ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

Том 57 2021 Вып. 3

УДК 621.391 : 517.938 : 519.722

 Г.Д. Дворкин

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ЭНТРОПИИ: НОВЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассматривается связь метрической энтропии с локальной скоростью деформации границ (ЛСДГ) в символическом случае. Доказывается равенство ЛСДГ как предела в среднем и энтропии для систем, содержащих существенно синхронизованный подсдвиг полной меры. Получен пример данной связи и при отсутствии такого подсдвига. Впервые показано, что если понимать ЛСДГ как предел почти всюду, то равенства между этой величиной и энтропией может не быть.

Ключевые слова: метрическая энтропия, локальная скорость деформации границ, символическая система, синхронизованная система, инвариантная эргодическая мера, правильная скобочная последовательность, система Дика.

DOI: 10.31857/S0555292321030062

§ 1. Введение

Будем рассматривать энтропию Колмогорова – Синая как предел некоторой величины (скорости деформации границ), имеющей простую геометрическую интерпретацию.

Такой подход был предложен физиком Г.М. Заславским [1], который в 1984 г. выдвинул гипотезу (точнее, сформулировал утверждение), что объем границы множества в фазовом пространстве растет экспоненциально по времени с показателем, равным метрической энтропии. Первый математический результат в этом направлении был получен Б.М. Гуревичем [2] для символических марковских систем и совместно с С.А. Комечем [3, 4] обобщен на существенно более широкий класс символических систем, а также на некоторые гладкие (системы Аносова). В этой статье содержится ряд новых результатов в данной области.

§ 2. Определения, обозначения и обзор основных результатов

Пусть A – конечное множество, и пусть $A^{\mathbb{Z}}$ – пространство бесконечных двусторонних последовательностей символов из A.

Множество A будем называть алфавитом, а любую конечную последовательность символов (букв) из A – (конечным) словом этого алфавита. Количество букв в слове w называют его длиной и обозначают $|w|$. Слово нулевой длины называют пустым.

Элементы пространства $A^{\mathbb{Z}}$ будем называть бесконечными словами, при этом в данной терминологии бесконечные слова словами не являются.

Определение 1. Назовем *полным сдвигом* пару $(A^{\mathbb{Z}}, T)$, где A – конечное множество, а T – сдвиг на шаг вправо в пространстве последовательностей $A^{\mathbb{Z}}$.

Для $x \in A^{\mathbb{Z}}$ и целых a и b, таких что $a \leqslant b$, обозначим слово $(x(a), x(a+1), \dots, x(b))$ через $x_{[a;b]}$. Если слово w равно $x_{[a;b]}$ для некоторых a и b, то будем говорить, что w является *подсловом* бесконечного слова x (аналогично определяется подслово конечного слова). Вместо $x_{[a;a]}$ будем писать $x_{[a]}$.

Введем метрику d на $A^{\mathbb{Z}}$: примем $d(x,x) = 0$, а для несовпадающих точек x и y положим $d(x,y) = (1/2)^m$, где $m = m(x,y)$ – целое неотрицательное число, равное нулю, если $x_{[0]} \neq y_{[0]}$, и удовлетворяющее условиям $x_{[-(m-1);m-1]} = y_{[-(m-1);m-1]}$, $x_{[-m;m]} \neq y_{[-m;m]}$ в противном случае. Эта метрика порождает топологию, которая далее считается фиксированной.

Определение 2. Будем называть *символической системой* пару (X, T), где X – замкнутое T-инвариантное подмножество $A^{\mathbb{Z}}$ с индуцированной топологией, а также первый элемент этой пары, считая сдвиг и топологию заданными по умолчанию.

Пусть далее в этом параграфе X – символическая система.

Множество всех подслов всех $x \in X$ называется *языком* символической системы X и обозначается $W(X)$. *Префикс* слова – любое его подслово, начинающееся с начала этого слова. *Суффикс* слова – любое его подслово, заканчивающееся в конце этого слова. Через $\dots aaaaaaaaaa \dots$ обозначается бесконечное слово, состоящее из букв "a", через a^{ℓ} – конкатенация ℓ букв или слов a.

Определение 3. Множество

$$\{w\}_c^X := \bigl\{x \in X :\ x_{[c;c+|w|-1]} = w\bigr\}$$

называется *цилиндром* в X с *основанием* $w \in W(X)$. Всюду далее

$$\{w\}_c := \{w\}_c^X, \quad \bigl\{x_{[a;b]}\bigr\} := \bigl\{x_{[a;b]}\bigr\}_a.$$

Рассмотрим T-инвариантную борелевскую вероятностную меру μ на X. Под мерой $\mu(w)$ слова $w \in W(X)$ понимаем меру цилиндра $\{w\}_0$ (из T-инвариантности меры очевидно, что $\mu(\{w\}_a) = \mu(\{w\}_0)$ для любого целого a).

Введем следующие обозначения:

$k(\varepsilon) := \max\{\ell \in \mathbb{Z} :\ (1/2)^{(\ell+1)} \leqslant \varepsilon\}$ (часто будем писать просто k);

$O_\varepsilon(x)$ – открытая ε-окрестность точки x в рассматриваемом пространстве;

$O_\varepsilon(C)$ – открытая ε-окрестность множества C в рассматриваемом пространстве.

