ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

Том 57 2021 Вып. 3

УДК 621.391 : 004.932

© 2021 г. **С.М. Карпенко, Е.И. Ершов**

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ ДИАДИЧЕСКОГО ПАТТЕРНА БЫСТРОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ХАФА[1]

Получена оценка максимального отклонения от геометрической прямой аппроксимирующего ее дискретного (диадического) паттерна, используемого при вычислении быстрого преобразования Хафа (дискретного преобразования Радона) для квадратного изображения с размером стороны $n = 2^p$, $p \in \mathbb{N}$. Для четных p максимальное отклонение составляет $p/6$. Важную роль в доказательстве играет анализ тонких свойств простого комбинаторного объекта – таблицы циклических сдвигов произвольного двоичного числа.

Ключевые слова: быстрое преобразование Хафа, быстрое преобразование Радона, диадический паттерн, анализ ошибки, комбинаторная оптимизация, двоичные слова.

DOI: 10.31857/S0555292321030074

§ 1. Введение

Преобразованием Радона (ПР) на евклидовой плоскости называется интегральное преобразование, относящее функции f ее интегралы по всевозможным прямым [1]. В полярной параметризации преобразование Радона функции $f(x, y)$ задается следующим равенством:

$$\mathcal{R}f(\varphi, p) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(-t\sin\varphi + p\cos\varphi, t\cos\varphi + p\sin\varphi)\, dt.$$

В анализе изображений используются различные вариации дискретного преобразования Радона, в частности быстрое преобразование Хафа (БПХ) [2]. Интересно, что алгоритм изобретался как минимум четыре раза [2–5]. О быстром дискретном преобразовании Радона и его обращении замечательно написано в работе У. Пресса [6]. БПХ вычисляет суммы по набору дискретных паттернов специального вида, так называемых диадических, и используется для поиска прямолинейных или составленных из прямых объектов на изображении.

В работе [7] приведена (в соответствии с вычислительными экспериментами) оценка максимального отклонения диадического паттерна от соответствующей геометрической прямой, и поставлена задача доказать эту оценку. В настоящей статье мы доказываем и уточняем оценку $\dfrac{p}{6}$ из работы [7].

[1] Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в рамках научного проекта № 18-29-26020.

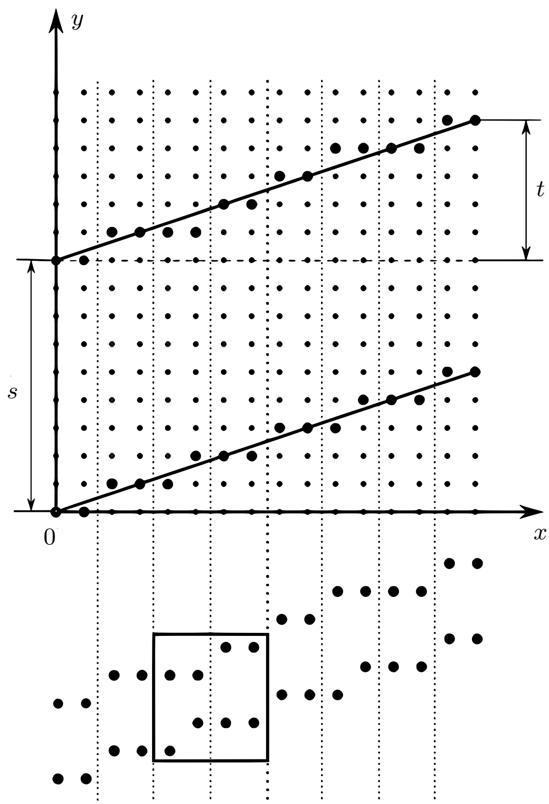

Рис. 1. Изображение размера 16×16 с заданной системой координат. Иллюстрация структур ближайшего (нижний) и диадического (верхний) паттернов, аппроксимирующих прямую с наклоном $t = 5$

§ 2. Параметризация, структура и ошибка аппроксимации диадического паттерна

Изображением будем называть векторнозначную функцию, заданную на дискретном множестве Ω вида $[0, \ldots, n-1] \times [0, \ldots, m-1]$, где $n, m \in \mathbb{Z}$. В статье будем считать, что $n = m = 2^p$, где p – некоторое натуральное число.

