ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

Том 57 **2021** **Вып. 4**

УДК 621.391 : 519.724

© 2021 г. $\boxed{\text{А.Г. Дьячков}}$, **Д.Ю. Гошкодер**

НОВЫЕ НИЖНИЕ ГРАНИЦЫ ДЛЯ ДОЛИ ИСПРАВЛЯЕМЫХ ОШИБОК ПРИ СПИСОЧНОМ ДЕКОДИРОВАНИИ В КОМБИНАТОРНЫХ ДВОИЧНЫХ КАНАЛАХ СВЯЗИ

Целью данной статьи являются восстановление и развитие результатов неопубликованной рукописи А.Г. Дьячкова. Рассматривается дискретный канал без памяти (ДКБП) и доказывается теорема об экспоненциальной границе выбрасывания при декодировании списком фиксированной длины L. Данный результат является обобщением классической экспоненциальной границы вероятности ошибки оптимальных кодов в ДКБП на модель списочного декодирования в ДКБП. В качестве приложений данного результата рассмотрены двоичный симметричный канал (ДСК) без памяти и двоичный асимметричный канал (Z-канал) без памяти. Для обоих рассматриваемых каналов выведена нижняя граница доли числа исправляемых ошибок при передаче с нулевой скоростью по соответствующим каналам, на выходе которых используется декодирование списком фиксированной длины L. Для Z-канала эта граница получена при произвольном распределении входного алфавита $(1-w, w)$, а также найдено оптимальное значение полученной границы и доказано, что доля числа ошибок, исправляемых оптимальным кодом, стремится к единице при стремлении длины списка L к бесконечности.

Ключевые слова: дискретный канал без памяти, двоичный симметричный канал, Z-канал, доля исправляемых ошибок, граница выбрасывания, декодирование списком.

DOI: 10.31857/S055529232104001X

§ 1. Введение и обзор результатов

Статья состоит из трех частей. В первой части (§ 2) мы приводим формулировку и вывод теоремы об экспоненциальной границе выбрасывания при декодировании списком фиксированной длины L в общем случае ДКБП с произвольными конечными входным и выходным алфавитами (теорема 1), а также исследуем логарифмическую асимптотику границы выбрасывания (теорема 2). Отметим, что во всех известных нам публикациях других авторов (например, [1–5]), в которых изучались коды со списочным декодированием, постановка задачи списочного декодирования рассматривалась лишь для частных случаев двоичных каналов без памяти.

Во второй части статьи (§ 3) мы применяем построенную в первой части границу выбрасывания к частному случаю ДСК, чтобы для соответствующего *комбинаторного двоичного симметричного канала связи* (BS-канала) получить обозначаемую через $f_{\mathrm{bs}}(L)$ нижнюю границу для максимально возможной доли симметричных ошибок, исправляемых при передаче с нулевой скоростью по BS-каналу, на выходе которого используется декодирование списком длины L. Данная нижняя граница $f_{\mathrm{bs}}(L)$ со ссылкой на неопубликованную рукопись [6] как на первоисточник была ранее приведена в работе [5].

В третьей части статьи (§ 4) мы применяем построенную в первой части границу выбрасывания при декодировании списком фиксированной длины L к важному частному случаю ДКБП, называемому вероятностным Z-каналом, а затем к соответствующему *комбинаторному двоичному асимметричному каналу связи* (Z-каналу), в котором ошибки могут происходить при передаче лишь одного из двух возможных двоичных входных символов.

Основным результатом, установленным в третьей части статьи, является обозначаемая нами через $f_{\mathrm{z}}(w,L)$ нижняя граница для максимально возможной доли асимметричных ошибок, исправляемых при передаче с нулевой скоростью по комбинаторному Z-каналу, на выходе которого используется декодирование списком длины L, а на входном алфавите задано распределение вероятностей $\underline{Q}^* = (1-w, w)$.

При любом натуральном $L \geqslant 1$ и $w \in [0,1]$ нижняя граница $f_{\mathrm{z}}(w,L)$ вычисляется по формуле

$$f_{\mathrm{z}}(w,L) = w(1-w^L).$$

Кроме того, нам удалось оптимизировать найденную величину, т.е. найти $f_{\mathrm{z}}(L) = \max\limits_{w\in[0,1]} f_{\mathrm{z}}(w,L)$ и соответствующую ей $w_{\max}(L)$, а также доказать, что

$$\lim_{L\to+\infty}\Big(\max_{w\in[0,1]} f_{\mathrm{z}}(w,L)\Big) = 1.$$

Приведем таблицу значений величин $w_{\max}(L)$ и $f_{\mathrm{z}}(L)$ при различных значениях $L \geqslant 1$:

L	1	2	3	4	5	10	15	20	25	50
$w_{\max}(L)$	0,5	0,58	0,63	0,67	0,70	0,79	0,83	0,86	0,88	0,92
$f_{\mathrm{z}}(L)$	0,25	0,38	0,47	0,53	0,58	0,72	0,78	0,82	0,84	0,91

Отметим, что в классическом случае $L = 1$ значение нижней границы $f_{\mathrm{z}}(1) = 1/4$ совпадает со значением верхней границы, которая является следствием известной нижней границы вероятности ошибки, называемой границей сферической упаковки [7]. Также полученная граница совпадает с результатами работ [8, 9], в которых были выведены аналогичные оценки и доказана их оптимальность.

§ 2. Обозначения, определения, постановка задачи, формулировка и вывод теоремы о границе выбрасывания при декодировании списком фиксированной длины в общем случае ДКБП, свойства экспоненты границы выбрасывания

Пусть на нашем канале входные и выходные слова – это последовательности длины N из элементов конечных алфавитов:

$\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$ – входное слово, $x_i \in [K]$;

$\underline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_N)$ – выходное слово, $y_i \in [J]$.

Пусть также для этого канала заданы условные вероятности принятия символа $j \in [J]$ при условии отправки символа $k \in [K]$ в канал. Обозначим эти вероятности через $W(k\,|\,j)$.

Вероятность получения слова $\underline{y}$ при передаче слова $\underline{x}$ задается следующим образом:

$$W_N(\underline{y}\,|\,\underline{x}) = \prod_{i=1}^{N} W(y_i\,|\,x_i).$$

Такой канал и называется дискретным каналом без памяти. Обозначим через X_K^N множество всевозможных слов $\underline{x}$ длины N над алфавитом $[K]$, а через Y_J^N – множество всевозможных слов $\underline{y}$ длины N над алфавитом $[J]$, и пусть $\underline{x}^{(1)}, \ldots, \underline{x}^{(M)}$ – фиксированные слова. Напомним, как в таком случае определяется декодирование по максимуму правдоподобия (МП).

