ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

Том 57 **2021** **Вып. 3**

УДК 621.391 : 519.725

© 2021 г. $\boxed{\text{Э.М. Габидулин}}$, **Н.И. Пилипчук, О.В. Трушина**

ГРАНИЦЫ МОЩНОСТИ ПОДПРОСТРАНСТВЕННЫХ КОДОВ С НЕМАКСИМАЛЬНЫМ КОДОВЫМ РАССТОЯНИЕМ

Изучаются подпространственные коды с немаксимальным кодовым расстоянием. В отличие от кодов-спредов, т.е. кодов с максимальным подпространственным расстоянием, здесь они названы неспредами. Рассмотрены семейства неспредов с использованием конструкций подпространственных кодов Силвы – Кёттера – Кшишанга (SKK) и многокомпонентных кодов с нулевым префиксом (МНП) Габидулина – Боссерта. Оценены мощности неспредов для большого числа параметров. Показано, что при больших размерностях мощности практически достигают верхней границы, соответствующей неравенству Джонсона.

Ключевые слова: конечное поле, код, спреды, декодирование, пространство, подпространство, мощность кода, ранговая метрика.

DOI: 10.31857/S0555292321030037

§ 1. Введение

Интерес к подпространственным кодам возрос в связи с развитием идей случайного сетевого кодирования [1] и распределенных систем хранения [2], где они нашли свое применение.

Подпространственный код – это некоторое множество подпространств из заданного пространства. Зададим конечное n-мерное пространство $W = GF(q)^n$ над конечным полем $GF(q)$. Пусть $W(n,m)$ – множество всех m-мерных подпространств пространства W, называемое *m-грассманианом.* Размер грассманиана определяется с помощью гауссовских коэффициентов:

$$|W(n,m)| = \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \frac{(q^n-1)(q^n-q)\ldots(q^n-q^{m-1})}{(q^m-1)(q^m-q)\ldots(q^m-q^{m-1})}.$$

Между двумя подпространствами $U, V \in W$ можно определить *подпространственное расстояние* в виде

$$\begin{aligned} d_{\text{sub}}(U,V) &= \dim(U \uplus V) - \dim(U \cap V) = \\ &= \dim(U) + \dim(V) - 2\dim(U \cap V), \end{aligned}$$

где $U \uplus V$ означает минимальное подпространство, содержащее оба подпространства U и V. Если U и V имеют одну и ту же размерность m, то подпространственное расстояние равно

$$d_{\text{sub}}(U,V) = 2(m - \dim(U \cap V)) = 2\delta,$$

где $\delta = m - \dim(U \cap V)$. Это расстояние называется также *грассмановой метрикой.*

Если код состоит из элементов m-грассманиана $W(n, m)$ с числом кодовых подпространств M, минимальным расстоянием d_{sub} и размерностью m, то он называется кодом постоянной размерности и обозначается $(M, n, d_{\text{sub}}, m)$. Код с максимальным расстоянием $d_{\text{sub}} = 2m$ называется *спредом*. Подпространственные коды с расстоянием, отличным от максимального, будем называть *неспредами*.

Выберем некоторый спред с параметрами (n, d_{sub}, m). Код с параметрами $(n+1, d_{\text{sub}}, m+1)$ является неспредом. Мощности этих двух кодов связаны неравенством Джонсона [3]

$$M(n+1, d_{\text{sub}}, m+1) \leqslant \frac{q^{n+1}-1}{q^{m+1}-1} M(n, d_{\text{sub}}, m). \tag{1}$$

Величину $K_J = \dfrac{q^{n+1}-1}{q^{m+1}-1}$ будем далее навывать *коэффициентом Джонсона*. Этот коэффициент показывает, что при переходе от спреда к неспреду мощность кода для выбранных параметров может быть максимально увеличена не более чем в K_J раз.