Паттерном будем называть любое подмножество множества Ω, а *прямолинейным паттерном* или *дискретной прямой* будем называть подмножество, аппроксимирующее непрерывную прямую. Например, *ближайшим* прямолинейным паттерном будем называть подмножество, задаваемое уравнением

$$y = \big[kx + b\big],$$

здесь и далее $[\,\cdot\,]$ обозначает округление до ближайшего целого, $k, b \in \mathbb{R}$ – параметры аппроксимируемой прямой.

Без ограничения общности далее в статье рассмотрим только прямые с наклонами $0 \leqslant k \leqslant 1$, будем задавать их парой точек $P_1(0, s)$ и $P_2(n-1, s+t)$ на границах изображения, где $s \in [0, n-1]$ – целочисленный сдвиг паттерна, а $t \in [0, n-1]$ – целочисленный наклон (см. рис. 1). Далее будем рассматривать случай $s = 0$.

В работе [8] предложено аналитическое определение диадического паттерна с использованием базисных диадических паттернов.

Определение 1. *Базисным диадическим паттерном* называется дискретная прямая вида

$$y = D_r(x) = \left[\frac{tx}{2^p - 1}\right] = \left[\frac{2^r x}{2^p - 1}\right],$$

где $x, y \in \mathbb{Z}^+$ – абсцисса и ордината графика прямой, $x, y < n$, а $t = 2^r$ – параметр наклона, $r < p$.

Определение 2. Пусть $t = t_{p-1}t_{p-2}\dots t_0$ – двоичная запись параметра наклона. Тогда дискретная прямая вида

$$D(x,t) = \sum_{r=0}^{p-1} t_r D_r(x) \tag{1}$$

называется *диадическим паттерном* с наклоном $t \in [0, 2^p - 1]$ (см. [8]).

Используя определение (1), запишем ошибку аппроксимации диадическим паттерном непрерывной прямой вида $L(x,t) = \dfrac{tx}{2^p - 1}$:

$$E(x,t) = D(x,t) - L(x,t) = \sum_{r=0}^{p-1} t_r \left[\frac{2^r x}{2^p - 1}\right] - \frac{tx}{2^p - 1} =$$

$$= \sum_{r=0}^{p-1} t_r \left(\left[\frac{2^r x}{2^p - 1}\right] - \frac{2^r x}{2^p - 1}\right). \tag{2}$$

Другим существенным свойством диадического паттерна является знакопеременность ошибки аппроксимации относительно центра паттерна.

Утверждение 1. *Для любого $x \in [0, 2^{p-1} - 1]$ и любого $t \in [0, 2^p - 1]$ верно, что $E(2^{p-1} - 1 - x, t) = -E(2^{p-1} + x, t)$.*

Доказательство. Запишем утверждение согласно формуле (2):

$$\frac{(2^{p-1} - 1 - x)2^r}{2^p - 1} - \left[\frac{(2^{p-1} - 1 - x)2^r}{2^p - 1}\right] = \left[\frac{(2^{p-1} + x)2^r}{2^p - 1}\right] - \frac{(2^{p-1} + x)2^r}{2^p - 1}.$$

Преобразуем данное выражение:

$$\left[\frac{(2^{p-1} + x)2^r}{2^p - 1}\right] + \left[\frac{(2^{p-1} - 1 - x)2^r}{2^p - 1}\right] = 2^r.$$

Покажем, что это уравнение является тождеством:

$$\left[\frac{2^{p-1}2^r}{2^p - 1} + \frac{2^r x}{2^p - 1}\right] + \left[\frac{2^{p-1}2^r}{2^p - 1} - \frac{(x+1)2^r}{2^p - 1}\right] = 2^r,$$

$$\left[2^{r-1} + \frac{2^{r-1}}{2^p - 1} + \frac{2^r x}{2^p - 1}\right] + \left[2^{r-1} + \frac{2^{r-1}}{2^p - 1} - \frac{(y+1)2^r}{2^p - 1}\right] = 2^r.$$