Определение 4. *Метрическая энтропия* (энтропия Колмогорова – Синая) символической динамической системы (X, T) с инвариантной мерой μ может быть определена как средняя условная энтропия настоящего при условии прошлого (общее определение для произвольной динамической системы см. в [5, 6]):

$$h_\mu(X,T) = \lim_{n\to\infty} H_\mu(x_0 \,|\, x_{-1}, x_{-2}, \dots, x_{-n}).$$

Определение 5. Для $x \in X$ определим *локальную скорость деформации границ* (ЛСДГ):

$$P_{X,T,\mu}(x) := \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{n(\varepsilon)} \log\left(\frac{\mu\bigl(O_\varepsilon\bigl(T^{n(\varepsilon)}(O_\varepsilon(x))\bigr)\bigr)}{\mu(O_\varepsilon(x))}\right),$$

где $n(\varepsilon)$ – положительная целочисленная функция со свойствами

$$n(\varepsilon) \to \infty \quad \text{и} \quad n(\varepsilon) = o(|\log(\varepsilon)|) = o(k(\varepsilon)) \quad \text{при } \varepsilon \to 0$$

(часто будем писать просто n). Такие функции n будем называть *медленными*. Допредельное выражение будем обозначать через $P^{\varepsilon}_{X,T,\mu}(x)$ и называть *ε-ЛСДГ*.

О п р е д е л е н и е 6. Система X *транзитивна*, если в ней есть точка со всюду плотной орбитой.

О п р е д е л е н и е 7. Символическая система X *синхронизована*, если она транзитивна и существует $w \in W(X)$, такое что для любых $u, v \in W(X)$, если $uw, wv \in W(X)$, то и $uwv \in W(X)$. Такое слово w называется *волшебным.*

О п р е д е л е н и е 8. *Полная правильная скобочная последовательность* (расстановка) – конечная последовательность скобок, приводящаяся к пустому слову путем сокращения стоящих подряд открывающей и закрывающей скобок одного вида. Например, в случае двух типов скобок сокращать можно только "( )" и "[ ]". Здесь и далее тип скобки – открывающая или закрывающая, вид – круглая, квадратная и т.д.

О п р е д е л е н и е 9. *Правильная скобочная последовательность* (расстановка) – конечная последовательность скобок, являющаяся подсловом некоторой полной правильной скобочной расстановки.

О п р е д е л е н и е 10. *m-язык Дика* – язык, состоящий из правильных скобочных последовательностей скобок m видов. Будем рассматривать только 2-язык и называть его просто языком Дика (но аналогичные рассуждения можно провести для любого m); его алфавит – "(,), [,]".

О п р е д е л е н и е 11. *Сдвиг Дика* – символическая система, языком которой является язык Дика.

Эта система транзитивна, но несинхронизована (см. [7]).

Пусть w – слово языка Дика. Скобка, сокращающаяся вместе с данной при описанном выше процессе сокращения, называется *парной* к ней в этом слове. Скобка, для которой нет парной в w, называется *непарной* в w. Положим

- $n_1 = n_1(w)$ – количество открывающих скобок в слове w, для которых в этом слове есть парная закрывающая;
- $n_2 = n_2(w)$ – количество непарных скобок в w.

Очевидно, $|w| = 2n_1 + n_2$.

Пусть $M(X)$ – некоторый подкласс класса борелевских вероятностных инвариантных эргодических мер на (X, T) (весь этот класс будем обозначать $M_0(X)$). Во всех случаях, когда из контекста будет ясно, что такое X, будем писать просто M и M_0.

Рассмотрим следующие утверждения.

Т о ч е ч н а я г и п о т е з а (ТГ). *$P_{X,T,\mu}(x) = h(\mu, X, T)$ для всех $\mu \in M(X)$, любой медленной функции $n(\varepsilon)$, любого $x \in X$.*

О б о б щ е н н а я т о ч е ч н а я г и п о т е з а (ОТГ). *$P_{X,T,\mu}(x) = h(\mu, X, T)$ для всех $\mu \in M(X)$, любой медленной функции $n(\varepsilon)$, μ-почти любого $x \in X$.*

О с н о в н а я г и п о т е з а (ОГ). *$P_{X,T,\mu}(x) = h(\mu, X, T)$ для всех $\mu \in M(X)$, любой медленной функции $n(\varepsilon)$, где выражение в левой части понимается как предел в $L_1(X, \mu)$.*

ТГ очевидным образом влечет ОТГ и ОГ, при этом ОТГ и ОГ, вообще говоря, друг из друга не вытекают и не влекут ТГ.

Точечная и обобщенная точечная гипотезы верны для многих важных систем (ТГ, например, выполняется для автоморфизмов тора с мерой Лебега, а утверждения, близкие к ОТГ, верны для существенно более общих диффеоморфизмов Аносова с мерой Синая – Рюэлля – Боуэна; подробнее см. в [4]), но не доказаны и, как будет замечено ниже, не верны даже для класса бернуллиевских мер на полном сдвиге (контрпримером может служить любая несимметричная бернуллиевская мера при достаточно медленном росте функции $n(\varepsilon)$). Мы покажем неверность этих гипотез для класса M_0 на сдвиге Дика методом, который применим и в бернуллиевском случае.

