ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

Том 57 **2021** **Вып. 3**

УДК 519.651 : 517.589

 Е.А. Карацуба

О МЕТОДЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ДЗЕТА-КОНСТАНТ, ОСНОВАННОМ НА ОДНОМ ТЕОРЕТИКО-ЧИСЛОВОМ ПОДХОДЕ[1]

Новые формулы для дзета-констант получены на основе теоретико-числового подхода, применяемого для доказательства иррациональности некоторых классических констант. Используя эти формулы, можно приблизить дзета-константы и их комбинации рациональными дробями и построить новый эффективный метод их вычисления.

Ключевые слова: дзета-константы, приближения, рациональные дроби, подход Эрмита – Бёйкерса, многочлены Лежандра, обобщенные гармонические числа, алгоритмы.

DOI: 10.31857/S0555292321030050

§ 1. Введение

Проблема построения эффективных методов вычисления значений дзета-функции Римана в точках разной арифметической природы рассматривалась многими авторами (см., например, [1–6]).

В [7] был построен новый метод быстрого приближения дзета-констант, т.е. значений дзета-функции Римана $\zeta(n)$, $n \geqslant 2$, n – целое число, рациональными дробями. Этот метод возник на основе подхода Эрмита – Бёйкерса (см. [8–10]), который был применен последним для доказательства иррациональности дзета-констант $\zeta(2)$ и $\zeta(3)$ с использованием двух специально подобранных полиномов $P_n(x)$ и $Q_n(x)$, $n \geqslant 1$:

$$P_n(x) = \frac{1}{n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \left(x^n(1-x)^n\right), \quad Q_n(x) = (1-x)^n. \tag{1}$$

Различные варианты метода Бёйкерса, его модификаций и обобщений широко применяются в последнее время при исследовании значений различных функций на иррациональность (см., например, [9–14], а также [4]).

В [7] был представлен метод, который позволяет приблизить дзета-константы и некоторые их комбинации достаточно простыми выражениями из рациональных дробей, в которых участвуют коэффициенты многочленов (1), и затем эффективно их вычислить.

В настоящей статье продолжены исследования, начатые в [7]. Построен метод с участием трех многочленов (а не двух, как в [7]) и описан алгоритм аппроксимации и вычисления дзета-констант. Следует упомянуть, что метод из [7] предполагает, что оба многочлена необходимы для обеспечения достаточно хорошего приближения (как в методе Бёйкерса, см. [9,10]). В представленном методе с тремя многочленами

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (номер проекта 19-07-00750).

можно сделать выбор и пойти двумя путями:
1) все три многочлена обеспечат скорость сходимости; или
2) два многочлена обеспечат скорость сходимости, а подбирая коэффициенты третьего многочлена, можно уменьшить количество вычисляемых рациональных дробей.

Итак, представленный метод с тремя многочленами является первым, в котором возможны манипуляции с коэффициентами (третьего многочлена) для понижения сложности вычисления.

Далее мы используем следующие стандартные обозначения. Обобщенное гармоническое число $H_n^{(m)}$ порядка m представляет собой следующую сумму для натуральных чисел n и m:

$$H_n^{(m)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^m}, \quad H_n^{(1)} = H_n, \quad H_0^{(m)} = 0. \tag{2}$$

Свойства и методы вычисления гармонических чисел хорошо изучены: см., например, [15–17].

§ 2. Вспомогательные формулы

При $|t| < 1$ имеем

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} t^k.$$

Отсюда

$$I_3 = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{dx\,dy\,dz}{1-xyz} = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} x^k y^k z^k\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_0^1 x^k\,dx\right)\left(\int_0^1 y^k\,dy\right)\left(\int_0^1 z^k dz\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^3} = \zeta(3).$$

Лемма 1. *При любых $r_1, r_2, r_3 \geqslant 0$, $s \geqslant 3$ справедливо соотношение*

$$I(r_1, r_2, r_3) = \int_0^1 \ldots \int_0^1 \frac{x_1^{r_1} x_2^{r_2} x_3^{r_3}}{1 - x_1 x_2 x_3 \ldots x_s}\,dx_1\,dx_2\,dx_3 \ldots dx_s =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(r_1+k+1)(r_2+k+1)(r_3+k+1)(k+1)^{s-3}}. \tag{3}$$

Доказательство. При $0 < x_1, \ldots, x_s < 1$, $0 < x_1 x_2 \ldots x_s < 1$, имеем

$$\frac{1}{1 - x_1 \ldots x_s} = \sum_{k=0}^{\infty} (x_1 \ldots x_s)^k,$$

$$I(r_1, r_2, r_3) = \int_0^1 \ldots \int_0^1 \frac{x_1^{r_1} x_2^{r_2} x_3^{r_3}}{1 - x_1 x_2 x_3 \ldots x_s}\,dx_1\,dx_2\,dx_3 \ldots dx_s =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 x_1^{k+r_1}\,dx_1 \int_0^1 x_2^{k+r_2}\,dx_2 \int_0^1 x_3^{k+r_3}\,dx_3 \int_0^1 x_4^k\,dx_4 \ldots \int_0^1 x_s^k\,dx_s =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{r_1+k+1} \cdot \frac{1}{r_2+k+1} \cdot \frac{1}{r_3+k+1} \cdot \frac{1}{(k+1)^{s-3}},$$

что и требовалось доказать. ▲

Лемма 2. *Для любого целого $s \geqslant 1$ и любых $r \geqslant 1$, $k \geqslant 0$ справедливы тождества*

$$\frac{1}{(r+k+1)(k+1)^s} = \sum_{j=1}^{s} (-1)^{j-1} \frac{1}{r^j (k+1)^{s+1-j}} + (-1)^s \frac{1}{r^s (r+k+1)}, \tag{4}$$

$$\frac{1}{(r+k+1)^2(k+1)^s} = \sum_{j=1}^{s} (-1)^{j-1} \frac{j}{r^{j+1} (k+1)^{s+1-j}} +$$

$$+ (-1)^s \frac{s}{r^{s+1}(r+k+1)} + (-1)^s \frac{1}{r^s (r+k+1)^2}, \tag{5}$$

$$\frac{1}{(r+k+1)^3(k+1)^s} = \sum_{j=1}^{s} (-1)^{j-1} \frac{j(j+1)}{2r^{j+2} (k+1)^{s+1-j}} +$$

$$+ (-1)^s \frac{s(s+1)}{2r^{s+2}(r+k+1)} + (-1)^s \frac{s}{r^{s+1}(r+k+1)^2} + (-1)^s \frac{1}{r^s (r+k+1)^3}. \tag{6}$$

Доказательство. Формулы (4)–(6) доказываются индукцией по s. Докажем, например, (6). При $s=1$ справедливость равенства

$$\frac{1}{(r+k+1)^3(k+1)} =$$

$$= \frac{1}{r^3(k+1)} - \frac{1}{r^3(r+k+1)} - \frac{1}{r^2(r+k+1)^2} - \frac{1}{r(r+k+1)^3} \tag{7}$$

проверяется непосредственно. Пусть (6) справедливо при $s \leqslant n$, и пусть

$$\frac{1}{(r+k+1)^3(k+1)^n} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \frac{j(j+1)}{2r^{j+2} (k+1)^{n+1-j}} +$$

$$+ (-1)^n \frac{n(n+1)}{2r^{n+2}(r+k+1)} + (-1)^n \frac{n}{r^{n+1}(r+k+1)^2} + (-1)^n \frac{1}{r^n (r+k+1)^3}. \tag{8}$$

Докажем, что (6) справедливо также при $s=n+1$. Из (8) имеем

$$\frac{1}{(r+k+1)^3(k+1)^{n+1}} = \frac{1}{k+1} \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j-1} j(j+1)}{2r^{j+2} (k+1)^{n+1-j}} +$$

$$+ \frac{(-1)^n n(n+1)}{2r^{n+2}(k+1)(r+k+1)} + \frac{(-1)^n n}{r^{n+1}(k+1)(r+k+1)^2} + \frac{(-1)^n}{r^n (k+1)(r+k+1)^3}.$$