В результате получаем

$$\left[\frac{2^{r-1} + 2^r x}{2^p - 1}\right] + \left[\frac{-2^{r-1} - 2^r x}{2^p - 1}\right] = 0. \quad \blacktriangle$$

Утверждение 2. *Значение функции $E(x,t)$ не меняется при перестановке ее аргументов, т.е. координаты вдоль прямой и наклона прямой.*

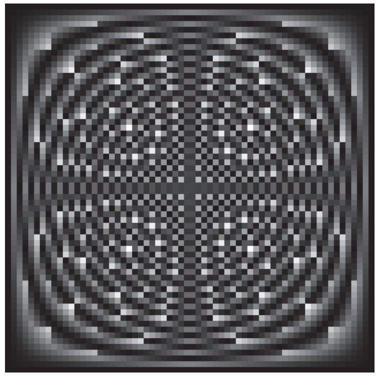

Рис. 2. Симметрия модуля ошибки аппроксимации относительно отражения (утверждение 1) и перестановки аргументов – абсциссы x и наклона прямой t (утверждение 2)

Доказательство. Итак, пусть $x = \sum\limits_{s=0}^{p-1} 2^s x_s$, $t = \sum\limits_{r=0}^{p-1} 2^r t_r$. Мы хотим продемонстрировать, что $E(x,t) = E(t,x)$. В силу равенства (2) достаточно показать, что

$$\left[\frac{2^r x}{2^p - 1}\right] = \sum_{s=0}^{p-1} x_s \left[\frac{2^r 2^s}{2^p - 1}\right].$$

Заметим, что $\left[\frac{2^{p-1}}{2^p - 1}\right] = \left[\frac{2^p}{2^p - 1}\right] = 1$; вообще, при $0 \leqslant d \leqslant 2p-2$ имеем

$$\left[\frac{2^d}{2^p - 1}\right] = \begin{cases} 0, & \text{если } d < p-1, \\ 1, & \text{если } d = p-1, \\ 2^{d-p}, & \text{если } p-1 < d \leqslant 2p-2. \end{cases} \qquad (3)$$

Поскольку для $x \in [0, 2^{p-1}]$ верно, что

$$\left[\frac{x}{2^p - 1}\right] = 0,(x_{p-1} \dots x_0),$$

где через $0,(x_{p-1} \dots x_0)$ обозначена бесконечная двоичная периодическая дробь, то для любого $r \leqslant p-1$ справедливо

$$\left[\frac{2^r x}{2^p - 1}\right] = [2^r \cdot 0,(x_{p-1} \dots x_0)] = [x_{p-1} \dots x_{p-r},(x_{p-r-1} \dots x_{p-r})] =$$
$$= x_{p-1} \dots x_{p-r} + x_{p-r-1} = x_{p-r-1} + \sum_{s=p-r}^{s=p-1} 2^{r+s-p} x_s.$$

Полагая $d = r + s$ в (3), получаем требуемое. ▲

§ 3. Вычисление ошибки аппроксимации

3.1. Двоичное представление ошибки аппроксимации. Запишем выражение ошибки аппроксимации диадическим паттерном наклона t в точке x согласно выражению (2):

$$E(x,t)=\sum_{r=0}^{p-1} t_r E_r(x), \tag{4}$$

где $E_r(x) = \left(\left[\frac{2^r x}{2^p-1}\right] - \frac{2^r x}{2^p-1}\right)$ – ошибка аппроксимации базисным диадическим паттерном с наклоном 2^r.

Нетрудно выписать двоичное представление $E_r(x)$, а именно:

1. $\frac{1}{2^p-1} = 0,\underbrace{(0\ldots1)}_{p};$
2. $\frac{x}{2^p-1} = 0,(x_{p-1}x_{p-2}\ldots x_0)$ для $x = x_{p-1}x_{p-2}\ldots x_0$;
3. $E_r(x) = [\ldots x_{p-r-1},(x_{p-r-2}\ldots x_0\ldots x_{p-r-1})] - \ldots x_{p-r-1},(x_{p-r-2}\ldots x_0\ldots x_{p-r-1});$
4. $E_r(x) = \begin{cases} 1-0,(x_{p-r-2}\ldots x_0\ldots x_{p-r-1}), & x_{p-r-2}=1,\\ -0,(x_{p-r-2}\ldots x_0\ldots x_{p-r-1}), & x_{p-r-2}=0.\end{cases}$

Заметим, что для фиксированного x модуль ошибки $E(x,t)$ будет максимален, когда $t_r = 1$ только для слагаемых одного знака. С учетом утверждения 1 для поиска максимальной по модулю ошибки аппроксимации мы можем ограничиться только такими (r,x), для которых, например, $E_r(x) < 0$.