Основная гипотеза, в отличие от двух других, подтверждается для многих символических систем. Центральный результат в этом направлении получен Комечем в [3]. Будем называть этот результат основной теоремой (ОТ).

Основная теорема (Комеч). *Пусть $M(X)$ – класс всех мер из $M_0(X)$ на синхронизованной символической системе X, для которых мера хотя бы одного волшебного в X слова положительна. Тогда для $M(X)$ верна основная гипотеза.*

В настоящей статье получены следующие результаты:

1) Основная теорема обобщена на системы с синхронизованным подсдвигом полной меры (теорема 1). В частности, показана верность основной гипотезы для мер с синхронизованным носителем (следствие 2).
2) Построен пример меры, не отвечающей условиям теоремы 1, для которой основная гипотеза все равно верна (теорема 3).
3) Для меры из пункта 2) опровергнуты точечная и обобщенная точечная гипотезы (утверждение 1 и теорема 2).
4) Замечена общая несостоятельность ТГ и ОТГ в символическом случае (замечание 4).

Ввиду того, что ОГ не влечет ТГ и ОТГ, результаты 1)–4) не противоречат друг другу.

§ 3. Обобщение основной теоремы

Сначала приведем мотивационный пример.

Пример 1. Пусть $X \subset \{a, b, c\}^{\mathbb{Z}}$ определяется тем, что в словах $W(X)$ между двумя "a" запрещено разное количество "b" и "c", а мера сосредоточена на $L = \{b, c\}^{\mathbb{Z}}$.

Множество волшебных слов этой системы – это слова, содержащие "a". Значит, ОТ к этому примеру не применима. Тем не менее мера сосредоточена на простом синхронизованном множестве – полном сдвиге, и естественно предположить, что ОГ верна и для этого случая.

Теорема 1 (обобщенная основная теорема (ООТ)). *Пусть символическая динамическая система (X, T) и борелевская T-инвариантная эргодическая вероятностная мера μ на X удовлетворяют следующему условию: в X имеется синхронизованный подсдвиг L (T-инвариантное замкнутое подмножество) полной меры, обладающий хотя бы одним волшебным словом положительной меры. Тогда для X и μ верна основная гипотеза.*

Доказательство. Пусть μ и L – мера и подсдвиг из условия, μ_L – ограничение μ на L. Тогда, применяя основную теорему к (L, μ_L), получаем сходимость в среднем:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} P^{\varepsilon}_{L,T,\mu_L}(x) = h(\mu_L, L, T). \tag{1}$$

Энтропия – метрический инвариант, поэтому

$$h(\mu_L, L, T) = h(\mu, X, T). \tag{2}$$

Основная сложность ситуации состоит в том, что метрическая инвариантность скорости деформации границ в общем случае не доказана. Тем не менее для рассматриваемого частного случая L проблема решается методом, близким к доказательству основной теоремы.

Заметим, что для любого $x \in L$ множество

$$O_1 := O_\varepsilon\big(T^{n(\varepsilon)}(O_\varepsilon(x))\big),$$

где окрестности понимаются как окрестности в L, входит в

$$O_2 := O_\varepsilon\big(T^{n(\varepsilon)}(O_\varepsilon(x))\big),$$

где окрестности понимаются как окрестности в X, и значит, $\mu_L(O_1) \leqslant \mu(O_2)$, откуда заключаем, что

$$P^\varepsilon_{L,T,\mu_L}(x) \leqslant P^\varepsilon_{X,T,\mu}(x). \tag{3}$$

Кроме того, $O_2 \subseteq \{T^{n(\varepsilon)}x_{[-k+n;k]}\}$, а значит,

$$\mu_L(O_1) \leqslant \mu(O_2) \leqslant \mu\big(\big\{T^{n(\varepsilon)}x_{[-k+n;k]}\big\}\big). \tag{4}$$

Далее нам понадобится лемма из [3] и ее простое следствие (тоже получено в [3], но также сразу следует из леммы и непрерывности меры).

Лемма 1 (Комеч). *Если X – синхронизованная система, а μ – мера из условия OT, то для почти любого $x \in X$ найдется такое $\delta(x)$, что для всех $\varepsilon < \delta(x)$ выполнено*

$$O_\varepsilon\big(T^{n(\varepsilon)}(O_\varepsilon(x))\big) = \big\{T^{n(\varepsilon)}x_{[-k+n;k]}\big\}.$$

Следствие 1. *В условиях леммы*

$$\mu\Big(x \in X:\ O_\varepsilon\big(T^{n(\varepsilon)}(O_\varepsilon(x))\big) = \big\{T^{n(\varepsilon)}x_{[-k+n;k]}\big\}\Big) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 1.$$

Теперь сделаем главный шаг: для подсдвигов L, удовлетворяющих условиям теоремы, выполнена лемма 1, а значит,

$$\mu\Big(x \in L:\ \mu_L(O_1) = \mu\big(\big\{T^{n(\varepsilon)}x_{[-k+n;k]}\big\}\big)\Big) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 1. \tag{5}$$