Рассмотрим спред с длиной $n = mt + s$, где t и s – целые числа, причем $0 \leqslant s \leqslant m-1$. Если $s = 0$, то спред называется *полным*, а при $s > 0$ – *частичным*. Известно, что существуют оптимальные полные спреды и для некоторых параметров оптимальные частичные спреды. Так, в работе [4] рассматривались МНП-спреды, т.е. спреды, построенные по принципу многокомпонентных кодов с нулевым префиксом (МНП), предложенных в [5]. Было показано, что полные МНП-спреды и частичные МНП-спреды достигают верхней границы мощности.

Мощность полного МНП-спреда равна [4]

$$M_{\text{МНП-спред}} = \frac{q^n-1}{q^m-1}. \tag{2}$$

Используя соотношения (1) и (2), можно получить верхнюю границу мощности неспреда

$$M_{\max} = K_J \frac{q^n-1}{q^m-1} = \frac{q^{n+1}-1}{q^{m+1}-1} \frac{q^n-1}{q^m-1}. \tag{3}$$

§ 2. Неспреды из SKK-спредов

В работах [6, 7] Силва, Кёттер и Кшишанг подробно описали лифтинговую конструкцию своего подпространственного SKK-кода, предназначенного для передачи по сети с помощью случайных линейных преобразований [1]. Этот код состоит из множества матриц вида

$$\mathcal{M}_{\text{SKK}} = \left\{ \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{M}_{m\times(n-m)} \end{pmatrix} \right\},$$

где $\boldsymbol{I}_m$ – единичная матрица порядка m, а $\boldsymbol{M}_{m\times(n-m)}$ – кодовая матрица размера $m \times (n-m)$ из матричного рангового кода $\mathcal{M}_{\text{rank}}$ с ранговым расстоянием $d_{\text{rank}} = \delta$ (см. [8]). Подпространственное расстояние кода $\mathcal{M}_{\text{SKK}}$ равно удвоенному ранговому расстоянию матричного кода.

Мощность SKK-кода равна числу кодовых слов рангового кода с ранговым расстоянием $d_{\text{rank}} = \delta$ и длиной кодовых слов $(n-m)$:

$$M_{\text{SKK}} = |\mathcal{M}_{\text{SKK}}| = |\mathcal{M}_{\text{rank}}| = q^{(n-m)k},$$

где $k = m-\delta+1$, $\delta \leqslant m$. Для SKK-спреда с параметрами $(n, d_{\text{sub}} = 2m, m)$, где $\delta = m$, $n = tm$, $t \in \mathbb{N}$, построим неспред, увеличив размерность и длину на 1, т.е. неспред

Таблица 1

Доля мощности SKK-неспреда от максимальной при $q = 2$

m	t								
	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0,7225806	0,6719160	0,6601128	0,6572124	0,6564904	0,6563101	0,6562650	0,6562538	0,6562509
3	0,8398950	0,8227212	0,8206130	0,8203501	0,8203172	0,8203131	0,8203126	0,8203125	0,8203125
4	0,9135490	0,9085358	0,9082239	0,9082044	0,9082032	0,9082031	0,9082031	0,9082031	0,9082031
5	0,9550118	0,9536569	0,9536146	0,9536133	0,9536133	0,9536133	0,9536133	0,9536133	0,9536133
6	0,9770423	0,9766902	0,9766847	0,9766846	0,9766846	0,9766846	0,9766846	0,9766846	0,9766846
7	0,9884023	0,9883125	0,9883118	0,9883118	0,9883118	0,9883118	0,9883118	0,9883118	0,9883118
8	0,9941710	0,9941483	0,9941483	0,9941483	0,9941483	0,9941483	0,9941483	0,9941483	0,9941483
9	0,9970779	0,9970722	0,9970722	0,9970722	0,9970722	0,9970722	0,9970722	0,9970722	0,9970722
10	0,9985371	0,9985356	0,9985356	0,9985356	0,9985356	0,9985356	0,9985356	0,9985356	0,9985356
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
30	0,9999999	0,9999999	0,9999999	0,9999999	0,9999999	0,9999999	0,9999999	0,9999999	0,9999999

с параметрами $(n+1, d_{\text{sub}} = 2m, m+1)$. Для этих параметров $k = (m+1)-m+1 = 2$. Определим, какую долю составляет мощность SKK-неспреда от максимальной (3):

$$K_{\text{SKK}} = \frac{q^{2(n-m)}}{M_{\max}} = q^{2(n-m)} \frac{q^{m+1}-1}{q^{n+1}-1} \frac{q^m-1}{q^n-1}.$$

Она довольно быстро увеличивается при увеличении m. Значения для разных m и t при $q = 2$ приведены в табл. 1.