Таким образом, мы перешли от исходной задачи оценивания ошибки аппроксимации к комбинаторной, описанной в следующем пункте.

3.2. Постановка задачи про таблицу циклических сдвигов. Пусть $T(x)$ – таблица всевозможных циклических сдвигов двоичной записи x:

$$\begin{array}{c|ccc}
x_{p-1} & x_{p-2} & \ldots & x_0\\
\hline
x_{p-2} & x_{p-3} & \ldots & x_{p-1}\\
x_{p-3} & x_{p-4} & \ldots & x_{p-2}\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
x_0 & x_{p-1} & \ldots & x_1.
\end{array}$$

Определим функцию от таблицы $S(T(x))$ как арифметическую сумму чисел, соответствующих строкам с нулевым старшим битом. Первый столбец и строка в таблице отделены в иллюстративных целях: в столбце располагаются “управляющие” биты, в строке – слагаемые.

Задача: найти $\max\limits_{x} S(T(x))$.

3.3. Анализ свойств таблицы циклических сдвигов. Символами $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{w}$ обозначим произвольную двоичную последовательность, а символами $\boldsymbol{v}^*$ и $\boldsymbol{w}^*$ – их инверсию, записанную в обратном порядке. Например, если $\boldsymbol{v} = 010000$, то $\boldsymbol{v}^* = 111101$.

По построению для любого числа x таблица $T(x)$ будет иметь следующую структуру, где $\boldsymbol{v} = x_{p-2},\ldots,x_0$:

$$\begin{array}{c|ccc}
x_{p-1} & & \boldsymbol{v} & \\
\hline
 & x_{p-3} & \ldots & x_{p-1}\\
\boldsymbol{v} & x_{p-4} & \ldots & x_{p-2}\\
 & \ldots & \ldots & \ldots\\
 & x_{p-1} & \ldots & x_1.
\end{array}$$

Заметим, что битовое представление x содержится как в первой строке, так и в первом столбце.

Л е м м а 1 (о замене). *Пусть $T_\varepsilon(x)$ обозначает таблицу размера $p \times p$ вида*

$$\begin{array}{c|ccc}
\varepsilon & & \boldsymbol{v} & \\
\hline
 & x_{p-3} & \dots & \varepsilon \\
\boldsymbol{v} & x_{p-4} & \dots & x_{p-2} \\
 & \dots & \dots & \dots \\
 & \varepsilon & \dots & x_1,
\end{array}$$

где $x_{p-1} = \varepsilon$. Тогда $S(T_0(x)) > S(T_1(x))$ эквивалентно $\boldsymbol{v} > \boldsymbol{v}^*$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства леммы достаточно показать, что

$$S(T_0(x)) - S(T_1(x)) = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}^*.$$

Вычислим разность $S(T_0(x)) - S(T_1(x))$. Так как суммирование производится только по строкам с нулевым старшим битом, то разность первых строк равна $\boldsymbol{v}$. Далее, для пары строк с номером $r > 1$ в таблице $T_0(x)$ значение в разряде $p - r$ равно нулю, в то время как в правой таблице $T_1(x)$ – единице, а значения в остальных разрядах строк совпадают, т.е. вкладом такой пары строк является отрицательное число с единственной единицей в $p - r$ разряде. Тогда сумма вкладов всех таких пар строк равна $-\boldsymbol{v}^*$. ▲

Л е м м а 2 (о перестановке). *Пусть символ 1_p обозначает битовую последовательность единиц длинны p, а $T_{\varepsilon\delta}(x)$ – таблицу размера $p \times p$ вида*

$$\begin{array}{c|ccc}
\varepsilon & \delta & \boldsymbol{v} & \\
\hline
\delta & x_{p-3} & \dots & \varepsilon \\
 & x_{p-4} & \dots & \delta \\
\boldsymbol{v} & \dots & \dots & \dots \\
 & \varepsilon & \dots & x_1.
\end{array}$$