Обозначим множество под знаком меры в (5) через E_ε. Очевидно, что E_ε является подмножеством L. Из (4) и определения E_ε в (5) заключаем, что для $x \in E_\varepsilon$

$$\mu_L(O_1) = \mu(O_2) = \mu\big(\big\{T^{n(\varepsilon)}x_{[-k+n;k]}\big\}\big). \tag{6}$$

А значит, и

$$P^\varepsilon_{L,T,\mu_L}(x) = P^\varepsilon_{X,T,\mu}(x). \tag{7}$$

Завершим доказательство:

$$\begin{aligned}
&\big\|P^\varepsilon_{X,T,\mu}(x) - h(\mu, X, T)\big\|_{L_1(X,\mu)} = \\
&= \int\limits_{E_\varepsilon} \big|P^\varepsilon_{X,T,\mu}(x) - h(\mu, X, T)\big| + \int\limits_{X\setminus E_\varepsilon} \big|P^\varepsilon_{X,T,\mu}(x) - h(\mu, X, T)\big|.
\end{aligned} \tag{8}$$

Из (1), (2) и (7) получаем

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{E_\varepsilon} \big|P^\varepsilon_{X,T,\mu}(x) - h(\mu, X, T)\big| = \int\limits_{E_\varepsilon} \big|P^\varepsilon_{L,T,\mu_L}(x) - h(\mu_L, L, T)\big| \leqslant \\
&\leqslant \int\limits_{L} \big|P^\varepsilon_{L,T,\mu_L}(x) - h(\mu_L, L, T)\big| \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0.
\end{aligned} \tag{9}$$

Для оценки второго слагаемого в (8) рассмотрим меру $\mu_{A^{\mathbb{Z}}}$ на $A^{\mathbb{Z}}$, определяемую на борелевских множествах $C \subseteq A^{\mathbb{Z}}$ равенством $\mu_{A^{\mathbb{Z}}}(C) = \mu(C \cap X)$. Для меры $\mu_{A^{\mathbb{Z}}}$ выполняются условия ОТ. Кроме того, понятно, что измеримые динамические системы (X, T, μ) и $(A^{\mathbb{Z}}, T, \mu_{A^{\mathbb{Z}}})$ изоморфны, а это влечет равенство их энтропий. Также заметим, что для фиксированных $x \in X$ и $\varepsilon > 0$ аналогично неравенству (3) выводится

$$P^{\varepsilon}_{X,T,\mu}(x) \leqslant P^{\varepsilon}_{A^{\mathbb{Z}},T,\mu_{A^{\mathbb{Z}}}}(x).$$

С учетом вышесказанного получаем:

$$\int\limits_{X\setminus E_\varepsilon} \left|P^{\varepsilon}_{X,T,\mu}(x) - h(\mu, X, T)\right| \leqslant \int\limits_{X\setminus E_\varepsilon} \left|P^{\varepsilon}_{X,T,\mu}(x)\right| + \int\limits_{X\setminus E_\varepsilon} h(\mu, X, T) \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{X\setminus E_\varepsilon} \left|P^{\varepsilon}_{A^{\mathbb{Z}},T,\mu_{A^{\mathbb{Z}}}}(x)\right| + h(\mu, X, T)\mu(X \setminus E_\varepsilon) \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{X\setminus E_\varepsilon} \left|P^{\varepsilon}_{A^{\mathbb{Z}},T,\mu_{A^{\mathbb{Z}}}}(x) - h(\mu_{A^{\mathbb{Z}}}, A^{\mathbb{Z}}, T)\right| + 2h(\mu, X, T)\mu(X \setminus E_\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0.$$

Итак, оба слагаемых в правой части (8) стремятся к 0, а значит, и левая часть стремится к 0, что и завершает доказательство. ▲

С л е д с т в и е 2. *Достаточным условием верности ОГ является синхронизованность носителя меры.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, если L – носитель, то все его слова имеют положительную меру, а значит, если он синхронизован, то и все его волшебные слова имеют положительную меру. ▲

Теперь приведем примеры применения доказанной теоремы.

П р и м е р 2. Пусть $X \subset \{a, (,), [,]\}^{\mathbb{Z}}$ определяется тем, что в словах $W(X)$ между двумя "a" запрещено разное количество открывающих и закрывающих скобок, а носитель меры – сдвиг Дика.

Эта система синхронизована, но мера каждого волшебного слова равна нулю, поэтому ОТ неприменима. Кроме того, носитель несинхронизован. Но взяв $L = \{(,), [,]\}^{\mathbb{Z}}$, мы можем применить ООТ.

П р и м е р 3. X – система с алфавитом из четырех видов скобок $(,), [,], \{, \}, \langle, \rangle$ и языком, включающим в себя слова языка Дика на $\{, \}, \langle, \rangle$ и слова, преобразующиеся в них после удаления всех круглых и квадратных скобок. Например, "$\{\langle(\langle\rangle]\rangle\}$" – слово этого языка, а "$(\{\langle\rangle)$" – нет. Носитель меры – сдвиг Дика на круглых и квадратных скобках. Система X не синхронизована, как и обычная система Дика, носитель тоже не синхронизован, но взяв $L = \{(,), [,]\}^{\mathbb{Z}}$, мы можем применить ООТ.