Подставляя в последнее выражение (4), (5) при $s=1$ и формулу (7), находим

$$\frac{1}{(r+k+1)^3(k+1)^{n+1}} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j-1} j(j+1)}{2r^{j+2} (k+1)^{n+2-j}} + \frac{(-1)^n n(n+1)}{2r^{n+2}} \left(\frac{1}{r(k+1)} - \frac{1}{r(r+k+1)} \right) +$$

$$+\frac{(-1)^n n}{r^{n+1}}\left(\frac{1}{r^2(k+1)}-\frac{1}{r^2(r+k+1)}-\frac{1}{r(r+k+1)^2}\right)+$$
$$+\frac{(-1)^n}{r^n}\left(\frac{1}{r^3(k+1)}-\frac{1}{r^3(r+k+1)}-\frac{1}{r^2(r+k+1)^2}-\frac{1}{r(r+k+1)^3}\right)=$$
$$=\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{j-1}j(j+1)}{2r^{j+2}(k+1)^{n+2-j}}+\frac{(-1)^n\left(\frac{n(n+1)}{2}+n+1\right)}{r^{n+3}(k+1)}+$$
$$+\frac{(-1)^{n+1}\left(\frac{n(n+1)}{2}+n+1\right)}{r^{n+3}(r+k+1)}+\frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{r^{n+2}(r+k+1)^2}+\frac{(-1)^{n+1}}{r^{n+1}(r+k+1)^3}=$$
$$=\sum_{j=1}^{n+1}\frac{(-1)^{j-1}j(j+1)}{2r^{j+2}(k+1)^{n+2-j}}+\frac{(-1)^{n+1}(n+1)(n+2)}{2r^{n+3}(r+k+1)}+$$
$$+\frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{r^{n+2}(r+k+1)^2}+\frac{(-1)^{n+1}}{r^{n+1}(r+k+1)^3},$$

т.е. получаем формулу (6) при $s=n+1$. ▲

§ 3. Основная формула

Пусть $a_0,a_1,\ldots,a_n$, $b_0,b_1,\ldots,b_n$, $c_0,c_1,\ldots,c_n$ – произвольные числа; рассмотрим многочлены $P_n(x)$, $Q_n(x)$ и $T_n(x)$, $n\geqslant 1$:

$$P_n(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n,$$
$$Q_n(x)=b_0+b_1x+\ldots+b_nx^n,$$
$$T_n(x)=c_0+c_1x+\ldots+c_nx^n.$$

Умножим левую и правую части соотношения (3) на $a_{r_1}b_{r_2}c_{r_3}$ и просуммируем по $r_1,r_2,r_3=0,1,\ldots,n$; $s\geqslant 3$:

$$I_s=I_s(n)=\sum_{r_1=0}^{n}\sum_{r_2=0}^{n}\sum_{r_3=0}^{n}a_{r_1}b_{r_2}c_{r_3}I(r_1,r_2,r_3)=$$
$$=\int_0^1\ldots\int_0^1\frac{P_n(x_1)Q_n(x_2)T_n(x_3)}{1-x_1x_2x_3\ldots x_s}\,dx_1\,dx_2\,dx_3\ldots dx_s= \tag{9}$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^{s-3}}\sum_{r_1=0}^{n}\sum_{r_2=0}^{n}\sum_{r_3=0}^{n}\frac{a_{r_1}b_{r_2}c_{r_3}}{(r_1+k+1)(r_2+k+1)(r_3+k+1)}.$$

Выделяя в (9) члены с $r_1=r_2=r_3=0$, затем с $r_1=r_2=0$, $r_3\neq 0$, $r_2=r_3=0$, $r_1\neq 0$, $r_1=r_3=0$, $r_2\neq 0$, и наконец, с $r_1=0$, $r_2,r_3\neq 0$, $r_2=0$, $r_1,r_3\neq 0$, $r_3=0$, $r_1,r_2\neq 0$, получаем

$$I_s=a_0b_0c_0\zeta(s)+a_0b_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^{s-1}}\sum_{r_3=1}^{n}\frac{c_{r_3}}{r_3+k+1}+$$
$$+a_0c_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^{s-1}}\sum_{r_2=1}^{n}\frac{b_{r_2}}{r_2+k+1}+b_0c_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^{s-1}}\sum_{r_1=1}^{n}\frac{a_{r_1}}{r_1+k+1}+$$
$$+a_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^{s-2}}\sum_{r_2=1}^{n}\sum_{r_3=1}^{n}\frac{b_{r_2}c_{r_3}}{(r_2+k+1)(r_3+k+1)}+$$

$$+ b_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^{s-2}} \sum_{r_1=1}^{n} \sum_{r_3=1}^{n} \frac{a_{r_1} c_{r_3}}{(r_1+k+1)(r_3+k+1)} +$$
$$+ c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^{s-2}} \sum_{r_1=1}^{n} \sum_{r_2=1}^{n} \frac{a_{r_1} b_{r_2}}{(r_1+k+1)(r_2+k+1)} +$$
$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^{s-3}} \sum_{r_1=1}^{n} \sum_{r_2=1}^{n} \sum_{r_3=1}^{n} \frac{a_{r_1} b_{r_2} c_{r_3}}{(r_1+k+1)(r_2+k+1)(r_3+k+1)}. \tag{10}$$

Разобьем двойные суммы по r_μ, $\mu = 1, 2, 3$, в правой части (10) на две суммы: сумму, в которой индексы суммирования равны, и сумму, в которой они не равны, т.е., например,

$$\sum_{r_1=1}^{n} \sum_{r_2=1}^{n} \frac{a_{r_1} b_{r_2}}{(r_1+k+1)(r_2+k+1)} =$$
$$= \sum_{r_1=1}^{n} \frac{a_{r_1} b_{r_1}}{(r_1+k+1)^2} + \sum_{\substack{r_1, r_2=1 \\ r_1 \neq r_2}}^{n} \frac{a_{r_1} b_{r_2}}{r_2 - r_1} \left(\frac{1}{r_1+k+1} - \frac{1}{r_2+k+1} \right). \tag{11}$$

В тройной сумме по r_ξ из (10) также выделим слагаемые с одинаковыми индексами, воспользовавшись соотношениями

$$\sum_{r_1=1}^{n} \sum_{r_2=1}^{n} \sum_{r_3=1}^{n} \frac{a_{r_1} b_{r_2} c_{r_3}}{(r_1+k+1)(r_2+k+1)(r_3+k+1)} = \sum_{r_1=1}^{n} \frac{a_{r_1} b_{r_1} c_{r_1}}{(r_1+k+1)^3} +$$
$$+ \sum_{\substack{r_1, r_2, r_3=1 \\ r_1 = r_2 \neq r_3}}^{n} \frac{a_{r_1} b_{r_1} c_{r_3}}{(r_1+k+1)^2 (r_3+k+1)} + \sum_{\substack{r_1, r_2, r_3=1 \\ r_1 = r_3 \neq r_2}}^{n} \frac{a_{r_1} b_{r_2} c_{r_1}}{(r_1+k+1)^2 (r_2+k+1)} +$$
$$+ \sum_{\substack{r_1, r_2, r_3=1 \\ r_2 = r_3 \neq r_1}}^{n} \frac{a_{r_1} b_{r_2} c_{r_2}}{(r_2+k+1)^2 (r_1+k+1)} + \sum_{\substack{r_1, r_2, r_3=1 \\ r_1 \neq r_2 \neq r_3}}^{n} \frac{a_{r_1} b_{r_2} c_{r_3}}{(r_1+k+1)(r_2+k+1)(r_3+k+1)}.$$