Тогда $S(T_{01}(x)) > S(T_{10}(x))$ эквивалентно $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}^* < 1_{p-2}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Аналогично доказательству леммы 1 запишем разность сумм по таблицам:

$$S(T_{01}(x)) - S(T_{10}(x)) = 01\boldsymbol{v} - 0\boldsymbol{v}1 - \boldsymbol{v}^*,$$

здесь первое слагаемое есть вклад пары строк с $r = 0$, второе – вклад пары строк с $r = 1$, а третье – вклад оставшихся пар строк, полученный аналогичным лемме 1 способом. После преобразования получим

$$S(T_{01}(x)) - S(T_{10}(x)) = 1_{p-2} - \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}^*,$$

что и требовалось. ▲

Назовем *максимайзером* любой $\widehat{x} = \underset{x \in [0, 2^p - 1]}{\arg\max}\, S(T(x))$. Будем теперь последовательно сужать множество возможных максимайзеров.

Обозначим символом $\overset{m}{\sim}$ последовательность чередующихся нулей и единиц длины m, а символом ${}^{\varepsilon}\overset{m}{\sim}{}^{\delta}$ – последовательность чередующихся нулей и единиц длины m со значениями ε и δ в старшем и младшем разрядах соответственно, например, ${}^{1}\overset{5}{\sim}{}^{1} = 10101$.

П р е д л о ж е н и е 1. *Если в двоичной записи числа x встречаются три подряд идущих равных бита (далее –* битовая тройка*), то такой x не может быть максимайзером.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Без ограничения общности рассмотрим число, в котором есть как минимум одна битовая тройка единиц $111\boldsymbol{w}$. Пусть $\widehat{x} = 11\boldsymbol{w}1$. Так как $T(x)$

содержит все циклические сдвиги, то $S(T(x)) = S(T(\widehat{x}))$. Следовательно, достаточно показать, что

$$S(T(01\boldsymbol{w}1)) > S(T(11\boldsymbol{w}1)).$$

Обозначим $\boldsymbol{v} = 1\boldsymbol{w}1$, тогда $\boldsymbol{v}^* = 0\boldsymbol{w}^*0$. Видно, что $\boldsymbol{v} > \boldsymbol{v}^*$. Следовательно, согласно лемме 1 имеем $S(T(11\boldsymbol{w}1)) > S(T(01\boldsymbol{w}1))$, и $111\boldsymbol{w}$ не может быть максимайзером. ▲

П р е д л о ж е н и е 2. *Число вида* $x = 11\overbrace{0\ldots0}^{\ell}11\overbrace{0\ldots0}^{m}11\boldsymbol{w}$ *не может быть максимайзером.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\widehat{x}$ получен в результате циклического сдвига x:

$$\widehat{x} = 11\overbrace{0\ldots0}^{m}11\boldsymbol{w}11\overbrace{0\ldots0}^{\ell}.$$

Обозначим

$$\boldsymbol{v} = 1\overbrace{0\ldots0}^{m}11\boldsymbol{w}11\overbrace{0\ldots0}^{\ell} = \overbrace{1\ldots1}^{m+2}1\boldsymbol{w}11\overbrace{0\ldots0}^{\ell},$$

тогда

$$\boldsymbol{v}^* = \overbrace{1\ldots1}^{\ell}00\boldsymbol{w}^*00\overbrace{1\ldots1}^{m}0,$$

Для сравнения $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{v}^*$ необходимо рассмотреть три случая: $m+2 < \ell$, $m+2 = \ell$ и $m+2 > \ell$. Рассмотрим, например, случай, когда $m+2 < \ell$. Будем побитово сравнивать $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{v}^*$, начиная со старшего бита. Видно, что в первом несовпавшем разряде $\boldsymbol{v}$ содержит единицу, а $\boldsymbol{v}^*$ – ноль, следовательно, $\boldsymbol{v} > \boldsymbol{v}^*$. Аналогичным образом рассматриваются остальные два случая. Следовательно, согласно лемме 1 имеем

$$S(T(01\overbrace{0\ldots0}^{\ell}01\overbrace{0\ldots0}^{m}11\boldsymbol{w})) > S(T(11\overbrace{0\ldots0}^{\ell}11\overbrace{0\ldots0}^{m}11\boldsymbol{w})),$$