§ 4. Контрпример к точечной гипотезе для системы Дика

В этом и следующем параграфе X – система Дика. Рассмотрим меру, определенную на цилиндрах следующим образом:

$$\mu(w_c) = (1/2)^{n_1+n_2+|w|}$$

(для любого номера c). Эта мера введена в работе [7], и там же показано, что она борелевская, вероятностная, инвариантная и эргодическая.

Замечание 1. В работе [7] также показано, что мера μ может быть определена и по-другому, а именно $\mu = (\mu_1 \times \mu_2) \circ F^{-1}$, где μ_1 и μ_2 – симметричные 2-бернуллиевские меры, а отображение F из $\{0,1\}^{\mathbb{Z}} \times \{1,2\}^{\mathbb{Z}}$ в X действует следующим образом:

1) ℓ-й член первой 2-бернуллиевской последовательности кодирует тип ℓ-й скобки (1 – открывающая, 0 – закрывающая);
2) ℓ-й член второй 2-бернуллиевской последовательности кодирует вид ℓ-й открывающей скобки.

Это отображение корректно и взаимно однозначно на множестве полной меры.

Утверждение 1. *Возьмем* $x = \ldots [[[[[[[[[[\ldots$ *Тогда* $P_{X,T,\mu}(x) \neq h(\mu, X, T)$.

Доказательство. Энтропия получена Мееровичем в [7]:

$$h(\mu, X, T) = \frac{3}{2}\log 2.$$

Заметим, что для достаточно малых ε

$$O_\varepsilon\bigl(T^{n(\varepsilon)}(O_\varepsilon(x))\bigr) = \bigl\{T^{n(\varepsilon)}x_{[-k+n;k]}\bigr\},$$

откуда следует, что

$$\mu\bigl(O_\varepsilon\bigl(T^{n(\varepsilon)}(O_\varepsilon(x))\bigr)\bigr) = \mu\bigl(\bigl\{T^{n(\varepsilon)}x_{[-k+n;k]}\bigr\}\bigr) = \mu\bigl([^{2k-n+1}\bigr) = (1/2)^{2(2k-n+1)},$$
$$\mu(O_\varepsilon(x)) = \mu\bigl([^{2k+1}\bigr) = (1/2)^{2(2k+1)}.$$

А значит,

$$P_{X,T,\mu}(x) = 2\log 2 \neq h(\mu, X, T). \quad \blacktriangle$$

Замечание 2. Зафиксируем $x \in X$ и $\varepsilon > 0$. Заметим, что если $x_{[k-n+1;k]}$ состоит только из открывающих скобок (любого вида), то ε-ЛСДГ для этих x и ε тоже будет равняться $2\log 2$ (так как множества, стоящие под знаком меры в числителе и знаменателе, будут цилиндрами, основания которых отличаются друг от друга на $n(\varepsilon)$ непарных скобок) и не совпадать с энтропией.

§ 5. Об обобщенной точечной и основной гипотезах для системы Дика

Теорема 2. *Для системы Дика с мерой из § 4 обобщенная точечная гипотеза неверна. Более того, при усилении условия на функцию* $n(\varepsilon)$ *до* $2^{n(\varepsilon)} = o(\log\varepsilon)$ *предел* $P_{X,T,\mu}(x)$ *вообще не существует п.н.*

Доказательство. Пусть $n(\varepsilon)$ отвечает усиленному условию. Будем также считать, что $n(\varepsilon)$ не убывает и является однозначной функцией k: $n = n(k)$ (например, $n(k) = \lfloor \log\log k \rfloor$). В противном случае можно выбрать стремящуюся к 0 последовательность ε (и, возможно, соответствующую ей подпоследовательность k), для которой эти условия выполнены.

Рассмотрим случайные величины $\Sigma(k)$, равные времени ожидания первого появления $n(k)$ открывающих скобок подряд (наблюдение начинается в нулевой момент) и события $A_k = \{\Sigma(k) \leqslant k\}$. Обратимся к определению меры μ из замечания 1. Заметим, что событие A_k инвариантно относительно корректного (т.е. не выводящего за пределы системы Дика) изменения вида скобок без изменения их типа. Такая инвариантность влечет инвариантность прообраза $F^{-1}(A_k)$ относительно изменения второй компоненты. Значит, $F^{-1}(A_k)$ будет иметь вид $B_k \times \{1,2\}^{\mathbb{Z}}$, где B_k– эквивалентные A_k события, но на множестве 2-бернуллиевских последовательностей.

Таким образом, $B_k = \{\Gamma(k) \leqslant k\}$, где $\Gamma(k)$ – случайные величины, равные времени ожидания первого появления $n(k)$ единиц подряд, начиная с нулевого момента. Понятно, что $\mu(A_k) = \mu_1(B_k)$. Далее вместо μ_1 используем обозначение P.