Таким образом,

$$\sum_{r_1=1}^{n} \sum_{r_2=1}^{n} \sum_{r_3=1}^{n} \frac{a_{r_1} b_{r_2} c_{r_3}}{(r_1+k+1)(r_2+k+1)(r_3+k+1)} =$$
$$= \sum_{r_1=1}^{n} \frac{a_{r_1} b_{r_1} c_{r_1}}{(r_1+k+1)^3} + \sum_{\substack{r_1, r_2=1 \\ r_1 \neq r_2}}^{n} \frac{a_{r_1} b_{r_1} c_{r_2} + a_{r_1} b_{r_2} c_{r_1} + a_{r_2} b_{r_1} c_{r_1}}{(r_1+k+1)^2 (r_2+k+1)} -$$
$$- \sum_{\substack{r_1, r_2, r_3=1 \\ r_1 \neq r_2 \neq r_3}}^{n} \frac{a_{r_1} b_{r_2} c_{r_3}}{(r_1+k+1)(r_3-r_2)} \left(\frac{1}{r_3+k+1} - \frac{1}{r_2+k+1} \right).$$

Отсюда находим

$$\sum_{r_1=1}^{n} \sum_{r_2=1}^{n} \sum_{r_3=1}^{n} \frac{a_{r_1} b_{r_2} c_{r_3}}{(r_1+k+1)(r_2+k+1)(r_3+k+1)} =$$

$$= \sum_{r_1=1}^{n} \frac{a_{r_1} b_{r_1} c_{r_1}}{(r_1+k+1)^3} + \sum_{\substack{r_1,r_2=1\\ r_1\neq r_2}}^{n} \frac{a_{r_1} b_{r_1} c_{r_2} + a_{r_1} b_{r_2} c_{r_1} + a_{r_2} b_{r_1} c_{r_1}}{(r_1+k+1)^2(r_2+k+1)} -$$

$$- \sum_{\substack{r_1,r_2,r_3=1\\ r_1\neq r_3\neq r_2}}^{n} \frac{a_{r_1} b_{r_2} c_{r_3}}{(r_3-r_2)(r_2-r_1)} \left(\frac{1}{r_2+k+1} - \frac{1}{r_1+k+1} \right) +$$

$$+ \sum_{\substack{r_1,r_2,r_3=1\\ r_1\neq r_2\neq r_3}}^{n} \frac{a_{r_1} b_{r_2} c_{r_3}}{(r_3-r_2)(r_3-r_1)} \left(\frac{1}{r_3+k+1} - \frac{1}{r_1+k+1} \right). \tag{12}$$

Подставляя (11), (12) в (10), находим:

$$I_s = a_0 b_0 c_0 \zeta(s) + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r_1=1}^{n} \frac{a_0 b_0 c_{r_1} + a_0 c_0 b_{r_1} + b_0 c_0 a_{r_1}}{(k+1)^{s-1}(r_1+k+1)} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r_1=1}^{n} \frac{a_0 b_{r_1} c_{r_1} + b_0 a_{r_1} c_{r_1} + c_0 a_{r_1} b_{r_1}}{(k+1)^{s-2}(r_1+k+1)^2} -$$

$$- \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{r_1,r_2=1\\ r_1\neq r_2}}^{n} \frac{a_0 b_{r_1} c_{r_2} + b_0 a_{r_2} c_{r_1} + c_0 a_{r_1} b_{r_2}}{(k+1)^{s-2}(r_2-r_1)} \left(\frac{1}{r_2+k+1} - \frac{1}{r_1+k+1} \right) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r_1=1}^{n} \frac{a_{r_1} b_{r_1} c_{r_1}}{(k+1)^{s-3}(r_1+k+1)^3} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{r_1,r_2=1\\ r_1\neq r_2}}^{n} \frac{a_{r_1} b_{r_1} c_{r_2} + a_{r_1} b_{r_2} c_{r_1} + a_{r_2} b_{r_1} c_{r_1}}{(k+1)^{s-3}(r_1+k+1)^2(r_2-r_1)} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{r_1,r_2=1\\ r_1\neq r_2}}^{n} \frac{a_{r_1} b_{r_1} c_{r_2} + a_{r_1} b_{r_2} c_{r_1} + a_{r_2} b_{r_1} c_{r_1}}{(k+1)^{s-3}(r_2-r_1)^2} \left(\frac{1}{r_2+k+1} - \frac{1}{r_1+k+1} \right) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{r_1,r_2,r_3=1\\ r_1\neq r_2\neq r_3}}^{n} \frac{a_{r_1} b_{r_2} c_{r_3}}{(k+1)^{s-3}} \Bigg(\frac{1}{(r_3-r_2)(r_3-r_1)(r_3+k+1)} +$$

$$+ \frac{1}{(r_2-r_3)(r_2-r_1)(r_2+k+1)} + \frac{1}{(r_1-r_3)(r_1-r_2)(r_1+k+1)} \Bigg). \tag{13}$$

Из (13) при $s = 3$ имеем:

$$I_3 = a_0 b_0 c_0 \zeta(3) + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r_1=1}^{n} \frac{a_0 b_0 c_{r_1} + a_0 c_0 b_{r_1} + b_0 c_0 a_{r_1}}{(k+1)^{2}(r_1+k+1)} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r_1=1}^{n} \frac{a_0 b_{r_1} c_{r_1} + b_0 a_{r_1} c_{r_1} + c_0 a_{r_1} b_{r_1}}{(k+1)(r_1+k+1)^2} -$$

$$- \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{r_1,r_2=1\\ r_1\neq r_2}}^{n} \frac{a_0 b_{r_1} c_{r_2} + b_0 a_{r_2} c_{r_1} + c_0 a_{r_1} b_{r_2}}{(k+1)(r_2-r_1)} \left(\frac{1}{r_2+k+1} - \frac{1}{r_1+k+1} \right) +$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{r_1=1}^{n}\frac{a_{r_1}b_{r_1}c_{r_1}}{(r_1+k+1)^3}+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\substack{r_1,r_2=1\\ r_1\neq r_2}}^{n}\frac{a_{r_1}b_{r_1}c_{r_2}+a_{r_1}c_{r_1}b_{r_2}+b_{r_1}c_{r_1}a_{r_2}}{(r_1+k+1)^2(r_2-r_1)}+$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\substack{r_1,r_2=1\\ r_1\neq r_2}}^{n}\frac{a_{r_1}b_{r_1}c_{r_2}+a_{r_1}c_{r_1}b_{r_2}+b_{r_1}c_{r_1}a_{r_2}}{(r_2-r_1)^2}\left(\frac{1}{r_2+k+1}-\frac{1}{r_1+k+1}\right)+$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\substack{r_1,r_2,r_3=1\\ r_1\neq r_2\neq r_3}}^{n}\frac{a_{r_1}b_{r_2}c_{r_3}}{(r_3-r_2)(r_3-r_1)}\left(\frac{1}{r_3+k+1}-\frac{1}{r_1+k+1}\right)+$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\substack{r_1,r_2,r_3=1\\ r_1\neq r_2\neq r_3}}^{n}\frac{a_{r_1}b_{r_2}c_{r_3}}{(r_3-r_2)(r_1-r_2)}\left(\frac{1}{r_2+k+1}-\frac{1}{r_1+k+1}\right). \tag{14}$$

Для большей компактности представления формул введем обозначения

$$S_{00r_1}=a_0b_0c_{r_1}+a_0c_0b_{r_1}+b_0c_0a_{r_1},$$
$$S_{0r_1r_1}=a_0b_{r_1}c_{r_1}+b_0a_{r_1}c_{r_1}+c_0a_{r_1}b_{r_1},$$
$$S_{0r_1r_2}=a_0b_{r_1}c_{r_2}+b_0a_{r_2}c_{r_1}+c_0a_{r_1}b_{r_2},$$
$$S_{r_1r_1r_2}=a_{r_1}b_{r_1}c_{r_2}+a_{r_1}c_{r_1}b_{r_2}+b_{r_1}c_{r_1}a_{r_2}.$$

Преобразуя суммы из (14) на основе леммы 2, легко видеть следующее:

1) для второго слагаемого в правой части (14) справедливо соотношение

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{r_1=1}^{n}\frac{S_{00r_1}}{(k+1)^2(r_1+k+1)}=\zeta(2)\sum_{r_1=1}^{n}\frac{S_{00r_1}}{r_1}-\sum_{r_1=1}^{n}\frac{S_{00r_1}H_{r_1}}{r_1^2}; \tag{15}$$