т.е. x не является максимайзером. ▲

П р е д л о ж е н и е 3. *Если в битовом представлении x содержится подпоследовательность вида* 1100, *то x не может быть максимайзером.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x = 100\boldsymbol{w}1$, а $\widehat{x} = 010\boldsymbol{w}1$.

Пусть $\boldsymbol{v} = 0\boldsymbol{w}1$, тогда $\boldsymbol{v}^* = 0\boldsymbol{w}^*1$. Очевидно, что $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}^* < 1_{p-2}$, так как у обоих слагаемых старший разряд имеет нулевое значение.

Тогда согласно лемме 2 имеем $S(T(x)) > S(T(\widehat{x}))$, и следовательно, x не может быть максимайзером. ▲

П р е д л о ж е н и е 4. *Число вида* $x = 11\overbrace{0\ldots0}^{m}11\overbrace{1\ldots1}^{n}00\boldsymbol{w}$ *не может быть максимайзером.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\widehat{x}$ – циклический сдвиг числа x:

$$\widehat{x} = 10\overbrace{1\ldots1}^{n-1}00\boldsymbol{w}11\overbrace{0\ldots0}^{m}1.$$

Докажем данное утверждение для $\widehat{x}$. Заметим, что $\widehat{x} = 10\boldsymbol{v}$, где

$$\boldsymbol{v} = 1\overbrace{0\ldots0}^{n-2}\!{}^{1}00\boldsymbol{w}11\overbrace{0\ldots0}^{m}1,$$

тогда

$$\boldsymbol{v}^* = 0\overbrace{1\ldots1}^{m}00\boldsymbol{w}^*11\overbrace{0\ldots0}^{n-2}\!{}^{1}0.$$

Независимо от соотношения величин $n-2$ и m видно, что $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}^* < 1_{p-2}$. Следовательно, согласно лемме 2 имеем

$$S(T(10^{1}\overset{n-1}{\widetilde{\quad}}{}^{1}00\boldsymbol{w}11^{0}\overset{m}{\widetilde{\quad}}{}^{0}1)) < S(T(00^{1}\overset{n-1}{\widetilde{\quad}}{}^{1}00\boldsymbol{w}11^{0}\overset{m}{\widetilde{\quad}}{}^{0}1)),$$

и $\widehat{x}$ – не максимайзер. ▲

П р е д л о ж е н и е 5. *Число вида* $x = 11^{0}\overset{m+k}{\widetilde{\quad}}{}^{1}00^{1}\overset{m}{\widetilde{\quad}}{}^{0}11\boldsymbol{w}$, $m > 1$, *не может быть максимайзером.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\widehat{x}$ – циклический сдвиг числа x:

$$\widehat{x} = 01^{0}\overset{m-1}{\widetilde{\quad}}{}^{0}11\boldsymbol{w}11^{0}\overset{m+k}{\widetilde{\quad}}{}^{1}0,$$

докажем данное утверждение для $\widehat{x}$, так как $S(T(x)) = S(T(\widehat{x}))$. Пусть

$$\boldsymbol{v} = {}^{0}\overset{m-1}{\widetilde{\quad}}{}^{0}11\boldsymbol{w}11^{0}\overset{m+k}{\widetilde{\quad}}{}^{1}0,$$

тогда

$$\boldsymbol{v}^* = {}^{1}\overset{m+k+1}{\widetilde{\quad\;}}{}^{1}00\boldsymbol{w}^*00^{1}\overset{m-1}{\widetilde{\quad}}{}^{1}.$$

Поскольку для любых положительных m, k справедливо $m+k+1 > m-1$, то $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}^* > 1_p$. Следовательно, согласно лемме 2 такое x не может быть максимайзером. ▲

3.4. Точное значение ошибки для четного и асимптотика для нечетного случаев.