§ 3. Неспреды из МНП-спредов

Рассмотрим МНП-спред [4], т.е. $(n, d_{\text{sub}} = 2m, m)$-подпространственный код, где $n = tm$, $t \in \mathbb{N}$, и построим код размерности $m+1$ с длиной кодовых матриц $n+1 = tm+1$, $t \in \mathbb{N}$, и подпространственным расстоянием $d_{\text{sub}} = 2m$. Первой компонентой этого кода является SKK-код, а каждая следующая компонента – сдвиг предыдущей компоненты на нулевой префикс. Таким образом,

$$\begin{array}{ll}
\text{1-я компонента} & \left(\boldsymbol{I}_{m+1} \quad \boldsymbol{M}^1_{(m+1)\times(n-m)}\right), \\
\text{2-я компонента} & \left(\boldsymbol{0}_{(m+1)\times m} \quad \boldsymbol{I}_{m+1} \quad \boldsymbol{M}^2_{(m+1)\times(n-2m)}\right), \\
(t-2)\text{-я компонента} & \Big(\underbrace{\boldsymbol{0}_{(m+1)\times m} \;\; \boldsymbol{0}_{(m+1)\times m} \;\; \ldots \;\; \boldsymbol{0}_{(m+1)\times m}}_{t-3} \quad \boldsymbol{I}_{m+1} \quad \boldsymbol{M}^{t-2}_{(m+1)\times 2m}\Big), \\
(t-1)\text{-я компонента} & \Big(\underbrace{\boldsymbol{0}_{(m+1)\times m} \;\; \boldsymbol{0}_{(m+1)\times m} \;\; \ldots \;\; \boldsymbol{0}_{(m+1)\times m}}_{t-2} \quad \boldsymbol{I}_{m+1} \quad \boldsymbol{M}^{t-1}_{(m+1)\times m}\Big), \\
t\text{-я компонента} & \Big(\underbrace{\boldsymbol{0}_{(m+1)\times m} \;\; \boldsymbol{0}_{(m+1)\times m} \;\; \ldots \;\; \boldsymbol{0}_{(m+1)\times m}}_{t-1} \quad \boldsymbol{I}_{m+1}\Big),
\end{array}$$

здесь $\boldsymbol{M}$ – матрица рангового кода, где верхний индекс указывает номер компоненты, а нижний – размер матрицы. Для заданных параметров $k = (m+1)-m+1 = 2$.

Мощность этого МНП-неспреда равна сумме мощностей компонент:

$$M_{\text{МНП}} = q^{k(n-m)} + \sum_{i=1}^{t-2} q^{kmi} + 1 = \frac{q^{kn}-1}{q^{km}-1}. \tag{4}$$

Как и для случая SKK-кода, определим, какую долю составляет мощность МНП-неспреда от максимальной $K_{\text{МНП}} = \dfrac{M_{\text{МНП}}}{M_{\max}}$. Значения для разных m и t при $q = 2$ представлены в табл. 2.