2) для третьего слагаемого в правой части (14) справедливо равенство

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{r_1=1}^{n}\frac{S_{0r_1r_1}}{(k+1)(r_1+k+1)^2}=\sum_{r_1=1}^{n}\frac{S_{0r_1r_1}H_{r_1}}{r_1^2}-\sum_{r_1=1}^{n}\frac{S_{0r_1r_1}}{r_1}\left(\zeta(2)-H_{r_1}^{(2)}\right); \tag{16}$$

3) далее имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{r_1=1}^{n}\frac{a_{r_1}b_{r_1}c_{r_1}}{(r_1+k+1)^3}=\sum_{r_1=1}^{n}a_{r_1}b_{r_1}c_{r_1}\left(\zeta(3)-H_{r_1}^{(3)}\right); \tag{17}$$

4) далее находим

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\substack{r_1,r_2=1\\ r_1\neq r_2}}^{n}\frac{S_{0r_1r_2}}{r_2-r_1}\left(\frac{1}{(k+1)(r_2+k+1)}-\frac{1}{(k+1)(r_1+k+1)}\right)=$$
$$=\sum_{\substack{r_1,r_2=1\\ r_1\neq r_2}}^{n}\frac{S_{0r_1r_2}}{r_2-r_1}\left(\frac{H_{r_2}}{r_2}-\frac{H_{r_1}}{r_1}\right); \tag{18}$$

5) и наконец, замечаем, что

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\substack{r_1,r_2=1\\ r_1\neq r_2}}^{n}\frac{S_{r_1r_1r_2}}{(r_1+k+1)^2(r_2-r_1)}=\sum_{\substack{r_1,r_2=1\\ r_1\neq r_2}}^{n}\frac{S_{r_1r_1r_2}}{r_2-r_1}\left(\zeta(2)-H_{r_1}^{(2)}\right). \tag{19}$$

Подставляя (15)–(19) в (14) и выполняя очевидные преобразования, получаем

$$I_3 = \zeta(3)\sum_{r_1=0}^{n} a_{r_1}b_{r_1}c_{r_1} + \zeta(2)\left(\sum_{\substack{r_1,r_2=1\\ r_1\neq r_2}}^{n}\left(\frac{S_{00r_1}-S_{0r_1r_1}}{r_1}+\frac{S_{r_1r_1r_2}}{r_2-r_1}\right)\right)+$$

$$+\sum_{\substack{r_1,r_2,r_3=1\\ r_1\neq r_2\neq r_3}}^{n}\left(-a_{r_1}b_{r_1}c_{r_1}H_{r_1}^{(3)}+\left(\frac{S_{0r_1r_1}}{r_1}-\frac{S_{r_1r_1r_2}}{r_2-r_1}\right)H_{r_1}^{(2)}+\frac{S_{0r_1r_1}-S_{00r_1}}{r_1^2}H_{r_1}-\right.$$

$$-\frac{S_{0r_1r_2}}{r_2-r_1}\left(\frac{H_{r_2}}{r_2}-\frac{H_{r_1}}{r_1}\right)-\frac{S_{r_1r_1r_2}}{(r_2-r_1)^2}\left(H_{r_2}-H_{r_1}\right)-a_{r_1}b_{r_2}c_{r_3}\times$$

$$\left.\times\left(\frac{H_{r_1}}{(r_1-r_3)(r_1-r_2)}+\frac{H_{r_2}}{(r_2-r_1)(r_2-r_3)}+\frac{H_{r_3}}{(r_3-r_1)(r_3-r_2)}\right)\right), \qquad (20)$$

где $H_{r_\xi}^m$, $\xi=1,2,3$, $m=1,2,3$ суть гармонические числа, т.е. суммы, определяемые соотношениями (2). Аналогично из (13) при $s=4$ находим

$$I_4 = a_0b_0c_0\zeta(4)+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{r_1=1}^{n}\frac{S_{00r_1}}{(k+1)^3(r_1+k+1)}+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{r_1=1}^{n}\frac{S_{0r_1r_1}}{(k+1)^2(r_1+k+1)^2}-$$

$$-\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\substack{r_1,r_2=1\\ r_1\neq r_2}}^{n}\frac{S_{0r_1r_2}}{(k+1)^2(r_2-r_1)}\left(\frac{1}{r_2+k+1}-\frac{1}{r_1+k+1}\right)+$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{r_1=1}^{n}\frac{a_{r_1}b_{r_1}c_{r_1}}{(k+1)(r_1+k+1)^3}+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\substack{r_1,r_2=1\\ r_1\neq r_2}}^{n}\frac{S_{r_1r_1r_2}}{(k+1)(r_1+k+1)^2(r_2-r_1)}+$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\substack{r_1,r_2=1\\ r_1\neq r_2}}^{n}\frac{S_{r_1r_1r_2}}{(r_2-r_1)^2(k+1)}\left(\frac{1}{r_2+k+1}-\frac{1}{r_1+k+1}\right)+$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\substack{r_1,r_2,r_3=1\\ r_1\neq r_2\neq r_3}}^{n}\frac{a_{r_1}b_{r_2}c_{r_3}}{k+1}\left(\frac{1}{(r_3-r_2)(r_3-r_1)(r_3+k+1)}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(r_3-r_2)(r_1-r_2)(r_2+k+1)}+\frac{1}{(r_1-r_3)(r_1-r_2)(r_1+k+1)}\right). \qquad (21)$$

Преобразуя суммы из (21) на основании леммы 2, получаем:

$$I_4 = a_0b_0c_0\zeta(4)+\zeta(3)\sum_{r_1=1}^{n}\frac{S_{00r_1}-a_{r_1}b_{r_1}c_{r_1}}{r_1}+$$

$$+\zeta(2)\sum_{\substack{r_1,r_2=1\\ r_1\neq r_2}}^{n}\left(\frac{2S_{0r_1r_1}-S_{00r_1}-a_{r_1}b_{r_1}c_{r_1}}{r_1^2}-\frac{S_{0r_1r_2}}{r_2-r_1}\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)+\frac{S_{r_1r_1r_2}}{r_1(r_2-r_1)}\right)+$$

$$+\sum_{r_1=1}^{n}\frac{S_{00r_1}-2S_{0r_1r_1}+a_{r_1}b_{r_1}c_{r_1}}{r_1^3}H_{r_1}+\sum_{r_1=1}^{n}\frac{a_{r_1}b_{r_1}c_{r_1}-S_{0r_1r_1}}{r_1^2}H_{r_1}^{(2)}+$$

$$+\sum_{r_1=1}^{n}\frac{a_{r_1}b_{r_1}c_{r_1}}{r_1}H_{r_1}^{(3)}+\sum_{\substack{r_1,r_2=1\\ r_1\neq r_2}}^{n}\frac{S_{0r_1r_2}}{r_2-r_1}\left(\frac{H_{r_2}}{r_2^2}-\frac{H_{r_1}}{r_1^2}\right)+$$

$$+\sum_{\substack{r_1,r_2=1\\ r_1\neq r_2}}^{n}\frac{S_{r_1r_1r_2}}{(r_2-r_1)r_1^2}H_{r_1}+\sum_{\substack{r_1,r_2=1\\ r_1\neq r_2}}^{n}\frac{S_{r_1r_1r_2}}{(r_2-r_1)r_1}H_{r_1}^{(2)}+$$

$$+\sum_{\substack{r_1,r_2=1\\ r_1\neq r_2}}^{n}\frac{S_{r_1r_1r_2}}{(r_2-r_1)^2}\left(\frac{H_{r_2}}{r_2}-\frac{H_{r_1}}{r_1}\right)+\sum_{\substack{r_1,r_2,r_3=1\\ r_1\neq r_2\neq r_3}}^{n}a_{r_1}b_{r_2}c_{r_3}\times$$

$$\times\left(\frac{H_{r_1}}{r_1(r_1-r_2)(r_1-r_3)}+\frac{H_{r_2}}{r_2(r_2-r_1)(r_2-r_3)}+\frac{H_{r_3}}{r_3(r_3-r_1)(r_3-r_2)}\right). \tag{22}$$