Определение 1 (МП-декодирование). При заданном $\underline{y}$ положим $D_{\text{МП}}(\underline{y}) = m$, где $m \in [M]$ – наименьшее среди всех чисел $m' \in [M]$, для которых достигается

$$\max_{m' \in [M]} W_N(\underline{y} \,|\, \underline{x}^{(m')}) = W_N(\underline{y} \,|\, \underline{x}^{(m)}).$$

Таким образом, при МП-декодировании возвращается статистически наиболее вероятное для получения слово $\underline{x}^{(m)}$.

При этом зачастую однозначно восстановить входное слово довольно сложно, поэтому применяется декодирование списком.

Определение 2. Декодирование списком длины L – один из методов декодирования кодов, при котором вместо одного кодового слова декодер возвращает список из L возможных вариантов.

Определение 3. Декодирование списком фиксированного объема считается успешным, если переданный кодовый вектор принадлежит набору L кодовых слов, возвращаемых декодером, в противном случае считается, что произошла ошибка декодирования списком. Условная вероятность ошибки при передаче слова $\underline{x}^{(m)}$ и использовании декодирования списком длины L по методу максимума правдоподобия обозначим через $\mathcal{P}(m, L)$. Определим набор всевозможных L-подмножеств кода, которые не содержат слова $\underline{x}^{(m)}$:

$$X_{m,L} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \left(\underline{x}^{(m_1)}, \ldots, \underline{x}^{(m_L)}\right) : \, m_i \in [M'] \setminus \{m\}, \, m_i \neq m_j, \, \forall i, j \in [L], \, i \neq j \right\}.$$

Тогда условная вероятность ошибки в общем случае может быть записана в виде следующей суммы:

$$\mathcal{P}(m, L) = \sum_{\vec{x} \in X_{m,L}} \mathcal{P}_L(m, \vec{x}),$$

где $\mathcal{P}_L(m, \vec{x})$ – вероятность ошибки при передаче слова $\underline{x}^{(m)}$, декодировании списком длины L и возвращении декодером слов из набора $\vec{x}$. Также определим естественным образом максимальную вероятность ошибки:

$$\mathcal{P}_{\max}(L) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{m \in [M]} \mathcal{P}(m, L).$$

В данной статье мы будем использовать декодирование списком длины L по методу максимума правдоподобия (т.е. декодер будет возвращать L статистически наиболее вероятных для получения слов).

Определение 4. Скорость кода с M кодовыми словами длины N определяется следующим образом:

$$R \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\ln \dfrac{M}{L}}{N} = \frac{\ln M}{N} - \frac{\ln L}{N}. \tag{1}$$

Для обычного декодирования, где $L = 1$, это стандартное определение скорости кода ($M = \exp(RN)$).

Целью § 2 является формулировка и доказательство теоремы о границе выбрасывания при декодировании списком фиксированной длины в общем случае ДКБП с произвольными конечными входным и выходным алфавитами. Для этого зафиксируем распределение вероятностей $\underline{Q} = (Q(1), Q(2), \ldots, Q(K))$ на входном алфавите канала, такое что $\sum\limits_{i=1}^{K} Q(i) = 1$, и введем следующее множество:

$$\mathcal{K} \stackrel{\text{def}}{=} \bigl\{ \underline{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_{L+1}) : \; k_i \in [K], \; i \in [L+1] \bigr\}, \quad |\mathcal{K}| = K^{L+1}.$$

Т е о р е м а 1. *Пусть заданы дискретный канал без памяти с $M' = 2M - 1$ словами длины N и вероятности перехода $W(j\,|\,k)$, $1 \leqslant k \leqslant K$, $1 \leqslant j \leqslant J$. Тогда для любого распределения вероятностей на входном алфавите канала $\underline{Q}$ имеет место следующая экспоненциальная верхняя граница максимальной вероятности ошибки при декодировании списком длины L:*

$$\mathcal{P}_{\max}(L) \leqslant \exp\Biggl\{ -N E_{\text{ex}}^{(L)} \left(R + \frac{(L+1)\ln 2}{LN} + \frac{\ln L}{N}, \underline{Q} \right) \Biggr\}, \tag{2}$$

где для любого $R > 0$ функция $E_{\text{ex}}^{(L)}(R, \underline{Q})$, называемая экспонентой границы выбрасывания, определяется следующим образом:

$$E_{\text{ex}}^{(L)}(R, \underline{Q}) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\rho \geqslant 1} \left\{ -\rho R L + E_x^{(L)}(\rho, \underline{Q}) \right\}, \tag{3}$$

$$E_x^{(L)}(\rho, \underline{Q}) \stackrel{\text{def}}{=} -\rho \ln \left\{ \sum_{\underline{k} \in \mathcal{K}} \prod_{i=1}^{L+1} Q(k_i) \left[\sum_{j=1}^{J} \prod_{\ell=1}^{L+1} W(j\,|\,k_\ell)^{\frac{1}{L+1}} \right]^{\frac{1}{\rho}} \right\}. \tag{4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы разбивается на несколько более простых утверждений, из которых в итоге и следует наша граница.

1. Рассмотрим код с $M = L+1$ словами $\underline{x}^{(1)}, \underline{x}^{(2)}, \ldots, \underline{x}^{(M)}$ и схемой декодирования списком длины L. Определим набор Y_L следующим образом:

$$Y_L = \Bigl\{ \underline{y} \in Y_J^N : \min_{i \in [L+1],\, i \neq 1} W_N(\underline{y}\,|\,\underline{x}^{(i)}) \geqslant W_N(\underline{y}\,|\,\underline{x}^{(1)}) \Bigr\}.$$

Тогда условная вероятность ошибки $\mathcal{P}_L$ при декодировании списком по методу максимума правдоподобия, учитывая, что исходным словом является $\underline{x}^{(1)}$, может быть записана как

$$\mathcal{P}_L = \sum_{\underline{y} \in Y_L} W_N(\underline{y}\,|\,\underline{x}^{(1)}).$$

Л е м м а 1. *Для любого действительного числа $\sigma \geqslant 0$*

$$\mathcal{P}_L \leqslant \sum_{\underline{y} \in Y_J^N} W_N(\underline{y}\,|\,\underline{x}^{(1)})^{1 - L\sigma} \prod_{i=2}^{L+1} W_N(\underline{y}\,|\,\underline{x}^{(i)})^{\sigma}. \tag{5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что по определению множества Y_L получаем, что $\forall \underline{y} \in Y_L$ и $i \in [L+1]$, $i \neq 1$, верно неравенство $W_N(\underline{y}\,|\,\underline{x}^{(i)}) \geqslant W_N(\underline{y}\,|\,\underline{x}^{(1)})$. Тогда для любого числа $\sigma > 0$ получаем, что

$$\left(\frac{W_N(\underline{y}\,|\,\underline{x}^{(i)})}{W_N(\underline{y}\,|\,\underline{x}^{(1)})} \right)^{\sigma} \geqslant 1$$

и соответственно

$$\prod_{i=2}^{L+1}\left(\frac{W_N(\underline{y}\,|\,\underline{x}^{(i)})}{W_N(\underline{y}\,|\,\underline{x}^{(1)})}\right)^{\sigma} \geqslant 1.$$