Покажем, что почти всюду выполняется бесконечно много событий A_k, что эквивалентно выполнению бесконечного числа событий B_k, т.е. нужно показать, что

$$P\left(\bigcap_{\ell=1}^{\infty}\bigcup_{k=\ell}^{\infty} B_k\right) = 1,$$

или (что то же самое)

$$P\left(\bigcup_{\ell=1}^{\infty}\bigcap_{k=\ell}^{\infty} \overline{B}_k\right) = 0,$$

где $\overline{B}_k$ – события, дополняющие B_k: $\overline{B}_k = \{\Gamma(k) > k\}$.

Известно (см. [8]), что математическое ожидание имеет вид

$$\mathbf{E}\,\Gamma(k) = 2^{n+1} - 2 = o(k),$$

а среднеквадратическое отклонение –

$$\sigma\Gamma(k) = 2^{n+1} + o(2^{n+1}) = o(k).$$

Зафиксируем $\delta > 0$ и натуральное L, такое что $1/L^2 < \delta$. Найдем достаточно малое $\varepsilon_0 > 0$ (и соответствующее ему $K = k(\varepsilon_0)$), такое что для всех $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ (и соответственно, $k \geqslant K$) выполнено

$$\mathbf{E}\,\Gamma(k) + L\sigma\Gamma(k) < k.$$

По неравенству Чебышева

$$P(|\Gamma(k) - \mathbf{E}\,\Gamma(k)| \geqslant L\sigma\Gamma(k)) \leqslant 1/L^2,$$

и для $k \geqslant K$ имеем

$$P(\overline{B}_k) = P\big(\Gamma(k) > k\big) \leqslant P\Big(\Gamma(k) \geqslant \mathbf{E}\,\Gamma(k) + L\sigma\Gamma(k)\Big) \leqslant$$
$$\leqslant P\Big(|\Gamma(k) - \mathbf{E}\,\Gamma(k)| \geqslant L\sigma\Gamma(k)\Big) \leqslant 1/L^2 < \delta.$$

Тогда, используя непрерывность меры, получаем

$$P\left(\bigcup_{\ell=1}^{\infty}\bigcap_{k=\ell}^{\infty} \overline{B}_k\right) = \lim_{\ell\to\infty} P\left(\bigcap_{k=\ell}^{\infty} \overline{B}_k\right) \leqslant \delta.$$

Отсюда ввиду произвольности δ заключаем, что

$$P\left(\bigcup_{\ell=1}^{\infty}\bigcap_{k=\ell}^{\infty} \overline{B}_k\right) = 0,$$

и по вышесказанному

$$P\left(\bigcap_{\ell=1}^{\infty}\bigcup_{k=\ell}^{\infty} A_k\right) = 1,$$

т.е. почти наверное выполняется бесконечное количество событий A_k.

Зафиксируем $x \in X$, для которого выполняется бесконечное количество A_k. Обозначим последовательность k, для которых выполняется A_k, через k_t, и пусть $i_t := \Sigma(k_t)(x) \leqslant k_t$. Так как $n(k)$ – неубывающая функция, то $n(i_t) \leqslant n(k_t)$, и последние $n(i_t)$ скобок в момент i_t – открывающие, а это по замечанию 2 дает одинаковые (равные $2\log 2$) и не совпадающие с энтропией ε-ЛСДГ в моменты i_t (более точно, этим ε-ЛСДГ соответствуют, например, $\varepsilon_t = 1/2^{i_t+1}$). Наконец, i_t возрастает к бесконечности, ведь $i_t \geqslant n(k_t)$ (так как это просто время ожидания первого появления $n(k_t)$ открывающих скобок подряд, начиная с нулевого момента), а $n(k_t)$ возрастает к бесконечности. Так как i_t возрастает к бесконечности, то ε_t стремится к 0. Итак, мы получили стремящуюся к нулю последовательность ε_t с одинаковыми ε_t-ЛСДГ, не совпадающими с энтропией, но тогда и ЛСДГ для выбранного x как предел ε-ЛСДГ не совпадает с энтропией. Ввиду того что x – почти любое, получаем, что ЛСДГ почти нигде не совпадает с энтропией. ▲

Замечание 3. Вообще говоря, выше не доказано, что ЛСДГ не может поточечно равняться построенным ε_t-ЛСДГ, т.е. $2\log 2$. Это можно показать непосредственно тем же способом, построив последовательность с одинаковым, но другим значением ε-ЛСДГ. Но также это следует из нижеследующей теоремы о том, что для рассматриваемой системы верна ОГ, и следующего факта: если имеет место сходимость в среднем к некоторой константе, то можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к этой константе почти наверное, что исключает поточечную сходимость к другой константе на множестве положительной меры.

Замечание 4. Для несимметричной 2-бернуллиевской меры на полном сдвиге эквивалентное утверждение показывается дословным повторением данного доказательства с момента перехода к бернуллиевскому случаю (экспоненциальный рост математического ожидания и дисперсии рассматриваемых случайных величин сохраняется и в новой ситуации, как и отличие построенных ε_t-ЛСДГ от энтропии). Таким образом, ОТГ неверна даже для бернуллиевских мер.