Для любого $s\geqslant 5$ на основании леммы 2 преобразуем слагаемые (13). Выполняя алгебраические вычисления, аналогичные приведенным выше, для $s\geqslant 5$ получаем

$$I_s=a_0b_0c_0\zeta(s)+\left(\sum_{r_1=1}^{n}\frac{S_{00r_1}}{r_1}\right)\zeta(s-1)+$$

$$+\left(\sum_{\substack{r_1,r_2=1\\ r_1\neq r_2}}^{n}\frac{S_{0r_1r_1}-S_{00r_1}}{r_1^2}-\frac{S_{0r_1r_2}}{r_2-r_1}\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)\right)\zeta(s-2)+$$

$$+\sum_{j=3}^{s-4}(-1)^{j-1}\left(\sum_{\substack{r_1,r_2,r_3=1\\ r_1\neq r_2\neq r_3}}^{n}\left(\frac{S_{00r_1}-(j-1)S_{0r_1r_1}+\frac{(j-2)(j-1)}{2}a_{r_1}b_{r_1}c_{r_1}}{r_1^j}+\right.\right.$$

$$+\frac{S_{r_1r_1r_2}}{r_2-r_1}\left(\frac{j-2}{r_1^{j-1}}+\frac{1}{r_2-r_1}\left(\frac{1}{r_2^{j-2}}-\frac{1}{r_1^{j-2}}\right)\right)-\frac{S_{0r_1r_2}}{r_2-r_1}\left(\frac{1}{r_2^{j-1}}-\frac{1}{r_1^{j-1}}\right)+$$

$$+a_{r_1}b_{r_2}c_{r_3}\left(\frac{1}{(r_3-r_2)(r_3-r_1)r_3^{j-2}}+\frac{1}{(r_2-r_3)(r_2-r_1)r_2^{j-2}}+\right.$$

$$\left.\left.\left.+\frac{1}{(r_1-r_3)(r_1-r_2)r_1^{j-2}}\right)\right)\right)\zeta(s-j)+$$

$$+(-1)^{s-3}\left(\sum_{\substack{r_1,r_2,r_3=1\\ r_1\neq r_2\neq r_3}}^{n}\left(\frac{a_{r_1}b_{r_1}c_{r_1}\left(1-\frac{(s-5)(s-4)}{2}\right)-S_{00r_1}+(s-4)S_{0r_1r_1}}{r_1^{s-3}}+\right.\right.$$

$$+\frac{S_{0r_1r_2}}{r_2-r_1}\left(\frac{1}{r_2^{s-4}}-\frac{1}{r_1^{s-4}}\right)-\frac{S_{r_1r_1r_2}}{r_2-r_1}\left(\frac{s-5}{r_1^{s-4}}+\frac{1}{r_2-r_1}\left(\frac{1}{r_2^{s-5}}-\frac{1}{r_1^{s-5}}\right)\right)-$$

$$-a_{r_1}b_{r_2}c_{r_3}\left(\frac{1}{(r_3-r_2)(r_3-r_1)r_3^{s-5}}+\frac{1}{(r_2-r_3)(r_2-r_1)r_2^{s-5}}+\right.$$

$$\left.\left.\left.+\frac{1}{(r_1-r_3)(r_1-r_2)r_1^{s-5}}\right)\right)\right)\zeta(3)+$$

$$+(-1)^{s-2}\left(\sum_{\substack{r_1,r_2,r_3=1\\ r_1\neq r_2\neq r_3}}^{n}\left(\frac{(s-2)S_{0r_1r_1}-S_{00r_1}-\frac{(s-2)(s-3)}{2}a_{r_1}b_{r_1}c_{r_1}}{r_1^{s-2}}+\right.\right.$$

$$+\frac{S_{0r_1r_2}}{r_2-r_1}\left(\frac{1}{r_2^{s-3}}-\frac{1}{r_1^{s-3}}\right)-\frac{S_{r_1r_1r_2}}{r_2-r_1}\left(\frac{s-3}{r_1^{s-3}}+\frac{1}{r_2-r_1}\left(\frac{1}{r_2^{s-4}}-\frac{1}{r_1^{s-4}}\right)\right)+$$
$$+a_{r_1}b_{r_2}c_{r_3}\left(\frac{1}{(r_3-r_2)(r_3-r_1)r_3^{s-4}}+\frac{1}{(r_2-r_3)(r_2-r_1)r_2^{s-4}}+\right.$$
$$\left.\left.\left.+\frac{1}{(r_1-r_3)(r_1-r_2)r_1^{s-4}}\right)\right)\right)\zeta(2)+$$
$$+(-1)^{s-2}\sum_{\substack{r_1,r_2,r_3=1\\ r_1\neq r_2\neq r_3}}^{n}\left(\left(\frac{-(s-2)S_{0r_1r_1}+S_{00r_1}+\frac{(s-2)(s-3)}{2}a_{r_1}b_{r_1}c_{r_1}}{r_1^{s-1}}+\right.\right.$$
$$\left.+\frac{(s-3)S_{r_1r_1r_2}}{(r_2-r_1)r_1^{s-2}}\right)H_{r_1}-\frac{S_{0r_1r_2}}{r_2-r_1}\left(\frac{H_{r_2}}{r_2^{s-2}}-\frac{H_{r_1}}{r_1^{s-2}}\right)+$$
$$+\frac{S_{r_1r_1r_2}}{(r_2-r_1)^2}\left(\frac{H_{r_2}}{r_2^{s-3}}-\frac{H_{r_1}}{r_1^{s-3}}\right)+a_{r_1}b_{r_2}c_{r_3}\left(\frac{H_{r_1}}{(r_1-r_2)(r_1-r_3)r_1^{s-3}}+\right.$$
$$\left.\left.+\frac{H_{r_2}}{(r_2-r_1)(r_2-r_3)r_2^{s-3}}+\frac{H_{r_3}}{(r_3-r_2)(r_3-r_1)r_3^{s-3}}\right)\right)+$$
$$+(-1)^{s-3}\sum_{\substack{r_1,r_2=1\\ r_1\neq r_2}}^{n}\left(\frac{S_{0r_1r_1}-(s-3)a_{r_1}b_{r_1}c_{r_1}}{r_1^{s-2}}-\frac{S_{r_1r_1r_2}}{(r_2-r_1)r_1^{s-3}}\right)H_{r_1}^{(2)}+$$
$$+(-1)^{s-4}\sum_{r_1=1}^{n}a_{r_1}b_{r_1}c_{r_1}\frac{H_{r_1}^{(3)}}{r_1^{s-3}}. \tag{23}$$

Формулы (20), (22), (23) можно представить несколько в более удобном для вычислений виде, группируя множители при одинаковых дзета-константах и заменяя суммы по несовпадающим индексам двойными и тройными суммами. Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $P_n(x)$, $Q_n(x)$ и $T_n(x)$ – три многочлена степени n, $n\geqslant 1$,*

$$P_n(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n, \tag{24}$$
$$Q_n(x)=b_0+b_1x+\ldots+b_nx^n, \tag{25}$$
$$T_n(x)=c_0+c_1x+\ldots+c_nx^n, \tag{26}$$

$a_0,a_1,\ldots,a_n$, $b_0,b_1,\ldots,b_n$, $c_0,c_1,\ldots,c_n$ – произвольные числа. Пусть интеграл I_s, $s\geqslant 3$, определяется как

$$I_s=\int_0^1\ldots\int_0^1\frac{P_n(x_1)Q_n(x_2)T_n(x_3)}{1-x_1x_2x_3\ldots x_s}\,dx_1\,dx_2\,dx_3\ldots dx_s. \tag{27}$$

Тогда при $s\geqslant 5$ справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned}&I_3=A_{s-2,3}\zeta(3)-A_{s-2,2}\zeta(2)-A_{s-2},\\&I_4=A_{s-3,4}\zeta(4)+A_{s-3,3}\zeta(3)-A_{s-3,2}\zeta(2)-A_{s-3},\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&I_s=A_{1,s}\zeta(s)+A_{1,s-1}\zeta(s-1)+\ldots+A_{1,3}\zeta(3)-A_{1,2}\zeta(2)-A_1,\end{aligned} \tag{28}$$