Тогда справедлива следующая цепочка преобразований:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_L &= \sum_{\underline{y}\in Y_L} W_N(\underline{y}\,|\,\underline{x}^{(1)}) \leqslant \sum_{\underline{y}\in Y_L} W_N(\underline{y}\,|\,\underline{x}^{(1)}) \prod_{i=2}^{L+1}\left(\frac{W_N(\underline{y}\,|\,\underline{x}^{(i)})}{W_N(\underline{y}\,|\,\underline{x}^{(1)})}\right)^{\sigma} \leqslant \\
&\leqslant \sum_{\underline{y}\in Y_J^N} W_N(\underline{y}\,|\,\underline{x}^{(1)}) \prod_{i=2}^{L+1}\left(\frac{W_N(\underline{y}\,|\,\underline{x}^{(i)})}{W_N(\underline{y}\,|\,\underline{x}^{(1)})}\right)^{\sigma} = \\
&= \sum_{\underline{y}\in Y_J^N} W_N(\underline{y}\,|\,\underline{x}^{(1)})^{1-L\sigma} \prod_{i=2}^{L+1} W_N(\underline{y}\,|\,\underline{x}^{(i)})^{\sigma}.
\end{aligned}$$

Последнее равенство завершает доказательство леммы. ▲

Отметим, что эта граница формулируется только в терминах заданных переходных вероятностей. Более того, суммирование в правой части идет по всем возможным выходным словам $\underline{y}$ длины N в отличие от определения условной вероятности ошибки при декодировании списком по методу максимального правдоподобия, где суммирование идет только по $\underline{y}$ из Y_L.

2. Рассмотрим ансамбль кодов с независимыми и одинаково распределенными словами, число которых равно $M' = 2M - 1$, и имеющих распределение $\underline{Q}_N(\underline{x})$, $\underline{x} \in X_K^N$. Для $m \in [M']$ и $L \in [M'-1]$ согласно определению 3 обозначим через $\mathcal{P}(m,L)$ случайную величину в ансамбле, равную вероятности ошибки при передаче слова $\underline{x}^{(m)}$ и использовании декодирования списком по методу максимума правдоподобия. Отметим, что случайные величины $\mathcal{P}(m,L)$ при $m \in [M']$ имеют одинаковое распределение.

Пусть $s > 0$ – действительное число. Среднюю по ансамблю кодов с M' словами вероятность ошибки $\mathcal{P}(m,L)$ в степени s будем обозначать через $\mathbf{M}_{\underline{Q}}[\mathcal{P}^s(m,L)]$. Эта величина равна математическому ожиданию $\mathcal{P}^s(m,L)$ по ансамблю, т.е.

$$\begin{aligned}
&\mathbf{M}_{\underline{Q}}[\mathcal{P}^s(m,L)] = \\
&= \sum_{\underline{z}^{(1)},\ldots,\underline{z}^{(M')}\in X_K^N} \prod_{r=1}^{M'} \underline{Q}_N(\underline{z}^{(r)}) \mathbf{M}\big[\mathcal{P}^s(m,L) \mid \underline{x}^{(1)} = \underline{z}^{(1)},\ \ldots,\ \underline{x}^{(M')} = \underline{z}^{(M')}\big].
\end{aligned}$$

Отметим, что величина $\mathbf{M}_{\underline{Q}}[\mathcal{P}^s(m,L)]$ равна некоторому действительному значению при фиксированных L и $\underline{Q}$ и не зависит от m.

Лемма 2. *Для рассматриваемого ансамбля кодов существует хотя бы один подкод с M словами $\underline{\widetilde{x}}^{(1)}, \underline{\widetilde{x}}^{(2)}, \ldots, \underline{\widetilde{x}}^{(M)}$, а также метод декодирования списком длины L этого кода, такой что для любого $m \in [M]$ и любого $s > 0$ условная вероятность ошибочного декодирования $\widetilde{\mathcal{P}}(m,L)$ при передаче слова $\underline{\widetilde{x}}^{(m)}$ удовлетворяет неравенству*

$$\widetilde{\mathcal{P}}(m,L) < \big(2\mathbf{M}_{\underline{Q}}[\mathcal{P}^s(m,L)]\big)^{\frac{1}{s}}, \tag{6}$$

где среднее значение $\mathbf{M}_{\underline{Q}}[\mathcal{P}^s(m,L)]$ не зависит от выбора значения $m \in [M']$.

Доказательство. Напомним известное следствие из неравенства Маркова для неотрицательной случайной величины с конечным математическим ожиданием:

$$\Pr(\eta \geqslant 2\mathbf{M}\eta) \leqslant \frac{1}{2}.$$

В качестве случайной величины $\eta = \mathcal{P}^s(m, L)$ возьмем случайную величину в ансамбле, равную s-й степени вероятности ошибки при передаче слова $\underline{x}^{(m)}$ и использовании декодирования списком по методу максимума правдоподобия. Тогда можно использовать следствие неравенства Маркова для случайной величины η:

$$\Pr\Big(\mathcal{P}^s(m, L) \geqslant 2\mathbf{M}_{\underline{Q}}[\mathcal{P}^s(m, L)]\Big) \leqslant \frac{1}{2},$$

или

$$\Pr\Big(\mathcal{P}(m, L) < 2^{\frac{1}{s}}\left(\mathbf{M}_{\underline{Q}}[\mathcal{P}^s(m, L)]\right)^{\frac{1}{s}}\Big) \geqslant \frac{1}{2}.$$

Последнее неравенство означает, что по крайней мере для половины слов $(\frac{M'}{2})$ кода выполняется неравенство, вероятность которого мы оценили.

Другими словами, последнее неравенство означает, что существуют подкод с M кодовыми словами $\widetilde{\underline{x}}^{(1)}, \widetilde{\underline{x}}^{(2)}, \ldots, \widetilde{\underline{x}}^{(M)}$ и схема декодирования списком по методу максимума правдоподобия, где размер списка ограничен величиной L, такие что для любого переданного слова $\widetilde{\underline{x}}^{(m)}$, где $m \in [M]$, условная вероятность ошибки декодирования $\widetilde{\mathcal{P}}(m, L)$ удовлетворяет следующему неравенству для любого $s > 0$:

$$\widetilde{\mathcal{P}}(m, L) < \left(2\mathbf{M}_{\underline{Q}}[\mathcal{P}^s(m, L)]\right)^{\frac{1}{s}}. \quad \blacktriangle$$

3. Нашей следующей целью будет получение верхней границы средней вероятности ошибки. Мы рассматриваем ансамбль кодов с $M' = 2M - 1$ независимыми и одинаково распределенными словами. Пусть они имеют распределение $\underline{Q}_N(\underline{x})$. Также мы определили (см. определение 3) набор всевозможных L-подмножеств кода, не содержащих слова $\underline{x}^{(m)}$:

$$X_{m,L} = \Big\{\left(\underline{x}^{(m_1)}, \ldots, \underline{x}^{(m_L)}\right) : \ m_i \in [M'] \setminus \{m\},\ m_i \neq m_j,\ \forall i, j \in [L],\ i \neq j\Big\}.$$

Заметим, что количество таких L-подмножеств кода равно $\binom{M'-1}{L}$, так как мы выбираем L слов из всех (всего их M'), кроме $\underline{x}^{(m)}$.