Теорема 3. *Для системы Дика и меры из предыдущего параграфа верна основная гипотеза.*

Доказательство. В [3] доказано, что для справедливости основной гипотезы достаточно, чтобы выполнялось условие из следствия 1, т.е., чтобы для $k = k(\varepsilon)$ и любой медленной функции $n = n(\varepsilon)$ было выполнено

$$\mu(E_\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 1, \tag{10}$$

где

$$E_\varepsilon = \Big\{x \in X : O_\varepsilon\big(T^n(O_\varepsilon(x))\big) = \big\{T^n x_{[-k+n;k]}\big\}\Big\}.$$

Это мы и покажем. Далее для простоты будем называть множества, для которых справедливо (10), “множествами большой меры”.

Пусть

$$O_1 := O_\varepsilon\big(T^{n(\varepsilon)}(O_\varepsilon(x))\big), \quad O_2 := \big\{T^{n(\varepsilon)} x_{[-k+n;k]}\big\}$$

(здесь есть зависимость от x и ε, которую мы в записи опускаем); очевидно, что $O_1 \subseteq O_2$.

Значительно сложнее показать, что на множествах большой меры имеет место и обратное включение. Фактически $O_2 \subseteq O_1$ для конкретного x означает, что для любого слова w длины n, если $wx_{[-k;k-n]}$ разрешено, то и $wx_{[-k;k]}$ разрешено (здесь имеются в виду конкатенации w с соответствующими отрезками x), неформально говоря, $x_{[k-n+1;k]}$ “не влияет” на разрешенность $wx_{[-k;k]}$. Заметим, что для выполнения данного условия достаточно, чтобы максимум разности открывающих и закрывающих скобок по суффиксам слова $x_{[-k;k-n]}$ был не меньше, чем максимум разности закрывающих и открывающих скобок по префиксам слова $x_{[k-n+1;k]}$. Действительно, первый максимум равен количеству непарных открывающих скобок в $x_{[-k;k-n]}$, а второй – количеству непарных закрывающих скобок в $x_{[k-n+1;k]}$, и при выполнении указанного выше условия все закрывающие скобки в $x_{[k-n+1;k]}$ имеют пару в $x_{[-k;k]}$, а значит, $x_{[k-n+1;k]}$ "не влияет" на разрешенность $wx_{[-k;k]}$. Таким образом, наша задача сводится к тому, чтобы показать, что одна случайная величина (первый максимум) не меньше другой (второй максимум) на множестве большой меры. Обозначим это множество через S_ε (при фиксированном ε будем писать просто S), из вышесказанного имеем $S_\varepsilon \subseteq E_\varepsilon$.

Обратимся к определению меры μ из замечания 1. Заметим, что множество S инвариантно относительно корректного (т.е. не выводящего за пределы системы Дика) изменения вида скобок без изменения их типа, ведь рассматриваемые максимумы зависят лишь от того, открывающая или закрывающая скобка стоит на конкретном месте. Такая инвариантность влечет инвариантность прообраза $F^{-1}(S)$ относительно изменения второй компоненты. Значит, $F^{-1}(S)$ будет иметь вид $R\times\{1,2\}^{\mathbb{Z}}$, где R – некоторое подмножество $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$. Отсюда $\mu(S)=\mu_1(R)$. Из определения F очевидно, что R (более точно, R_ε) – это множество бернуллиевских последовательностей y, для которых максимум разности числа единиц и числа нулей по суффиксам $y_{[-k;k-n]}$ не меньше максимума разности числа нулей и числа единиц по префиксам $y_{[k-n+1;k]}$, но это просто максимумы независимых симметричных случайных блужданий на отрезках $[0;2k-n+1]$ и $[0;n]$. Задача сведена к простейшей!

Осталось показать, что несмотря на независимость рассматриваемых максимумов, один из них не меньше другого на множестве, мера которого стремится к 1 при $\varepsilon \to 0$. Как известно (см., например, [9]), максимум симметричного случайного блуждания на отрезке $[0;m]$ имеет следующее распределение:

$$P(M_m \geqslant r) = 2P(C_m \geqslant r) - P(C_m = r),$$

где r – целое неотрицательное, M_m – данный максимум, C_m – величина случайного блуждания на m-м шаге. Отсюда

$$P(M_m \geqslant r) \leqslant 2P(C_m \geqslant r), \tag{11}$$

$$P(M_m \geqslant r) \geqslant 2P(C_m \geqslant r+1). \tag{12}$$

Здесь и далее для симметричной 2-бернуллиевской меры используем обозначение P. Напомним также, что $n = o(k)$.

Пусть $r = \left\lfloor \sqrt[4]{n(2k-n+1)} \right\rfloor$. Так как n мало относительно k, то $\sqrt{n}$ мал относительно r, но r мало относительно $\sqrt{2k-n+1}$. Тогда для любых $K>0$, $\ell>0$ и для достаточно малых ε выполняется следующее: $r \geqslant K\sqrt{n}$, но $r+1 \leqslant \ell\sqrt{2k-n+1}$.