Т е о р е м а 1. *Максимальная ошибка аппроксимации диадическим паттерном достигается при* $x = \left[\dfrac{2^p}{3}\right]$ *и* $x = \left[\dfrac{2^{p+1}}{3}\right]$ *при наклонах* $t = \left[\dfrac{2^p}{3}\right]$ *и* $t = \left[\dfrac{2^{p+1}}{3}\right]$, *и ее модуль равен* $\dfrac{p}{6}$ *для четных* p.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ясно, что $x_1 = {}^{0}\overset{p}{\widetilde{\quad}}{}^{1} = \left[\dfrac{2^p}{3}\right]$, $x_2 = {}^{1}\overset{p}{\widetilde{\quad}}{}^{0} = \left[\dfrac{2^{p+1}}{3}\right]$. Любые другие x не могут быть максимайзерами согласно предложениям 1–5. Заметим, что случай $x = 11\overset{n}{\widetilde{\quad}}11\overset{m}{\widetilde{\quad}}$ соответствует предложению 2, а $x = 11\overset{n}{\widetilde{\quad}}00\overset{m}{\widetilde{\quad}}$ – предложению 4.

В силу перестановочности наклона и координаты (см. утверждение 2 в § 2) наклонами для данных максимайзеров являются $t_1 = \left[\dfrac{2^p}{3}\right]$, $t_2 = \left[\dfrac{2^{p+1}}{3}\right]$, и для каждого из этих наклонов максимальная ошибка достигается при $x_1 = \left[\dfrac{2^p}{3}\right]$, $x_2 = \left[\dfrac{2^{p+1}}{3}\right]$.

Рассчитаем теперь значение максимальной ошибки, к примеру, для случая $x_1 = \left[\dfrac{2^p}{3}\right]$. Для этого согласно формуле (2) достаточно вычислить сумму по таблице $S(T(x_1))$ и поделить результат на $2^p - 1$. Сумма по одной значимой строке в таблице есть сумма геометрической прогрессии из $\dfrac{p}{2}$ элементов со знаменателем $q = 4$ и первым членом, равным 1. Нетрудно вычислить, что сумма по одной строке равна $s = \dfrac{4^{p/2}-1}{3} = \dfrac{2^p-1}{3}$, тогда для всех $\dfrac{p}{2}$ значимых строк сумма по таблице равна $\dfrac{p(2^p-1)}{6}$. В результате максимальная ошибка аппроксимации согласно формуле (4) равна $\dfrac{p}{6}$.

Аналогичный расчет применим для остальных пар (x, t), где достигается максимальное значение ошибки. ▲

Т е о р е м а 2. *Модуль максимальной ошибки аппроксимации диадическим паттерном для нечетных* p *достигается при* $x = 00^1\overbrace{\ldots}^{p-2}{}^1$ *или* $x = 11^0\overbrace{\ldots}^{p-2}{}^0$, *и при* $p \to \infty$ *сходится к* $\dfrac{p}{6} - \dfrac{1}{18}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно предложениям 1–5 для нечетных p максимайзером может быть только число, в битовом представлении которого содержится только одна пара соседствующих единичных или нулевых битов.

Для определения величины этой ошибки при $p \to \infty$ аналогично теореме 1 подсчитаем сумму по таблице. Пусть $x_1 = {}^0\overbrace{\ldots}^{p-2}{}^0 11$ и $t_1 = {}^0\overbrace{\ldots}^{p-2}{}^0 11$. Видно, что такое число содержит $m = \dfrac{p-1}{2}$ нулей и $n = \dfrac{p-1}{2} + 1$ единиц.

Для начала вычислим сумму S_1 по первой строке таблицы. Ясно, что ${}^0\overbrace{\ldots}^{p-2}{}^0 11 =$ $= {}^0\overbrace{\ldots}^{p}{}^0 + 1$. Заметим, что сумма по ${}^0\overbrace{\ldots}^{p}{}^0$ является суммой геометрической прогрессии с первым элементом, равным $a_1 = 2$, и знаменателем $q = 4$, и равна $\dfrac{2}{3}(2^{p-1} - 1)$. Тогда $S^1 = \dfrac{2}{3}(2^{p-1} - 1) + 1$.