Лемма 3. *Для ансамбля кодов с независимыми и одинаково распределенными словами, число которых равно $M' = 2M - 1$, с распределением $\underline{Q}_N(\underline{x})$ и для любого $0 < s \leqslant 1$ имеет место следующая оценка*:

$$\mathcal{P}^s(m, L) \leqslant \sum_{\vec{x} \in X_{m,L}} \left[\sum_{\underline{y} \in Y_J^N} W_N(\underline{y} \,|\, \underline{x}^{(m)})^{1 - L\sigma} \left(\prod_{i=1}^{L} W_N(\underline{y} \,|\, \underline{x}^{(m_i)})\right)^{\sigma}\right]^s, \qquad (7)$$

Более того, усредняя эту границу по ансамблю, мы получаем верхнюю границу средней вероятности ошибки:

$$\mathbf{M}_{\underline{Q}}[\mathcal{P}^s(m, L)] \leqslant$$
$$\leqslant [2(M-1)]^L \sum_{\underline{z}^{(1)}, \ldots, \underline{z}^{(L+1)} \in X_K^N} \prod_{i=1}^{L+1} \underline{Q}_N(\underline{z}^{(i)}) \left[\sum_{\underline{y} \in Y_J^N} \prod_{i=1}^{L+1} W_N(\underline{y} \,|\, \underline{z}^{(i)})^{\frac{1}{1+L}}\right]^s, \qquad (8)$$

где суммирование в правой части идет по всем $(L+1)$-подмножествам слов из множества с M' словами.

Доказательство. а) Выберем L слов из ансамбля с $M'-1 = 2M-2$ словами (т.е. выберем элемент $\vec{x} \in X_{m,L}$) и добавим к ним слово $\underline{x}^{(m)}$. Так мы получим подкод из $L+1$ слова, и будем рассматривать ошибку при передаче одного из этих слов (слова $\underline{x}^{(m)}$). Таким образом, мы попадем в условие леммы 1, и получим верхнюю границу вероятности ошибки декодирования списком по методу максимума правдоподобия при передаче слова $\underline{x}^{(m)}$ из $L+1$ данных (обозначаемую в определении 3 через $\mathcal{P}_L(m,\vec{x})$). Далее, согласно определению 3 вероятность ошибки при передаче слова $\underline{x}^{(m)}$ из M' данных может быть записана в виде следующей суммы:

$$\mathcal{P}(m,L) = \sum_{\vec{x} \in X_{m,L}} \mathcal{P}_L(m,\vec{x}).$$

Применим известное неравенство: для любого $0 < s \leqslant 1$

$$\left(\sum_{i \in \mathcal{I}} a_i\right)^s \leqslant \sum_{i \in \mathcal{I}} a_i^s,$$

где мы берем множество $X_{m,L}$ в качестве множества суммирования $\mathcal{I}$, а вероятность ошибки $\mathcal{P}_L(m,\vec{x})$ в качестве слагаемых a_i. Тогда получаем, что

$$\mathcal{P}^s(m,L) \leqslant \sum_{\vec{x} \in X_{m,L}} \mathcal{P}_L^s(m,\vec{x}) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{\vec{x} \in X_{m,L}} \left[\sum_{\underline{y} \in Y_J^N} W_N(\underline{y} \,|\, \underline{x}^{(m)})^{1-L\sigma} \left(\prod_{i=1}^{L} W_N(\underline{y} \,|\, \underline{x}^{(m_i)})\right)^{\sigma}\right]^s.$$

Представленная цепочка неравенств завершает доказательство первого утверждения леммы 3.

б) Теперь усредним верхнюю границу условной вероятности ошибки при передаче слова $\underline{x}^{(m)}$ по ансамблю. Мы определяем среднюю вероятность ошибки как математическое ожидание $\mathcal{P}(m,L)$. По определению математического ожидания для дискретной случайной величины и первому утверждению леммы (при $\sigma = \dfrac{1}{1+L}$ и $1 - L\sigma = \sigma$)

$$\mathbf{M}_{\underline{Q}}[\mathcal{P}^s(m,L)] \leqslant$$
$$\leqslant \binom{M'-1}{L} \sum_{\underline{z}^{(1)},\ldots,\underline{z}^{(L+1)} \in X_K^N} \prod_{i=1}^{L+1} \underline{Q}_N(\underline{z}^{(i)}) \left[\sum_{\underline{y} \in Y_J^N} \prod_{\ell=1}^{L+1} W_N(\underline{y} \,|\, \underline{z}^{(\ell)})^{\frac{1}{1+L}}\right]^s.$$

Первый множитель равен мощности множества $X_{m,L}$ (количеству вариантов выбрать L слов из набора $M'-1$ слова), а дальнейшая сумма включает вероятность выбора множества из $L+1$ слов (элемента $\vec{x} \in X_{m,L}$ и вектора $\underline{x}^{(m)}$) с распределением $\underline{Q}_N(\underline{x})$ и соответствующие границы вероятности ошибки. Затем, воспользовавшись известным свойством биномиальных коэффициентов ($\binom{n}{m} \leqslant n^m$), можно получить, что

$$\mathbf{M}_{\underline{Q}}[\mathcal{P}^s(m,L)] \leqslant$$
$$\leqslant [2(M-1)]^L \sum_{\underline{z}^{(1)},\ldots,\underline{z}^{(L+1)} \in X_K^N} \prod_{i=1}^{L+1} \underline{Q}_N(\underline{z}^{(i)}) \left[\sum_{\underline{y} \in Y_J^N} \prod_{\ell=1}^{L+1} W_N(\underline{y} \,|\, \underline{z}^{(\ell)})^{\frac{1}{1+L}}\right]^s,$$

что завершает доказательство леммы 3. ▲

4. Далее покажем, что из лемм 2 и 3 вытекает справедливость теоремы 1. Рассмотрим канал без памяти, т.е. канал, для которого

$$\underline{Q}_N(\underline{x}) = \prod_{i=1}^{N} Q(x_i),$$

где $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_N)$ – исходное слово, а $\underline{Q} = (Q(1), Q(2), \ldots, Q(K))$ – заданное распределение вероятностей на входном алфавите канала. Определим теперь максимальную вероятность ошибки следующим естественным образом. Из определения 3 имеем

$$\mathcal{P}_{\max}(L) = \max_{m\in[M]} \widetilde{\mathcal{P}}(m, L).$$

Из оценки в лемме 2 следует, что верно следующее неравенство:

$$\mathcal{P}_{\max}(L) \leqslant \left(2\mathbf{M}_{\underline{Q}}[\mathcal{P}^s(m, L)]\right)^{\frac{1}{s}}.$$