Таблица 2

Доля мощности МНП-неспреда от максимальной при $q = 2$

m	t								
	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0,7677419	0,7165354	0,7041096	0,7010259	0,7002564	0,7000641	0,7000160	0,7000040	0,7000010
3	0,8530184	0,8357771	0,8336385	0,8333715	0,8333381	0,8333339	0,8333334	0,8333333	0,8333333
4	0,9171175	0,9120986	0,9117856	0,9117660	0,9117648	0,9117647	0,9117647	0,9117647	0,9117647
5	0,9559444	0,9545892	0,9545468	0,9545455	0,9545455	0,9545455	0,9545455	0,9545455	0,9545455
6	0,9772809	0,9769287	0,9769232	0,9769231	0,9769231	0,9769231	0,9769231	0,9769231	0,9769231
7	0,9884626	0,9883728	0,9883721	0,9883721	0,9883721	0,9883721	0,9883721	0,9883721	0,9883721
8	0,9941862	0,9941635	0,9941634	0,9941634	0,9941634	0,9941634	0,9941634	0,9941634	0,9941634
9	0,9970817	0,9970760	0,9970760	0,9970760	0,9970760	0,9970760	0,9970760	0,9970760	0,9970760
10	0,9985380	0,9985366	0,9985366	0,9985366	0,9985366	0,9985366	0,9985366	0,9985366	0,9985366
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
30	0,9999999	0,9999999	0,9999999	0,9999999	0,9999999	0,9999999	0,9999999	0,9999999	0,9999999

Рассмотрим отношение

$$\frac{K_{\text{МНП}}}{K_{SKK}} = \frac{q^{kn}-1}{q^{km}-1}\frac{1}{q^{k(n-m)}} = \frac{q^{kn}-1}{q^{kn}-q^{k(n-m)}}.$$

Величина $\dfrac{K_{\text{МНП}}}{K_{SKK}}$ всегда больше единицы, следовательно, МНП-неспреды быстрее приближаются к максимальной мощности с ростом размерности m.

§ 4. Неспреды из частичных МНП-спредов

Рассмотрим частичный МНП-спред $(n, d_{\text{sub}} = 2m, m)$ [4], где $n = tm + s$, $t \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant s < m$, и построим из него неспред, увеличив длину и размерность на единицу:

$$\begin{array}{ll}
\text{1-я компонента} & \left(\boldsymbol{I}_{m+1} \quad \boldsymbol{M}^1_{(m+1)\times(n-m)}\right), \\
\text{2-я компонента} & \left(\mathbf{0}_{(m+1)\times m} \quad \boldsymbol{I}_{m+1} \quad \boldsymbol{M}^2_{(m+1)\times(n-2m)}\right), \\
(t-2)\text{-я компонента} & \left(\underbrace{\mathbf{0}_{(m+1)\times m} \quad \mathbf{0}_{(m+1)\times m} \ \dots \ \mathbf{0}_{(m+1)\times m}}_{t-3} \quad \boldsymbol{I}_{m+1} \quad \boldsymbol{M}^{t-2}_{(m+1)\times(2m+s)}\right), \\
(t-1)\text{-я компонента} & \left(\underbrace{\mathbf{0}_{(m+1)\times m} \quad \mathbf{0}_{(m+1)\times m} \ \dots \ \mathbf{0}_{(m+1)\times m}}_{t-2} \quad \boldsymbol{I}_{m+1} \quad \boldsymbol{M}^{t-1}_{(m+1)\times(m+s)}\right), \\
t\text{-я компонента} & \left(\underbrace{\mathbf{0}_{(m+1)\times m} \quad \mathbf{0}_{(m+1)\times m} \ \dots \ \mathbf{0}_{(m+1)\times m}}_{t-1} \quad \boldsymbol{I}_{m+1} \quad \boldsymbol{M}^{t}_{(m+1)\times s}\right).
\end{array}$$

Подсчитаем мощность частичного МНП-неспреда:

$$M_{\text{част. МНП}} = \frac{q^{kn} - q^{k(m+s)}}{q^{km}-1} + 1. \tag{5}$$

Как и в предыдущих случаях, определим долю мощности частичного МНП-неспреда от максимальной. В табл. 3 для примера приведем некоторые расчетные значения.

§ 5. Известные работы по неспредам

Приведем примеры неспредов с наилучшими значениями мощности по отношению к ранее известным подпростанственным кодам с теми же параметрами. В работе [9] с помощью систем Штейнера построен подпространственный код с параметрами $(n = 13, d_{\text{sub}} = 4, m = 3)$ и мощностью $M = 1597245$. Полученное значение мощности совпадает с верхней границей Джонсона (3).