Заметим, что разность соседних значимых строк Δ_i в таблице образует геометрическую прогрессию, $\Delta_1 = T_3(x_1) - T_1(x_1) = 10$, $\Delta_2 = T_5(x_1) - T_3(x_1) = 1000$. Обобщая, получаем $\Delta_i = 2 \cdot 4^{i-1}$, где $i \in \left[1, \dfrac{p-1}{2} - 1\right]$.

Тогда значение суммы по каждой значимой строке k (индекс пробегает по строкам с нулевым старшим битом) можно представить как сумму по первой строке и добавки к каждой строке, равной соответствующей сумме $S_k = \sum\limits_{i=1}^{k-1} \Delta_i$. Таким образом, сумма по таблице равна

$$S = \left[\frac{p-1}{2} \cdot S^1 + \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} S_k\right].$$

Преобразовав данное выражение, получим

$$S = \frac{1}{18}\big(-3p + 2^p(3p-1) - 1\big). \tag{5}$$

Тогда, поделив выражение (5) на $2^p - 1$ согласно формуле (4) и устремляя $p \to \infty$, получим

$$E(x_1, x_2) = \frac{p}{6} - \frac{1}{18},$$

что и требовалось доказать.

Аналогичным образом производится расчет и для всех остальных пар (x, t), где достигается максимальное значение ошибки. ▲

Авторы благодарят Вячеслава Васильева за педантичную вычитку текста статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гельфанд И.М., Гиндикин С.Г., Граев М.И.* Избранные задачи интегральной геометрии. М.: Добросвет, 2012.
2. *Brady M.L., Yong W.* Fast Parallel Discrete Approximation Algorithms for the Radon Transform // Proc. 4th Annu. ACM Symp. on Parallel Algorithms and Architectures (SPAA'92). San Diego, CA, USA. June 29–July 1, 1992. P. 91–99. https://doi.org/10.1145/140901.140911

3. *Götz W.A.* Eine Schnelle Diskrete Radon Transformation basierend auf rekursiv definierten Digitalen Geraden. PhD Thesis. Univ. of Innsbruck, Austria, 1993.
4. *Vuillemin J.E.* Fast Linear Hough Transform // Proc. IEEE Int. Conf. on Application Specific Array Processors (ASSAP'94). San Francisco, CA, USA. Aug. 22–24, 1994. P. 1–9. https://doi.org/10.1109/ASAP.1994.331821
5. *Карпенко С.М., Николаев Д.П., Николаев П.П., Постников В.В.* Быстрое преобразование Хафа с управляемой робастностью // Труды Международных конференций "Искусственные интеллектуальные системы" (AIS'04) и "Интеллектуальные САПР" (CAD-2004). Дивноморское, Краснодарский край. 3–10 сентября 2004 г. М.: Физматлит, 2004. Т. 2. С. 303–309.
6. *Press W.H.* Discrete Radon Transform Has an Exact, Fast Inverse and Generalizes to Operations Other than Sums along Lines // Proc. Natl. Acad. Sci. 2006. V. 103. № 51. P. 19249–19254. https://doi.org/10.1073/pnas.0609228103
7. *Götz W.A., Druckmüller H.J.* A Fast Digital Radon Transform—An Efficient Means for Evaluating the Hough Transform // Pattern Recognit. 1996. V. 29. № 4. P. 711–718. https://doi.org/10.1016/0031-3203(96)00015-5
8. *Ershov E., Terekhin A., Nikolaev D., Postnikov V., Karpenko S.* Fast Hough Transform Analysis: Pattern Deviation from Line Segment // Eighth International Conference on Machine Vision (ICMV 2015). Barcelona, Spain. Nov. 19–21, 2015. Proc. SPIE. V. 9875. Article ID 987509 (5 pp.). https://doi.org/10.1117/12.2228852

Карпенко Семен Михайлович
Ершов Егор Иванович
Институт проблем передачи информации
им. А.А. Харкевича РАН, Москва
Московский физико-технический институт
(государственный университет)
simon.karpenko@gmail.com
e.i.ershov@gmail.com

Поступила в редакцию
04.07.2017
После доработки
30.07.2021
Принята к публикации
07.08.2021