Мы рассматриваем канал без памяти и можем использовать верхнюю границу средней вероятности ошибки из леммы 3 для этого канала, полагая $\rho = \dfrac{1}{s}$ при $\rho \geqslant 1$:

$$\mathcal{P}_{\max}(L) \leqslant \left(2^{L+1}(M-1)^L\right)^{\rho} \times$$
$$\times \left(\sum_{\underline{z}^{(1)},\ldots,\underline{z}^{(L+1)}\in X_K^N} \prod_{i=1}^{L+1} \underline{Q}_N(\underline{z}^{(i)}) \left[\sum_{\underline{y}\in Y_J^N} \prod_{\ell=1}^{L+1} W_N(\underline{y}\,|\,\underline{z}^{(\ell)})^{\frac{1}{1+L}} \right]^{\frac{1}{\rho}} \right)^{\rho}.$$

Напомним обозначение $\mathcal{K} = \{\underline{k} = (k_1, k_2 \ldots, k_{L+1}) : k_i \in [K], i \in [L+1]\}$. Рассмотрим следующую цепочку преобразований:

$$\sum_{\underline{z}^{(1)},\ldots,\underline{z}^{(L+1)}\in X_K^N} \prod_{i=1}^{L+1} \underline{Q}_N(\underline{z}^{(i)}) \left[\sum_{\underline{y}\in Y_J^N} \prod_{\ell=1}^{L+1} W_N(\underline{y}\,|\,\underline{z}^{(\ell)})^{\frac{1}{1+L}} \right]^{\frac{1}{\rho}} =$$
$$= \sum_{z_1^{(1)},\ldots,z_N^{(1)}\in[K]} \cdots \sum_{z_1^{(L+1)},\ldots,z_N^{(L+1)}\in[K]} \prod_{i=1}^{L+1} \prod_{v=1}^{N} Q(z_v^{(i)}) \times$$
$$\times \left[\sum_{y_1,\ldots,y_N\in[J]} \prod_{\ell=1}^{L+1} \prod_{s=1}^{N} W(y_s\,|\,z_s^{(\ell)})^{\frac{1}{1+L}} \right]^{\frac{1}{\rho}} =$$
$$= \sum_{\underline{k}^{(1)}\in\mathcal{K}} \prod_{i_1=1}^{L+1} Q(k_{i_1}^{(1)}) \left[\sum_{j_1=1}^{J} \prod_{\ell_1=1}^{L+1} W(j_1\,|\,k_{\ell_1}^{(N)})^{\frac{1}{1+L}} \right]^{\frac{1}{\rho}} \times \ldots \times$$
$$\times \sum_{\underline{k}^{(N)}\in\mathcal{K}} \prod_{i_N=1}^{L+1} Q(k_{i_N}^{(N)}) \left[\sum_{j_N=1}^{J} \prod_{\ell_N=1}^{L+1} W(j_N\,|\,k_{\ell_N}^{(N)})^{\frac{1}{1+L}} \right]^{\frac{1}{\rho}} =$$
$$= \left\{ \sum_{\underline{k}\in\mathcal{K}} \prod_{i=1}^{L+1} Q(k_i) \left[\sum_{j=1}^{J} \prod_{\ell=1}^{L+1} W(j\,|\,k_\ell)^{\frac{1}{1+L}} \right]^{\frac{1}{\rho}} \right\}^{N}.$$

Следовательно,

$$\mathcal{P}_{\max}(L) \leqslant \left(2^{L+1}(M-1)^L\right)^\rho \left\{ \sum_{\underline{k}\in\mathcal{K}} \prod_{i=1}^{L+1} Q(k_i) \left[\sum_{j=1}^{J} \prod_{\ell=1}^{L+1} W(j\,|\,k_\ell)^{\frac{1}{1+L}} \right]^{\frac{1}{\rho}} \right\}^{\rho N}. \qquad (9)$$

Остается понять, почему границы (2) и (9) эквивалентны. Для этого рассмотрим и преобразуем следующее выражение:

$$\exp\left\{-N\left(-\rho L\left(R+\frac{(L+1)\ln 2}{LN}+\frac{\ln L}{N}\right)\right)\right\} = \exp\{\rho LRN + \rho(L+1)\ln 2 +$$
$$+\rho L\ln L\} = (\exp\{RN\})^{\rho L}(\exp\{\ln 2\})^{\rho(L+1)}(\exp\{\ln L\})^{\rho L} =$$
$$=\Big(\frac{M}{L}\Big)^{\rho L} 2^{\rho(L+1)} L^{\rho L} = M^{\rho L}2^{\rho(L+1)} \geqslant (M-1)^{\rho L}2^{\rho(L+1)} =$$
$$=(2^{L+1}(M-1)^L)^\rho,$$

где мы используем тот факт, что $\exp\{RN\} = \dfrac{M}{L}$ для декодирования списком длины L. Таким образом, первый член в $E_{\rm ex}^{(L)}(R,\underline{Q})$ в экспоненциальной границе (2) соответствует первым двум множителям в границе (9).

Из определения $E_x^{(L)}(\rho,\underline{Q})$ также следует, что выражение $\exp\{-NE_x^{(L)}(\rho,\underline{Q})\}$ в экспоненциальной границе (2) соответствует коэффициенту в фигурных скобках в границе (9). Из описанных рассуждений следует справедливость теоремы, и мы получаем верхнюю границу максимальной вероятности ошибки при использовании декодирования списком по методу максимума правдоподобия. Теорема 1 полностью доказана. ▲

Замечание. В частном случае $L{=}1$ имеет место следующее неравенство (см. [7, с. 170]):

$$E_{\rm ex}^{(1)}(R,\underline{Q}) \geqslant E_{\rm ran}^{(1)}(R,\underline{Q}),$$

где

$$E_{\rm ran}^{(1)}(R,\underline{Q}) \stackrel{\rm def}{=} \max_{0\leqslant\rho\leqslant 1}\{-\rho R + E_0(\rho,\underline{Q})\}$$

– показатель экспоненты средней по $\underline{Q}$-ансамблю вероятности ошибки при классическом МП-декодировании, когда длина списка $L=1$, а

$$E_0(\rho,\underline{Q}) \stackrel{\rm def}{=} -\ln\left\{\sum_{j=1}^{J}\left(\sum_{k=1}^{K} Q(k)W(j\,|\,k)^{\frac{1}{\rho+1}}\right)^{\rho+1}\right\}$$

– функция Галлагера для ДКБП параметра $\rho\geqslant 0$.