Таблица 3

Доля мощности частичного МНП-неспреда от максимальной при $q = 2$

m	t									s
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
2	0,8024691	0,7291248	0,7074621	0,7018763	0,7004697	0,7001175	0,7000294	0,7000073	0,7000018	1
3	0,8892734	0,8409784	0,8342984	0,8334541	0,8333484	0,8333352	0,8333336	0,8333334	0,8333333	1
	0,9117595	0,8436442	0,8346293	0,8334954	0,8333536	0,8333359	0,8333336	0,8333334	0,8333333	2
4	0,9412305	0,9137060	0,9118864	0,9117723	0,9117652	0,9117647	0,9117647	0,9117647	0,9117647	1
	0,9545451	0,9145145	0,9119369	0,9117755	0,9117654	0,9117647	0,9117647	0,9117647	0,9117647	2
	0,9615337	0,9149200	0,9119621	0,9117770	0,9117655	0,9117648	0,9117647	0,9117647	0,9117647	3
5	0,9697041	0,9550330	0,9545607	0,9545459	0,9545455	0,9545455	0,9545455	0,9545455	0,9545455	1
	0,9769231	0,9552552	0,9545676	0,9545461	0,9545455	0,9545455	0,9545455	0,9545455	0,9545455	2
	0,9806196	0,9553664	0,9545711	0,9545463	0,9545455	0,9545455	0,9545455	0,9545455	0,9545455	3
	0,9824899	0,9554220	0,9545728	0,9545463	0,9545455	0,9545455	0,9545455	0,9545455	0,9545455	4
6	0,9846163	0,9770451	0,9769250	0,9769231	0,9769231	0,9769231	0,9769231	0,9769231	0,9769231	1
	0,9883721	0,9771033	0,9769259	0,9769231	0,9769231	0,9769231	0,9769231	0,9769231	0,9769231	2
	0,9902723	0,9771325	0,9769263	0,9769231	0,9769231	0,9769231	0,9769231	0,9769231	0,9769231	3
	0,9912280	0,9771470	0,9769266	0,9769231	0,9769231	0,9769231	0,9769231	0,9769231	0,9769231	4
	0,9917073	0,9771543	0,9769267	0,9769231	0,9769231	0,9769231	0,9769231	0,9769231	0,9769231	5
7	0,9922482	0,9884026	0,9883723	0,9883721	0,9883721	0,9883721	0,9883721	0,9883721	0,9883721	1
	0,9941634	0,9884175	0,9883724	0,9883721	0,9883721	0,9883721	0,9883721	0,9883721	0,9883721	2
	0,9951267	0,9884250	0,9883725	0,9883721	0,9883721	0,9883721	0,9883721	0,9883721	0,9883721	3
	0,9956097	0,9884287	0,9883725	0,9883721	0,9883721	0,9883721	0,9883721	0,9883721	0,9883721	4
	0,9958516	0,9884306	0,9883725	0,9883721	0,9883721	0,9883721	0,9883721	0,9883721	0,9883721	5
	0,9959727	0,9884315	0,9883726	0,9883721	0,9883721	0,9883721	0,9883721	0,9883721	0,9883721	6
20	0,9999990	0,9999986	0,9999986	0,9999986	0,9999986	0,9999986	0,9999986	0,9999986	0,9999986	1
	0,9999993	0,9999986	0,9999986	0,9999986	0,9999986	0,9999986	0,9999986	0,9999986	0,9999986	2
	0,9999994	0,9999986	0,9999986	0,9999986	0,9999986	0,9999986	0,9999986	0,9999986	0,9999986	3
	0,9999995	0,9999986	0,9999986	0,9999986	0,9999986	0,9999986	0,9999986	0,9999986	0,9999986	4
	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
	0,9999995	0,9999986	0,9999986	0,9999986	0,9999986	0,9999986	0,9999986	0,9999986	0,9999986	19

В работах [10, 11] были построены подпространственные коды для параметров $n = 6$, $m = 3$, $d_{\text{sub}} = 4$ мощности 77 и $n = 7$, $m = 3$, $d_{\text{sub}} = 4$ мощности 329 соответственно.