где при $s = 5, 6, 7, \dots$

$$A_{s-2,3} = \sum_{r=1}^{n} a_r b_r c_r, \quad A_{s-2,2} = \sum_{r=1}^{n}\sum_{\ell=0}^{r-1} \frac{S_{rr\ell} - S_{\ell\ell r}}{r-\ell}, \tag{29}$$

$$A_{s-2} = \sum_{r=1}^{n} a_r b_r c_r H_r^{(3)} - \sum_{r=1}^{n}\sum_{\ell=0}^{r-1} (S_{rr\ell} - S_{\ell\ell r})\left(\frac{H_r^{(2)} - H_\ell^{(2)}}{r-\ell} + \frac{H_r - H_\ell}{(r-\ell)^2}\right) +$$
$$+ \sum_{r=2}^{n}\sum_{\ell=1}^{r-1}\sum_{i=0}^{\ell-1} (S_{ir\ell} + S_{i\ell r})\left(\frac{H_i}{(i-r)(i-\ell)} + \frac{H_r}{(r-i)(r-\ell)} + \frac{H_\ell}{(\ell-i)(\ell-r)}\right), \tag{30}$$

$$A_{s-3,4} = a_0 b_0 c_0, \quad A_{s-3,3} = \sum_{r=1}^{n} \frac{S_{00r} - a_r b_r c_r}{r}, \tag{31}$$

$$A_{s-3,2} = \sum_{r=1}^{n} \frac{a_r b_r c_r + S_{00r} - 2S_{0rr}}{r^2} +$$
$$+ \sum_{r=2}^{n}\sum_{\ell=1}^{r-1} \left(\frac{S_{0r\ell} + S_{0\ell r}}{r-\ell}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\ell}\right) - \frac{1}{r-\ell}\left(\frac{S_{rr\ell}}{r} - \frac{S_{\ell\ell r}}{\ell}\right)\right), \tag{32}$$

$$A_{s-3} = \sum_{r=1}^{n} \left(\frac{2S_{0rr} - a_r b_r c_r - S_{00r}}{r^3} H_r + \frac{S_{0rr} - a_r b_r c_r}{r^2} H_r^{(2)} - \frac{a_r b_r c_r}{r} H_r^{(3)}\right) -$$
$$- \sum_{r=2}^{n}\sum_{\ell=1}^{r-1} \left(\frac{S_{rr\ell} - S_{\ell\ell r}}{(r-\ell)^2}\left(\frac{H_r}{r} - \frac{H_\ell}{\ell}\right) + \frac{1}{r-\ell}\left(S_{rr\ell}\frac{H_r}{r^2} - S_{\ell\ell r}\frac{H_\ell}{\ell^2}\right) +\right.$$
$$\left. + \frac{1}{r-\ell}\left(S_{rr\ell}\frac{H_r^{(2)}}{r} - S_{\ell\ell r}\frac{H_\ell^{(2)}}{\ell}\right)\right) - \sum_{r=2}^{n}\sum_{\ell=1}^{r-1}\sum_{i=0}^{\ell-1} (S_{ir\ell} + S_{i\ell r})\left(\frac{H_i}{i(i-r)(i-\ell)} +\right.$$
$$\left. + \frac{H_r}{r(r-i)(r-\ell)} + \frac{H_\ell}{\ell(\ell-i)(\ell-r)}\right), \tag{33}$$

$$A_{1,s} = a_0 b_0 c_0, \quad A_{1,s-1} = \sum_{r=1}^{n} \frac{S_{00r}}{r}, \tag{34}$$

$$A_{1,s-2} = \sum_{r=1}^{n} \frac{S_{0rr} - S_{00r}}{r^2} - \sum_{r=2}^{n}\sum_{\ell=1}^{r-1} \frac{S_{0\ell r} + S_{0r\ell}}{r-\ell}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\ell}\right), \tag{35}$$

а при $j = 3, 4, \dots, s-2$

$$A_{1,s-j} = (-1)^{j-1}\left(\sum_{r=1}^{n} \frac{S_{00r} - (j-1)S_{0rr} + \frac{(j-2)(j-1)}{2} a_r b_r c_r}{r^j} -\right.$$
$$- \sum_{r=2}^{n}\sum_{\ell=1}^{r-1} \left(\frac{S_{\ell\ell r} - S_{rr\ell}}{(r-\ell)^2}\left(\frac{1}{r^{j-2}} - \frac{1}{\ell^{j-2}}\right) + \frac{j-2}{r-\ell}\left(\frac{S_{\ell\ell r}}{\ell^{j-1}} - \frac{S_{rr\ell}}{r^{j-1}}\right)\right) -$$
$$- \sum_{r=2}^{n}\sum_{\ell=1}^{r-1}\sum_{i=0}^{\ell-1} (S_{ir\ell} + S_{i\ell r})\left(\frac{H_i}{i^{j-2}(i-r)(i-\ell)} +\right.$$
$$\left.\left. + \frac{H_r}{r^{j-2}(r-i)(r-\ell)} + \frac{H_\ell}{\ell^{j-2}(\ell-i)(\ell-r)}\right)\right), \tag{36}$$

$$
\begin{aligned}
A_1 = (-1)^{s-1} \Biggl(\sum_{r=1}^{n} \Biggl(& \frac{-S_{00r} + (s-2)S_{0rr} - \dfrac{(s-2)(s-3)}{2} a_r b_r c_r}{r^{s-1}} H_r + \\
& + \frac{(s-3)a_r b_r c_r - S_{0rr}}{r^{s-2}} H_r^{(2)} + \frac{a_r b_r c_r}{r^{s-3}} H_r^{(3)} \Biggr) - \\
& - \Biggl(\sum_{r=2}^{n} \sum_{\ell=1}^{r-1} \frac{1}{r-\ell} \Biggl(\frac{H_\ell^{(2)} S_{\ell\ell r}}{\ell^{s-3}} - \frac{H_r^{(2)} S_{rr\ell}}{r^{s-3}} \Biggr) + \\
& + \frac{s-3}{r-\ell} \left(\frac{H_\ell S_{\ell\ell r}}{\ell^{s-2}} - \frac{H_r S_{rr\ell}}{r^{s-2}} \right) + \frac{S_{\ell\ell r} - S_{rr\ell}}{(r-\ell)^2} \left(\frac{H_r}{r^{s-3}} - \frac{H_\ell}{\ell^{s-3}} \right) \Biggr) - \\
& - \sum_{r=2}^{n} \sum_{\ell=1}^{r-1} \sum_{i=0}^{\ell-1} (S_{ir\ell} + S_{i\ell r}) \Biggl(\frac{H_i}{i^{s-3}(i-r)(i-\ell)} + \\
& + \frac{H_r}{r^{s-3}(r-i)(r-\ell)} + \frac{H_\ell}{\ell^{s-3}(\ell-i)(\ell-r)} \Biggr) \Biggr),
\end{aligned} \tag{37}
$$

где для $0 \leqslant \mu \leqslant n$, $0 \leqslant \nu \leqslant n$, $0 \leqslant \lambda \leqslant n$

$$
S_{\mu\nu\lambda} = a_\mu b_\nu c_\lambda + b_\mu c_\nu a_\lambda + c_\mu a_\nu b_\lambda, \tag{38}
$$

а $H_n^{(m)}$ *– гармонические числа, определяемые соотношениями* (2).

§ 4. Новая формула для вычисления дзета-констант

Отметим, что формулы теоремы 1 имеют самый общий вид, ведь коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_n$, $b_0, b_1, \ldots, b_n$, $c_0, c_1, \ldots, c_n$ – произвольные числа.