Открытой задачей остается доказательство (или опровержение) обобщения этого неравенства на случай произвольного $L\geqslant 2$, т.е. надо доказать или найти противоречащий пример ДКБП для выполнения неравенства

$$E_{\rm ex}^{(L)}(R,\underline{Q}) \geqslant E_{\rm ran}^{(L)}(R,\underline{Q}),$$

где функция скорости передачи имеет вид

$$E_{\rm ran}^{(L)}(R,\underline{Q}) \stackrel{\rm def}{=} \max_{0\leqslant\rho\leqslant L}\{-\rho R + E_0(\rho,\underline{Q})\}.$$

В частном случае нулевой скорости передачи ($R = 0$) неравенство $E_{\text{ex}}^{(L)}(0, \underline{Q}) \geqslant \geqslant E_{\text{ran}}^{(L)}(0, \underline{Q})$ будет доказано в п. 2 теоремы 2. Решение представленной задачи в общем виде принципиально важно, поскольку в работе [9] было показано, что правая часть предыдущего равенства для любого фиксированного распределения вероятностей Q на входе ДКБП задает точную экспоненту средней по ансамблю вероятности ошибки при декодировании списком длины L.

Опишем свойства полученной в теореме 1 экспоненты границы выбрасывания.

Т е о р е м а 2. *Имеют место следующие свойства экспоненты границы выбрасывания*:

1. $E_x^{(L)}(\rho, \underline{Q})$ *является неубывающей функцией параметра* ρ;
2. $E_x^{(L)}(1, \underline{Q}) = E_0(L, \underline{Q})$. *Более того, при нулевой скорости передачи имеет место неравенство*

$$E_{\text{ran}}^{(L)}(0, \underline{Q}) = \max_{0 \leqslant \rho \leqslant L} \{E_0(\rho, \underline{Q})\} \leqslant \sup_{\rho \geqslant 1} \{E_x^{(L)}(\rho, \underline{Q})\} = E_{\text{ex}}^{(L)}(0, \underline{Q});$$

3. $E_{\text{ex}}^{(L)}(R, \underline{Q})$ *принимает бесконечные значения в следующем диапазоне скоростей*:

$$0 < R < \lim_{\rho \to +\infty} \frac{E_x^{(L)}(\rho, \underline{Q})}{\rho L};$$

4. $R_{x,\infty}^{(L)}(\underline{Q}) \stackrel{\text{def}}{=} \lim\limits_{\rho \to +\infty} \frac{E_x^{(L)}(\rho, \underline{Q})}{\rho} = -\ln \left[\sum\limits_{\underline{k} \in \mathcal{K}} \prod\limits_{i=1}^{L+1} Q(k_i) \varphi(\underline{k}) \right]$, *где*

$$\varphi(\underline{k}) = \varphi(k_1, \ldots, k_{L+1}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & \textit{если } \sum\limits_{j=1}^{J} \prod\limits_{i=1}^{L+1} W(j \,|\, k_i) \neq 0, \\ 0 & \textit{в остальных случаях}; \end{cases}$$

5. $E_{\text{ex}}^{(L)}(0, \underline{Q}) = \lim\limits_{R \to 0} E_{\text{ex}}^{(L)}(R, \underline{Q}) = \lim\limits_{\rho \to +\infty} E_x^{(L)}(\rho, \underline{Q})$;
6. *Пусть* $\varphi(\underline{k}) = 1$ *для любого* $\underline{k} \in \mathcal{K}$. *Тогда*

$$E_{\text{ex}}^{(L)}(0, \underline{Q}) = -\sum_{\underline{k} \in \mathcal{K}} \prod_{i=1}^{L+1} Q(k_i) \ln \left[\sum_{j=1}^{J} \prod_{\ell=1}^{L+1} W(j \,|\, k_\ell)^{\frac{1}{L+1}} \right].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пункт 1 можно доказать с использованием неравенства

$$\sum_k \left(A_k B_k^{\frac{1}{s}}\right)^s \geqslant \sum_k \left(A_k B_k^{\frac{1}{r}}\right)^r,$$

справедливого при $0 < s \leqslant r$ и $|A_k| \leqslant 1$. Подставим $\prod\limits_{i=1}^{L+1} Q(k_i)$ из определения $E_x^{(L)}(\rho, \underline{Q})$ вместо величин A_k из неравенства, величины $\sum\limits_{j=1}^{J} \prod\limits_{i=1}^{L+1} W(j \,|\, k_i)^{\frac{1}{L+1}}$ подставим вместо величин B_k из неравенства, и затем применим к обеим частям неравенства функцию $-\ln x$. Такое преобразование известного неравенства и даст утверждение о монотонности функции $E_x^{(L)}(\rho, \underline{Q})$. Пункт 1 теоремы доказан.

2. Вычислим значение $E_x^{(L)}(\rho, \underline{Q})$ при $\rho = 1$:

$$E_x^{(L)}(1, \underline{Q}) = -\ln\left\{\sum_{\underline{k}\in\mathcal{K}} \sum_{j=1}^{J} \prod_{i=1}^{L+1} \left(Q(k_i)W(j\,|\,k_i)^{\frac{1}{L+1}}\right)\right\} =$$

$$= -\ln\left\{\sum_{j=1}^{J}\left(\sum_{k=1}^{K} Q(k)W(j\,|\,k)^{\frac{1}{L+1}}\right)^{L+1}\right\} = E_0(L, \underline{Q}).$$

В сделанных преобразованиях величины $E_x^{(L)}(1, \underline{Q})$ стоит обосновать второе равенство. Его проще понять, двигаясь по равенству справа налево: при возведении суммы в степень $L+1$ мы умножаем сумму по k на саму себя $L+1$ раз. При этом умножении из каждой суммы мы выбираем по одному слагаемому, и каждый такой выбор соответствует некоторому элементу $\underline{k} \in \mathcal{K}$, т.е. при возведении суммы в степень мы получаем сумму по всевозможным $\underline{k} \in \mathcal{K}$ произведений $L+1$ элемента, как в левой части рассматриваемого равенства.

Для доказательства неравенства из п. 2 теоремы воспользуемся свойствами монотонности по параметру ρ функции Галлагера $E_0(\rho, \underline{Q})$ и функции $E_x^{(L)}(\rho, \underline{Q})$ (из п. 1). Тогда получаем, что

$$\max_{0\leqslant\rho\leqslant L}\{E_0(\rho, \underline{Q})\} = E_0(L, \underline{Q}) = E_x^{(L)}(1, \underline{Q}) \leqslant \sup_{\rho\geqslant 1}\big\{E_x^{(L)}(\rho, \underline{Q})\big\}.$$

Второй пункт теоремы полностью доказан.

