытекают соответствующие законы больших чисел: для любого $\varepsilon>0$ справедливы соотношения

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}(|w_{0,n}-an|\leqslant n\varepsilon)=1,\qquad \lim_{n\to\infty}\mathbf{P}(|w_{0,n}-\widetilde{a}n|\leqslant n\varepsilon)=1.$$

Следовательно, с необходимостью $\widetilde{a}=a$.

Далее, если переписать формулировки двух локальных теорем с учетом равенства $\widetilde{a}=a$, то придем к соотношению

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}e^{-nD(\frac{x}{n})}\sim\frac{1}{\widetilde{\sigma}\sqrt{n}}e^{-n\widetilde{D}(\frac{x}{n})},$$

которое выполняется для любых $x = x_n \in \mathbb{Z}$ в зоне $\left|\frac{x}{n} - a\right| = o(1)$. Тогда с необходимостью из этого соотношения вытекают равенство констант $\sigma = \widetilde{\sigma}$ и равенство аналитических (в некоторой окрестности точки $\alpha = a$) функций $\widetilde{D}(\alpha) = D(\alpha)$. Таким образом, мы доказали, что характеристики a, σ и $D(\alpha)$ не зависят от выбора констант, по которым построен о.п.в. ▲

§ 4. Вспомогательный результат

Мы используем в доказательствах приводимый ниже результат, который не претендует на новизну. Так как его доказательство очень коротко, то мы решили привести и его.

Лемма 9. *Пусть* $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$, $n = 1, 2, \ldots,$ – *последовательность частичных сумм независимых и одинаково распределенных неотрицательных случайных величин* $\{X_i\}$, *и пусть* N – *неотрицательная целочисленная случайная величина. Предположим, что*

$$\mathbf{E}\, e^{CX_1} < \infty, \quad \mathbf{E}\, e^{CN} < \infty \quad \text{для некоторого } C > 0.$$

Тогда найдется константа $b > 0$, *такая что*

$$\mathbf{E}\, e^{bS_N} < \infty.$$

Доказательство. Возьмем любое $a > \mathbf{E}\, X_1$. Тогда

$$S_N = \sum_{i=1}^{N} (X_i - a) + aN \leqslant \sup_{n \geqslant 0} (S_n - na) + aN \equiv R + aN, \tag{4.1}$$

где мы считаем $S_0 = 0$. В силу (4.1) и элементарного неравенства $e^{x+y} \leqslant e^{2x} + e^{2y}$ при любом $b > 0$ будем иметь

$$e^{bS_N} \leqslant e^{2bR} + e^{2baN} \leqslant 1 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{2b(S_n - na)} + e^{2baN},$$

и следовательно,

$$\mathbf{E}\, e^{bS_N} \leqslant 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mathbf{E}\, e^{2b(X_1 - a)}\right)^n + \mathbf{E}\, e^{2baN}. \tag{4.2}$$

Так как $a > \mathbf{E}\, X_1$, то найдется достаточно малое $b > 0$, такое что $2b \max(1, a) < C$ и $\mathbf{E}\, e^{2b(X_1 - a)} < 1$. При таком b и правая часть в неравенстве (4.2) оказывается конечным числом. ▲

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Cohen J.E., Briand F., Newman C.M.* Community Food Webs: Data and Theory. Berlin: Springer, 1990.
2. *Newman C.M.* Chain Lengths in Certain Random Directed Graphs // Random Structures Algorithms. 1992. V. 3. № 3. P. 243–253. `https://doi.org/10.1002/rsa.3240030304`
3. *Gelenbe E., Nelson R., Philips T., Tantawi A.* An Approximation of the Processing Time for a Random Graph Model of Parallel Computation // Proc. 1986 ACM Fall Joint Computer Conf. (ACM'86). Los Alamitos, CA: IEEE Computer Society Press, 1986. P. 691–697. `https://dl.acm.org/doi/proceedings/10.5555/324493`

4. *Isopi M., Newman C.M.* Speed of Parallel Processing for Random Task Graphs // Comm. Pure Appl. Math. 1994. V. 47. № 3. P. 361–376. https://doi.org/10.1002/cpa.3160470307
5. *Foss S., Konstantopoulos T.* Extended Renovation Theory and Limit Theorems for Stochastic Ordered Graphs // Markov Process. Related Fields. 2003. V. 9. № 3. P. 413–468.
6. *Denisov D., Foss S., Konstantopoulos T.* Limit Theorems for a Random Directed Slab Graph // Ann. Appl. Probab. 2012. V. 22. № 2. P. 702–733. https://doi.org/10.1214/11-AAP783
7. *Могульский А.А., Прокопенко Е.И.* Локальные предельные теоремы для арифметических многомерных обобщенных процесов восстановления при выполнении условия Крамера // Матем. тр. 2019. Т. 22. № 2. С. 106–133. https://doi.org/10.33048/mattrudy.2019.22.207
8. *Могульский А.А., Прокопенко Е.И.* Функция уклонений и базовая функция для многомерного обобщенного процесса восстановления // Сиб. электрон. матем. изв. 2019. Т. 16. С. 1449–1463. https://doi.org/10.33048/semi.2019.19.100
9. *Foss S., Martin J.B., Schmidt P.* Long-Range Last-Passage Percolation on the Line // Ann. Appl. Probab. 2014. V. 24. № 1. P. 198–234. https://doi.org/10.1214/13-AAP920
10. *Foss S., Konstantopoulos T.* Limiting Properties of Random Graph Models with Vertex and Edge Weights // J. Stat. Phys. 2018. V. 173. № 3–4. P. 626–643. https://doi.org/10.1007/s10955-018-2080-3
11. *Тесемников П.И.* Об асимптотике кратчайшего расстояния между крайними вершинами в обобщенном графе Барака – Эрдеша // Сиб. электрон. матем. изв. 2018. Т. 15. С. 1556–1565. https://doi.org/10.33048/semi.2018.15.129
12. *Stone C.* On Local and Ratio Limit Theorems // Proc. 5th Berkeley Symp. on Mathematical Statitics and Probability. Univ. of California, Berkeley, 1965–66. Berkeley, CA: Univ. of California Press, 1967. V. 2: Contributions to Probability Theory. Part 2. P. 217–224. https://doi.org/10.1525/9780520325340-017

Константопулос Такис
Отделение математических наук, Ливерпульский университет,
Ливерпуль, Великобритания
T.Konstantopoulos@liverpool.ac.uk
Логачёв Артём Васильевич
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
Новосибирский государственный университет
Сибирский государственный университет геосистем
и технологий, Новосибирск
omboldovskaya@mail.ru
Могульский Анатолий Альфредович
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
Новосибирский государственный университет
mogul@math.nsc.ru
Фосс Сергей Георгиевич
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
Новосибирский государственный университет
Школа математических наук, Университет Хериот-Ватта,
Эдинбург, Великобритания
sergueiorfoss25@gmail.com

Поступила в редакцию
19.11.2020
После доработки
01.02.2021
Принята к публикации
08.02.2021