Для кода с параметрами $(n = 6, d_{\text{sub}} = 4, m = 3)$ и мощностью $M = 77$ в [10] был сначала использован компьютерный поиск. Затем полученные коды были проанализированы, и в новой конструкции использованы ранговые коды с параметрами $(n = 3, d_{\text{rank}} = 3, m = 2)$ и мощностью $M = 64$. Затем построен SKK-код с параметрами $(n = 6, d_{\text{sub}} = 4, m = 3)$. Дополнительная обработка привела к построению кода мощности $M = 77$. После этого значение мощности 77 считается наилучшим для кода с параметрами $(n = 6, d_{\text{sub}} = 4, m = 3)$, в то время как неравенство Джонсона определяет верхнюю границу мощности $M(6, 4, 3) = 81$.

Другой код с параметрами $(n = 7, d_{\text{sub}} = 4, m = 3)$ и мощностью $M = 329$ был построен примерно таким же способом в [11]. Предварительно был построен ранговый код, присоединена единичная матрица и получен SKK-код. Кроме того, использованы идеи конечной геометрии. Верхняя граница мощности для этого кода из неравенства Джонсона равна 381.

В работе [12] построен код с параметрами $(n = 8, d_{\text{sub}} = 6, m = 4)$ и мощностью 272. Граница Джонсона дает для этого кода значение 281.

Таким образом, кроме первой работы [9], остальные не дают значения, близкого к максимальной мощности по Джонсону. Однако, насколько нам известно, эта работа не имела продолжения для построения кодов с другими параметрами.

Известно также несколько работ [13, 14] одной направленности. Они используют SKK-коды в параллельных конструкциях и достигают существенного увеличения числа кодовых слов для определенных параметров. Сравним мощности для параметров, рассмотренных в работах [13, 14].

В [13] была определена нижняя граница мощности кода с параметрами $(16, 8, 8)$: $A(16, 8, 8) = 1099562828461$. Код с параметрами $(16, 8, 8)$ может быть построен как неспред полного спреда. Действительно,

$$d = 2\delta = 8 \implies \delta = 4 = m,$$
$$k = m + 1 - \delta + 1 = 8 - 4 + 1 = 5,$$
$$n = 3 \times 4 \implies t = 3,$$

и по формуле (4) при $q = 2$ получаем $M(16,8,8) = \dfrac{2^{60}-1}{2^{20}-1}$. Тогда

$$\frac{M(16,8,8)}{A(16,8,8)} = 0{,}999954.$$

Аналогично можно получить

$$\frac{M(19,4,6)}{A(19,4,6)} = 0{,}8828625, \qquad \frac{M(18,8,9)}{A(18,8,9)} = 0{,}999955, \qquad \frac{M(18,6,9)}{A(18,6,9)} = 0{,}9948,$$
$$\frac{M(18,4,5)}{A(18,4,5)} = 0{,}89316, \qquad \frac{M(14,4,7)}{A(14,4,7)} = 0{,}884, \qquad \frac{M(12,6,6)}{A(12,6,6)} = 0{,}995.$$

Конструкции, предложенные в [13, 14], достаточно сложны и используют нелинейные условия, из-за которых не удается построить коды для любых параметров. Как видно из приведенных выше соотношений, с помощью простых конструкций, предложенных в настоящей статье, можно построить коды, содержащие более 88% возможных кодовых слов, а при иных параметрах и более 99%. Более того, эти конструкции позволяют строить коды для любых параметров, и полученные коды могут быть эффективно декодированы [15].