3. Для доказательства п. 3 теоремы рассмотрим выражение $-\rho RL + E_x^{(L)}(\rho, \underline{Q}) = F(R)$ как линейную функцию от R с наклоном $-\rho$ при $\rho \geqslant 1$. Координата пересечения такой функции с осью абсцисс равна

$$\frac{E_x^{(L)}(\rho, \underline{Q})}{\rho L}.$$

Следовательно, при $\rho \to +\infty$ наша функция имеет вертикальную асимптоту (коэффициент наклона линейной функции стремится к $-\infty$, а сама наклонная прямая стремится к вертикальной прямой, проходящей через абсциссу пересечения функции $F(R)$ с осью абсцисс):

$$R = \lim_{\rho\to+\infty} \frac{E_x^{(L)}(\rho, \underline{Q})}{\rho L}.$$

А тогда по определению $E_{\mathrm{ex}}^{L}(R, \underline{Q}) = \sup\limits_{\rho\geqslant 1}\big\{-\rho RL + E_x^{(L)}(\rho, \underline{Q})\big\}$ принимает бесконечные значения при

$$0 < R < \lim_{\rho\to+\infty} \frac{E_x^{(L)}(\rho, \underline{Q})}{\rho L}.$$

Пункт 3 доказан.

4. Для нахождения предела из п. 4 теоремы введем следующие обозначения:

$$A_{\underline{k}} = \prod_{i=1}^{L+1} Q(k_i), \quad B_{\underline{k}} = \sum_{j=1}^{J}\prod_{i=1}^{L+1} W(j\,|\,k_i)^{\frac{1}{L+1}}.$$

Тогда

$$E_x^{(L)}(\rho,\underline{Q}) = -\rho\ln\left(\sum_{\underline{k}\in\mathcal{K}} A_{\underline{k}} B_{\underline{k}}^{\frac{1}{\rho}}\right).$$

Перепишем искомый предел в новых обозначениях и сократим числитель и знаменатель на ρ:

$$R_{x,\infty}^{(L)}(\underline{Q}) = \lim_{\rho\to+\infty}\frac{E_x^{(L)}(\rho,\underline{Q})}{\rho} = \lim_{\rho\to+\infty}\frac{-\rho\ln\left(\sum\limits_{\underline{k}\in\mathcal{K}} A_{\underline{k}} B_{\underline{k}}^{\frac{1}{\rho}}\right)}{\rho} =$$

$$= \lim_{\rho\to+\infty}\frac{-\ln\left(\sum\limits_{\underline{k}\in\mathcal{K}} A_{\underline{k}} B_{\underline{k}}^{\frac{1}{\rho}}\right)}{1} = \lim_{\rho\to+\infty}\left(-\ln\left(\sum_{\underline{k}\in\mathcal{K}} A_{\underline{k}} B_{\underline{k}}^{\frac{1}{\rho}}\right)\right).$$

Далее заметим, что

$$\lim_{\rho\to+\infty} B_{\underline{k}}^{\frac{1}{\rho}} = \varphi(\underline{k}) = \begin{cases}1, & \text{если } B_{\underline{k}}\neq 0,\\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Из этого замечания и следует, что

$$R_{x,\infty}^{(L)}(\underline{Q}) = -\ln\left[\sum_{\underline{k}\in\mathcal{K}}\prod_{i=1}^{L+1} Q(k_i)\varphi(\underline{k})\right],$$

где

$$\varphi(\underline{k}) = \varphi(k_1,\ldots,k_{L+1}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases}1, & \text{если } \sum\limits_{j=1}^{J}\prod\limits_{i=1}^{L+1} W(j\,|\,k_i)\neq 0,\\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Пункт 4 доказан.

5. По определению

$$E_{\text{ex}}^{(L)}(R,\underline{Q}) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\rho\geqslant 1}\left\{-\rho RL + E_x^{(L)}(\rho,\underline{Q})\right\} \leqslant \sup_{\rho\geqslant 1}\left\{E_x^{(L)}(\rho,\underline{Q})\right\} = \lim_{\rho\to+\infty} E_x^{(L)}(\rho,\underline{Q}),$$

где последнее равенство вытекает из того, что функция $E_x^{(L)}(\rho,\underline{Q})$ является неубывающей. Таким образом, получаем, что

$$E_{\text{ex}}^{(L)}(R,\underline{Q}) \leqslant \lim_{\rho\to+\infty} E_x^{(L)}(\rho,\underline{Q})$$

при всех R. Если $\lim\limits_{\rho\to+\infty} E_x^{(L)}(\rho,\underline{Q})$ конечен, то для любого малого $\varepsilon>0$ найдется такое ρ, что

$$E_x^{(L)}(\rho,\underline{Q}) \geqslant \lim_{\rho\to+\infty} E_x^{(L)}(\rho,\underline{Q}) - \varepsilon.$$

Тогда для достаточно малых R также будет выполнено неравенство

$$E_x^{(L)}(\rho,\underline{Q}) - \rho RL \geqslant \lim_{\rho\to+\infty} E_x^{(L)}(\rho,\underline{Q}) - \varepsilon.$$

Следовательно, при достаточно малых R имеет место двойное неравенство

$$\lim_{\rho\to+\infty} E_x^{(L)}(\rho,\underline{Q}) \geqslant E_{\text{ex}}^{(L)}(R,\underline{Q}) \geqslant \lim_{\rho\to+\infty} E_x^{(L)}(\rho,\underline{Q}) - \varepsilon.$$

Отсюда и следует необходимое нам равенство пределов

$$\lim_{R\to 0} E_{\mathrm{ex}}^{(L)}(R,\underline{Q}) = \lim_{\rho\to+\infty} E_x^{(L)}(\rho,\underline{Q}).$$

Пункт 5 доказан.

6. В предыдущем пункте теоремы мы доказали, что

$$E_{\mathrm{ex}}^{(L)}(0,\underline{Q}) = \lim_{R\to 0} E_{\mathrm{ex}}^{(L)}(R,\underline{Q}) = \lim_{\rho\to+\infty} E_x^{(L)}(\rho,\underline{Q}).$$

Для доказательства данного пункта, т.е. поиска предела

$$\lim_{\rho\to+\infty} E_x^{(L)}(\rho,\underline{Q}) = \lim_{\rho\to+\infty} -\rho\ln\left\{\sum_{\underline{k}\in\mathcal{K}}\prod_{i=1}^{L+1} Q(k_i)\left[\sum_{j=1}^{J}\prod_{\ell=1}^{L+1} W(j\,|\,k_\ell)^{\frac{1}{L+1}}\right]^{\frac{1}{\rho}}\right\},$$

сделаем замену $\rho = \dfrac{1}{\sigma}$ и рассмотрим предел

$$\lim_{\sigma\to 0}\frac{-\ln\left\{\sum\limits_{\underline{k}\in\mathcal{K}}\prod\limits_{i=1}^{L+1} Q(k_i)\left[\sum\limits_{j=1}^{J}\prod\limits_{\ell=1}^{L+1} W(j\,|\,k_\ell)^{\frac{1}{L+1}}\right]^{\sigma}\right\}}{\sigma},$$

который и будет в точности равен $E_{\mathrm{ex}}^{(L)}(0,\underline{Q})$.