Рассмотрим $m = n$ и зафиксируем $K > 0$. Так как симметричное случайное блуждание – это сумма независимых одинаково распределенных величин с нулевым среднем и единичной дисперсией, то $\mathbf{E}\, C_n = 0$, $\sigma C_n = \sqrt{n}$ (σ – среднеквадратическое отклонение), и из (11) по неравенству Чебышева для достаточно малых ε получаем

$$P(M_n \geqslant r) \leqslant 2P(C_n \geqslant r) \leqslant 2P(C_n \geqslant K\sqrt{n}) \leqslant 2/K^2,$$

т.е. для любого $K>0$ можно найти правую окрестность нуля, такую что для любого ε из этой окрестности $P(M_n \geqslant r) \leqslant 2/K^2$, т.е. $P(M_n \geqslant r) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$, откуда

$$P(M_n < r) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 1.$$

Напомним центральную предельную теорему (ЦПТ) для симметричного случайного блуждания.

Т е о р е м а 4. *Имеет место сходимость по распределению*

$$\frac{C_m}{\sqrt{m}} \xrightarrow[m\to\infty]{d} N,$$

где N – стандартная нормальная величина.

Пусть теперь $m = 2k - n + 1$ и $\ell > 0$. Из (12) для достаточно малых ε имеем

$$P\big(M_{2k-n+1} \geqslant r\big) \geqslant 2P\big(C_{2k-n+1} \geqslant r+1\big) \geqslant 2P\big(C_{2k-n+1} \geqslant \ell\sqrt{2k-n+1}\big).$$

Заметим, что $2k - n + 1 \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \infty$, и воспользуемся ЦПТ для симметричного случайного блуждания:

$$P\big(C_{2k-n+1} \geqslant \ell\sqrt{2k-n+1}\big) = P\big(C_{2k-n+1}/\sqrt{2k-n+1} \geqslant \ell\big) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} P(N \geqslant \ell),$$

в частности, для достаточно малых ε

$$P\big(C_{2k-n+1} \geqslant \ell\sqrt{2k-n+1}\big) \geqslant P(N \geqslant 2\ell),$$

откуда в правой окрестности нуля (зависящей от ℓ):

$$P(M_{2k-n+1} \geqslant r) \geqslant 2P(N \geqslant 2\ell).$$

Учитывая произвольность ℓ и непрерывность функции нормального распределения (и то, что вероятность, очевидно, не больше $1 = 2P(N \geqslant 0)$), получаем

$$P(M_{2k-n+1} \geqslant r) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 2P(N \geqslant 0) = 1.$$

Итак,

$$P(M_n < r) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 1,$$
$$P(M_{2k-n+1} \geqslant r) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 1.$$

Теперь, вспоминая, что в нашей ситуации M_n и M_{2k-n+1} – независимые величины, находим

$$P(M_n \leqslant M_{2k-n+1}) \geqslant P(M_n \leqslant r \leqslant M_{2k-n+1}) =$$
$$= P(M_n < r)P(M_{2k-n+1} \geqslant r) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 1.$$

Возвращаясь к первоначальным обозначениям, тем сам мы показали, что один максимум не меньше другого на множестве R_ε большой меры, но мера S_ε равна мере R_ε, и значит, тоже стремится к единице. Наконец, $S_\varepsilon \subseteq E_\varepsilon$, откуда $\mu(E_\varepsilon) \to 1$. ▲

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Заславский Г.М.* Стохастичность динамических систем. М.: Наука, 1984.
2. *Gurevich B.M.* Geometric Interpretation of Entropy for Random Processes // Sinai's Moscow Seminar on Dynamical Systems. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1996. P. 81–87.
3. *Комеч С.А.* Скорость искажения границы в синхронизованных системах: геометрический смысл энтропии // Пробл. передачи информ. 2012. Т. 48. № 1. С. 15–25. http://mi.mathnet.ru/ppi2065

4. *Гуревич Б.М., Комеч С.А.* Скорость деформации границ в системах Аносова и близких к ним // Тр. МИАН. 2017. Т. 297. С. 211–223. `https://doi.org/10.1134/S037196851702011X`
5. *Синай Я.Г.* О понятии энтропии динамической системы // ДАН СССР. 1959. Т. 124. С. 768–771.
6. *Корнфельд И.П., Синай Я.Г., Фомин С.В.* Эргодическая теория. М.: Наука, 1980.
7. *Meyerovitch T.* Tail Invariant Measures of the Dyck-Shift and Non-sofic Systems. Master Thesis. Tel-Aviv Univ., Israel, 2004.
8. *Perng C., Yamoah G,, Ali A.* Computing Probability Generating Functions of Coin Flipping and Its Generalizations // Appl. Math. Sci. (Ruse). 2013. Vol. 7. № 115. P. 5693–5710. `https://doi.org/10.12988/ams.2013.38460`
9. Ширяев А.Н. Вероятность. Т. 1. М.: МЦНМО, 2007.

Дворкин Григорий Дмитриевич
Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет,
кафедра математической статистики и случайных процессов
`grisha230531415@gmail.com`

Поступила в редакцию
25.03.2021
После доработки
17.06.2021
Принята к публикации
27.06.2021