§ 6. Заключение

Рассмотрены семейства подпространственных кодов большой мощности с немаксимальным кодовым расстоянием. Алгоритм построения основан на неравенстве Джонсона: задаем код-спред, у которого подпространственное расстояние равно удвоенной размерности, и сохраняя расстояние, увеличиваем размерность и длину на единицу. В качестве исходного спреда рассмотрено три варианта: SKK-спред, МНП-спред и частичный МНП-спред. Показано, что при больших размерностях во всех трех кодах практически достигается максимальная граница мощности в соответствии с неравенством Джонсона.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ahlswede R., Cai N., Li S.-Y.R., Yeung R.W.* Network Information Flow // IEEE Trans. Inform. Theory. 2000. V. 46. № 4. P. 1204–1216. `https://doi.org/10.1109/18.850663`
2. *Ghemawat S., Gobioff H., Leung S.-T.* The Google File System // ACM SIGOPS Oper. Syst. Rev. 2003. V. 37. № 5. P. 29–43. `https://doi.org/10.1145/1165389.945450`
3. *Xia S.-T., Fu F.-W.* Johnson Type Bounds on Constant Dimension Codes // Des. Codes Cryptography. 2009. V. 50. № 2. P. 163–172. `https://doi.org/10.1007/s10623-008-9221-7`
4. *Габидулин Э.М., Пилипчук Н.И.* Многокомпонентные коды с максимальным кодовым расстоянием // Пробл. передачи информ. 2016. Т. 52. № 3. С. 85–92. `http://mi.mathnet.ru/ppi2213`
5. *Gabidulin E., Bossert M.* Codes for Network Coding // Proc. 2008 IEEE Int. Symp. on Information Theory (ISIT'2008). Toronto, Canada. July 6–11, 2008. P. 867–870. `https://doi.org/10.1109/ISIT.2008.4595110`
6. *Koetter R., Kschischang F.R.* Coding for Errors and Erasures in Random Network Coding // IEEE Trans. Inform. Theory. 2008. V. 54. № 8. P. 3579–3591. `https://doi.org/10.1109/TIT.2008.926449`

7. *Silva D., Koetter R., Kschischang F.R.* A Rank-Metric Approach to Error Control in Random Network Coding // IEEE Trans. Inform. Theory. 2008. V. 54. № 9. P. 3951–3967. https://doi.org/10.1109/TIT.2008.928291
8. *Габидулин Э.М.* Теория кодов с максимальным ранговым расстоянием// Пробл. передачи информ. 1985. Т. 21. № 1. С. 3–16. http://mi.mathnet.ru/ppi967
9. *Braun M., Etzion T., Östergård P.R.G., Vardy A., Wassermann A.* Existence of q-Analogs of Steiner Systems // Forum Math. Pi. 2016. V. 4. Research Paper e7 (14 pp.). https://doi.org/10.1017/fmp.2016.5
10. *Honold T., Kiermaier M., Kurz S.* Optimal Binary Subspace Codes of Length 6, Constant Dimension 3 and Minimum Distance 4, arXiv:1311.0464v2 [math.CO], 2014.
11. *Liu H., Honold T.* A New Approach to the Main Problem of Subspace Coding, arXiv:1408.1181 [math.CO], 2014.
12. *Heinlein D, Kurz S.* An Upper Bound for Binary Subspace Codes of Length 8, Constant Dimension 4 and Minimum Distance 6 // Proc. 10th Int. Workshop on Coding and Cryptography (WCC'2017). St. Petersburg, Russia. Sept. 18–22, 2017.
13. *Xu L., Chen H.* New Constant-Dimension Subspace Codes from Maximum Rank Distance Codes // IEEE Trans. Inform. Theory. 2018. V. 64. № 9. P. 6315–6319. https://doi.org/10.1109/TIT.2018.2839596
14. *He X., Chen Y.* Constructions of Const Dimension Codes from Serval Parallel Lift MRD Code, arXiv:1911.00154 [cs.IT], 2019.
15. *Габидулин Э.М., Пилипчук Н.И., Боссерт М.* Декодирование случайных сетевых кодов // Пробл. передачи информ. 2010. Т. 46. № 4. С. 33–55. http://mi.mathnet.ru/ppi2025

Габидулин Эрнст Мухамедович
(04.06.1937 – 22.06.2021)
Пилипчук Нина Ивановна
Трушина Оксана Вячеславовна
Московский физико-технический институт
(государственный университет)
pilipchuk.nina@gmail.com
oksana.trushina@gmail.com

Поступила в редакцию
03.02.2021
После доработки
11.06.2021
Принята к публикации
23.06.2021