Чтобы эффективно вычислить какую-либо дзета-константу $\zeta(s)$, $s \geqslant 3$, на основе формул (28)–(38), нужно подобрать такие многочлены (24)–(26), чтобы интеграл (27) был мал, например порядка 2^{-Cn}, $C = \text{const} \geqslant 1$, и в то же время вычисление коэффициентов при дзета-константах и свободных членов в (29)–(37) не было бы слишком затратным.

Допустим, что выбранные нами многочлены (24)–(26) таковы, что I_s мало,

$$
I_s = I_s(n) = \theta_s(n) = \theta_s. \tag{39}
$$

Тогда получаем систему

$$
\begin{aligned}
& A_{1,s}\zeta(s) + A_{1,s-1}\zeta(s-1) + \ldots + A_{1,3}\zeta(3) = A_{1,2}\zeta(2) + A_1 + \theta_s, \\
& A_{2,s-1}\zeta(s-1) + \ldots + A_{2,3}\zeta(3) = A_{2,2}\zeta(2) + A_2 + \theta_{s-1}, \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& A_{s-2,3}\zeta(3) = A_{s-2,2}\zeta(2) + A_{s-2} + \theta_3,
\end{aligned}
$$

где коэффициенты при дзета-константах определяются формулами (29)–(38) для $s-2$ значений I_r, $r = 3, 4, \ldots, s$. Значение $\zeta(s)$ выражается отношением определителей:

$$
\Delta = A_{1,s} A_{2,s-1} \ldots A_{s-2,3}, \quad \zeta(s) = \frac{\Delta_s}{\Delta},
$$

при этом

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} A_{1,2}\zeta(2) + A_1 + \theta_s & A_{1,s-1} & \dots & A_{1,3} \\ A_{2,2}\zeta(2) + A_2 + \theta_{s-1} & A_{2,s-1} & \dots & A_{2,3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{s-2,2}\zeta(2) + A_{s-2} + \theta_3 & 0 & \dots & A_{s-2,3} \end{vmatrix} = \Delta_s^{(1)} + \Delta_s^{(2)} + \Delta_s^{(3)},$$

где

$$\Delta_s^{(1)} = \begin{vmatrix} A_{1,2}\zeta(2) & A_{1,s-1} & \dots & A_{1,3} \\ A_{2,2}\zeta(2) & A_{2,s-1} & \dots & A_{2,3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{s-2,2}\zeta(2) & 0 & \dots & A_{s-2,3} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_s^{(2)} = \begin{vmatrix} A_1 & A_{1,s-1} & \dots & A_{1,3} \\ A_2 & A_{2,s-1} & \dots & A_{2,3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{s-2} & 0 & \dots & A_{s-2,3} \end{vmatrix}, \quad \Delta_s^{(3)} = \begin{vmatrix} \theta_s & A_{1,s-1} & \dots & A_{1,3} \\ \theta_{s-1} & A_{2,s-1} & \dots & A_{2,3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \theta_3 & 0 & \dots & A_{s-2,3} \end{vmatrix}.$$

Таким образом,

$$\zeta(s) = \frac{\Delta_s}{\Delta} = \frac{1}{\Delta} \sum_{\nu=1}^{s-2} \left(A_{\nu,2}\zeta(2) + A_\nu + \theta_{s+1-\nu}\right) \Delta_{\nu s},$$

где $\Delta_{\nu s}$ – соответствующие алгебраические дополнения, т.е.

$$\zeta(s) = \frac{\zeta(2)}{\Delta} \sum_{\nu=1}^{s-2} A_{\nu,2}\Delta_{\nu s} + \frac{1}{\Delta} \sum_{\nu=1}^{s-2} A_\nu \Delta_{\nu s} + \frac{1}{\Delta} \sum_{\nu=1}^{s-2} \theta_{s+1-\nu}\Delta_{\nu s}. \tag{40}$$

§ 5. Аппроксимация

Получим из (39), (40) оценку значений θ_s, $s \geqslant 3$, для специально подобранных многочленов. Как и в [7], в качестве основных, обеспечивающих точность приближения, выберем многочлены (1): в качестве $P_n(x)$ – смещенный многочлен Лежандра, в качестве $Q_n(x)$ – биномиальный многочлен. Третий многочлен $T_n(x)$ будет записан в каноническом виде, поскольку может использоваться для понижения сложности вычислений. Имеет место

Лемма 3. *Пусть*

$$P_n(x) = \frac{1}{n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^n(1-x)^n) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n, \tag{41}$$

$$a_r = \frac{(-1)^r (n+r)!}{(r!)^2 (n-r)!}, \tag{42}$$

$$Q_n(x) = (1-x)^n = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n, \tag{43}$$

$$b_r = (-1)^r \frac{n!}{r!\,(n-r)!}. \tag{44}$$

Пусть

$$T_n(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n, \quad c^* = \max_{0 \leqslant j \leqslant n} |c_j|. \tag{45}$$

Тогда при любом $s \geqslant 3$ для интеграла

$$I_s = I_s(n) = \int\limits_0^1 \dots \int\limits_0^1 \frac{P_n(x_1)Q_n(x_2)T_n(x_3)}{1 - x_1x_2x_3\dots x_s}\, dx_1\, dx_2\, dx_3 \dots dx_s, \quad s \geqslant 3,$$

справедлива оценка

$$|I_s| \leqslant \frac{c^*}{2^{2n}}. \tag{46}$$

Доказательство. Из (43), (44) имеем для $k \geqslant 1$

$$\int\limits_0^1 x^k Q_n(x)\, dx = \int\limits_0^1 x^k (1-x)^n\, dx = B(k+1, n+1) = \frac{k!\, n!}{(k+n+1)!},$$

где $B(x,y)$ – бета функция Эйлера (см., например, [18, 19]), $B(x,y) = \dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$, где $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ – гамма-функция Эйлера. В то же время из (41), (42) интегрированием по частям находим

$$\int\limits_0^1 x^k P_n(x)\, dx = \frac{1}{n!}\int\limits_0^1 x^k \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\,(x^n(1-x)^n)\right) dx =$$
$$= (-1)^n \frac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{n!} B(k+1, n+1) = (-1)^n \frac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{(k+1)\dots(k+n)(k+n+1)}$$

при $k \geqslant n$. Если $k < n$, то

$$\int\limits_0^1 x^k P_n(x)\, dx = 0,$$

так как при интегрировании по частям все время участвует член вида

$$x^\nu x^n (1-x)^n\big|_0^1 = 0.$$

Таким образом, при выбранных $P_n(x)$ и $Q_n(x)$ имеем

$$\int\limits_0^1 x^k Q_n(x)\, dx = B(k+1, n+1),$$

$$\int\limits_0^1 x^k P_n(x)\, dx = \begin{cases} 0, & \text{если } k \leqslant n-1, \\ (-1)^n \dfrac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{n!} B(k+1, n+1), & \text{если } k \geqslant n. \end{cases}$$

В то же время из (45)

$$\int\limits_0^1 x^k T_n(x)\, dx = \sum_{i=0}^{n} \frac{c_i}{k+1+i} = T(k, n). \tag{47}$$

Следовательно,

$$I_s = I_s(n) = \int_0^1 \dots \int_0^1 \frac{P_n(x_1)Q_n(x_2)T_n(x_3)}{1 - x_1x_2x_3\dots x_s}\,dx_1\,dx_2\,dx_3\dots dx_s =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 \dots \int_0^1 (x_1x_2\dots x_s)^k P_n(x_1)Q_n(x_2)T_n(x_3)\,dx_1\,dx_2\,dx_3\dots dx_s =$$

$$= (-1)^n \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{n!}\,\frac{B^2(k+1,n+1)T(k,n)}{(k+1)^{s-3}}. \tag{48}$$

Из (47), (48) находим:

$$|I_s| \leqslant c^* \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(n+j)!}{j!n!}\,\frac{B^2(n+1+j,n+1)}{(n+1+j)^{s-3}}$$

$$\leqslant c^* \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B(n+1+j,n+1)}{(2n+j+1)(n+1+j)^{s-3}}\,\frac{\Gamma^2(n+j+1)}{\Gamma(2n+j+1)\Gamma(j+1)}. \tag{49}$$

Поскольку (см., например, [18])

$$\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\gamma)\Gamma(\beta-\gamma)} = \prod_{\nu=0}^{\infty}\left(1+\frac{\gamma}{\alpha+\nu}\right)\left(1-\frac{\gamma}{\beta+\nu}\right),$$

то

$$\frac{\Gamma^2(n+j+1)}{\Gamma(2n+j+1)\Gamma(j+1)} = \prod_{\nu=0}^{\infty}\left(1-\left(\frac{n}{n+1+j+\nu}\right)^2\right) < 1$$

для любого $n \geqslant 1$. Следовательно, в силу (49) для любого $s \geqslant 3$ выполняется оценка

$$|I_s| \leqslant c^* \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B(n+1+j,n+1)}{(2n+j+1)(n+1+j)^{s-3}} \leqslant \frac{c^*}{2}\sum_{j=0}^{\infty} B(n+1+j,n+1).$$

Принимая во внимание (см. [19]), что $\sum\limits_{j=0}^{\infty} B(x,y+j) = B(x-1,y)$, и учитывая соответствующие оценки для бета-функций (см., например, [18], а также [7]), отсюда находим

$$|I_s| \leqslant \frac{c^*}{2}B(n,n+1) \leqslant \frac{c^*}{4}B(n,n) \leqslant \frac{c^*}{4}2^{1-2n}B\Big(\frac{1}{2},n\Big) \leqslant c^*2^{-2n},$$

т.е. оценка (46) справедлива. ▲

§ 6. Заключение

На основе новых формул для дзета-констант построен метод их аппроксимации и вычисления, с контролем скорости аппроксимации посредством выбора коэффициентов трех многочленов.

Возникает естественный вопрос: возможно ли, по крайней мере гипотетически, на основе этих новых формул построить быстрый алгоритм? Если бы три многочлена $P_n(x)$, $Q_n(x)$ и $T_n(x)$ могли бы быть выбраны так, чтобы последняя сумма в (40) была мала, а остальные две суммы могли бы быть вычислены с низкой оценкой сложности, то найденные формулы могли бы стать основой для такого алгоритма. Отметим, что существует множество быстрых алгоритмов вычисления константы $\zeta(2) = \pi^2/6$ (см., например, [5]).

С другой стороны, могут появиться новые возможности, если обобщить представленный метод, построив метод вычисления дзета-констант с участием $s = 2k+1$ многочленов, $k = 2, 3\ldots$, учитывая, что коэффициенты, подобные коэффициентам из (29)–(38), относительно легко оценить.

В [20] было доказано следующее утверждение.

Лемма 4. *Для любых целых s и m, $s \geqslant 1$, $m \geqslant 1$, и любых $r \geqslant 1$, $k \geqslant 0$ справедливо тождество*

$$\frac{1}{(r+k+1)^m(k+1)^s} = $$
$$= \sum_{j=1}^{s}(-1)^{j-1}\frac{\binom{m+j-2}{m-1}}{r^{j+m-1}(k+1)^{s+1-j}} + (-1)^s\sum_{j=1}^{m}\frac{\binom{s+m-j-1}{m-j}}{r^{s+m-j}(r+k+1)^j}. \tag{50}$$

Пользуясь (50), можно построить обобщенный метод с участием s многочленов. Однако из-за того, что многочлены записываются в канонической форме с произвольными коэффициентами, выведенные формулы будут настолько громоздкими, что описание такого метода представляется затруднительным. По-видимому, дальнейшая работа по созданию нового метода вычисления дзета-констант на основе этого подхода должна заключаться в определении ограничений на коэффициенты, которые сделают метод более эффективным, а в долгосрочной перспективе – быстрым.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Карацуба Е.А.* Быстрое вычисление дзета-функции Римана $\zeta(s)$ при целых значениях аргумента s // Пробл. передачи информ. 1995. Т. 31. № 4. С. 69–80. http://mi.mathnet.ru/ppi294
2. *Borwein J.M., Bradley D.M., Crandall R.E.* Computational Strategies for the Riemann Zeta Function // J. Comput. Appl. Math. 2000. V. 121. № 1–2. 247–296. https://doi.org/10.1016/S0377-0427(00)00336-8
3. *Скороходов С.Л.* Аппроксимации Паде и численный анализ дзета-функции Римана // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2003. V. 43. № 9. С. 1330–1352. http://mi.mathnet.ru/zvmmf961
4. *Зудилин В.В.* О биномиальных суммах, связанных с рациональными приближениями к $\zeta(4)$ // Матем. заметки. 2004. Т. 75. № 4. С. 637–640. https://doi.org/10.4213/mzm555
5. *Карацуба Е.А.* Об одном методе быстрого приближения дзета-констант рациональными дробями // Пробл. передачи информ. 2014. Т. 50. № 2. С. 77–95. http://mi.mathnet.ru/ppi2140
6. *Матиясевич Ю.В.* Дзета-функция Римана и конечные ряды Дирихле // Алгебра и анализ. 2015. V. 27. № 6. С. 174–198. http://mi.mathnet.ru/aa1472
7. *Карацуба Е.А.* Об одном методе построения семейства аппроксимаций дзета-констант рациональными дробями // Пробл. передачи информ. 2015. V. 51. № 4. С. 78–91. http://mi.mathnet.ru/ppi2189
8. *Hermite C.* Sur la fonction exponentielle // C. R. Acad. Sci. Paris. 1873. V. 77. P. 18–24.
9. *Beukers F.* A Note on the Irrationality of $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$ // Bull. London Math. Soc. 1979. V. 11. № 3. P. 268–272. https://doi.org/10.1112/blms/11.3.268
10. *Beukers F.* Legendre Polynomials in Irrationality Proofs // Bull. Austral. Math. Soc. 1980. V. 22. № 3. P. 431–438. https://doi.org/10.1017/S0004972700006742

11. *Dvornicich R., Viola C.* Some Remarks on Beukers' Integrals // Number Theory, Vol. II (Budapest, 1987). Colloq. Math. Soc. János Bolyai. V. 51. Amsterdam: North-Holland, 1990. P. 637–657.
12. *Hata M.* A Note on Beukers' Integral // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. 1995. V. 58. № 2. P. 143–153. https://doi.org/10.1017/S1446788700038192
13. *Hessami Pilehrood K., Hessami Pilehrood T., Tauraso R.* Congruences Concerning Jacobi Polynomials and Apéry-like Formulae // Int. J. Number Theory. 2012. V. 8. № 7. P. 1789–1811. https://doi.org/10.1142/S1793042112501035
14. *Зудилин В.В.* Об иррациональности значений дзета-функции Римана // Изв. РАН. Сер. матем. 2002. Т. 66. № 3. С. 49–102. https://doi.org/10.4213/im387
15. *Chu W., De Donno L.* Hypergeometric Series and Harmonic Number Identities // Adv. in Appl. Math. 2005. V. 34. № 1. P. 123–137. https://doi.org/10.1016/j.aam.2004.05.003
16. *Spieß J.* Some Identities Involving Harmonic Numbers // Math. Comp. 1990. V. 55. № 192. P. 839–863. https://doi.org/10.2307/2008451
17. *Wang W., Jia C.* Harmonic Number Identities via the Newton–Andrews Method // Ramanujan J. 2014. V. 35. № 2. P. 263–285. https://doi.org/10.1007/s11139-013-9511-1
18. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 1. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М.: Наука, 1965.
19. *Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н.* Курс современного анализа. Ч. 2. Трансцендентные функции. М.: Физматлит, 1963.
20. *Карацуба Е.А.* Об одном тождестве с биномиальными коэффициентами // Матем. заметки. 2019. V. 105. № 1. С. 149–152. https://doi.org/10.4213/mzm11883

Карацуба Екатерина Анатольевна
Вычислительный центр им. А.А. Дородницына
Федерального исследовательского центра
"Информатика и управление" РАН, Москва
ekar@ccas.ru, ekaratsuba@gmail.com

Поступила в редакцию
06.11.2020
После доработки
03.03.2021
Принята к публикации
13.05.2021