Для нахождения этого предела воспользуемся правилом Лопиталя. Для этого найдем (и обозначим через γ) следующую производную:

$$\gamma \overset{\mathrm{def}}{=} \left(-\ln\left\{\sum_{\underline{k}\in\mathcal{K}}\prod_{i=1}^{L+1} Q(k_i)\left[\sum_{j=1}^{J}\prod_{\ell=1}^{L+1} W(j\,|\,k_\ell)^{\frac{1}{L+1}}\right]^{\sigma}\right\}\right)'_{\sigma} =$$

$$= -\frac{1}{\sum\limits_{\underline{k}\in\mathcal{K}}\prod\limits_{i=1}^{L+1} Q(k_i)\left[\sum\limits_{j=1}^{J}\prod\limits_{\ell=1}^{L+1} W(j\,|\,k_\ell)^{\frac{1}{L+1}}\right]^{\sigma}}\times$$

$$\times\left(\sum_{\underline{k}\in\mathcal{K}}\prod_{i=1}^{L+1} Q(k_i)\left[\sum_{j=1}^{J}\prod_{\ell=1}^{L+1} W(j\,|\,k_\ell)^{\frac{1}{L+1}}\right]^{\sigma}\ln\left[\sum_{j=1}^{J}\prod_{\ell=1}^{L+1} W(j\,|\,k_\ell)^{\frac{1}{L+1}}\right]\right).$$

Теперь найдем предел этой величины при $\sigma\to 0$:

$$\lim_{\sigma\to 0}\gamma = -\frac{1}{\sum\limits_{\underline{k}\in\mathcal{K}}\prod\limits_{i=1}^{L+1} Q(k_i)\varphi(\underline{k})}\left(\sum_{\underline{k}\in\mathcal{K}}\prod_{i=1}^{L+1} Q(k_i)\varphi(\underline{k})\ln\left[\sum_{j=1}^{J}\prod_{\ell=1}^{L+1} W(j\,|\,k_\ell)^{\frac{1}{L+1}}\right]\right).$$

В силу условия $\varphi(\underline{k}) = 1$ для всех $\underline{k}\in\mathcal{K}$ получаем, что

$$\lim_{\sigma\to 0}\gamma = -\frac{1}{\sum\limits_{\underline{k}\in\mathcal{K}}\prod\limits_{i=1}^{L+1} Q(k_i)}\left(\sum_{\underline{k}\in\mathcal{K}}\prod_{i=1}^{L+1} Q(k_i)\ln\left[\sum_{j=1}^{J}\prod_{\ell=1}^{L+1} W(j\,|\,k_\ell)^{\frac{1}{L+1}}\right]\right).$$

Далее отметим тот факт, что $\sum\limits_{\underline{k}\in\mathcal{K}}\prod\limits_{i=1}^{L+1} Q(k_i) = 1$, так как это сумма по всевозможным элементам $\mathcal{K}$ вероятностей получить эти элементы, а вероятность наступления событий, образующих полную группу, равна единице. Тогда получаем

$$\lim_{\sigma\to 0}\gamma = -\sum_{\underline{k}\in\mathcal{K}}\prod_{i=1}^{L+1} Q(k_i)\ln\left[\sum_{j=1}^{J}\prod_{\ell=1}^{L+1} W(j\,|\,k_\ell)^{\frac{1}{L+1}}\right].$$

Теперь можно перейти уже к нахождению величины $E_{\rm ex}^{(L)}(0,\underline{Q})$. Напомним, что предел мы считаем по правилу Лопиталя:

$$E_{\rm ex}^{(L)}(0,\underline{Q}) = \lim_{\sigma\to 0}\frac{-\ln\left\{\sum\limits_{\underline{k}\in\mathcal{K}}\prod\limits_{i=1}^{L+1} Q(k_i)\left[\sum\limits_{j=1}^{J}\prod\limits_{\ell=1}^{L+1} W(j\,|\,k_\ell)^{\frac{1}{L+1}}\right]^{\sigma}\right\}}{\sigma} =$$

$$= \lim_{\sigma\to 0}\frac{\gamma}{1} = \lim_{\sigma\to 0}\gamma = -\sum_{\underline{k}\in\mathcal{K}}\prod_{i=1}^{L+1} Q(k_i)\ln\left[\sum_{j=1}^{J}\prod_{\ell=1}^{L+1} W(j\,|\,k_\ell)^{\frac{1}{L+1}}\right].$$

Пункт 6 и теорема 2 полностью доказаны. ▲

§ 3. Нижняя граница для максимально возможной доли симметричных ошибок, исправляемых при передаче с нулевой скоростью и декодировании списком длины L в частном случае комбинаторного двоичного симметричного канала связи (BS-канала)

Целью этого параграфа является применение экспоненты границы выбрасывания из теоремы 2 в частном случае ДСК для построения нижней границы для максимально возможной доли симметричных ошибок, исправляемых при передаче с нулевой скоростью и декодировании списком фиксированной длины в частном случае комбинаторного BS-канала связи. Отметим тот факт, что в работе [4] именно в частном случае ДСК построена нижняя граница вероятности ошибки, экспонента которой совпадает с экспонентой границы выбрасывания.

Напомним, что для ДСК с вероятностью ошибки p переходные вероятности имеют вид $W(1\,|\,1) = W(2\,|\,2) = 1-p$, $W(1\,|\,2) = W(2\,|\,1) = p$. Зафиксируем для данного ДСК распределение вероятностей на входном алфавите $\underline{Q}^* = (1/2, 1/2)$, а также введем следующие обозначения:

$$\widetilde{E}_{\rm ex}(p,L) \stackrel{\rm def}{=} E_{\rm ex}^{(L)}(0,\underline{Q}^*),$$

$$f_{\rm bs}(L) \stackrel{\rm def}{=} \varliminf_{p\to 0}\frac{\widetilde{E}_{\rm ex}(p,L)}{-\ln p}.$$

Т е о р е м а 3. *Пусть* $-N\widetilde{E}_{\rm ex}(p,L)$ *– показатель экспоненты в верхней границе вероятности ошибки при передаче слов длины* N *с нулевой скоростью по ДСК с вероятностью ошибки* p, *а* $e_{\rm bs}^{(L)}(R,N)$ *– максимально возможное количество ошибок, исправляемых при передаче слов длины* N *по* BS*-каналу связи со скоростью* R *с использованием на выходе* BS*-канала декодирования списком длины* L.

Тогда при $R=0$ *справедливо следующее неравенство*:

$$f_{\rm bs}(L) = \varliminf_{p\to 0}\frac{\widetilde{E}_{\rm ex}(p,L)}{-\ln p} \leqslant \varlimsup_{N\to+\infty}\frac{e_{\rm bs}^{(L)}(0,N)}{N},$$

где $e_{\rm bs}^{(L)}(R,N)$ *определяется в точке* $R=0$ *по непрерывности.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через $\mathcal{P}^{(L)}(p,R,N)$ минимальную вероятность ошибки при передаче слов длины N по ДСК со скоростью R с использованием на выходе ДСК декодирования списком длины L для дискретного симметричного канала с нулевой скоростью передачи. Тогда по условию имеем

$$p^{e_{\rm bs}^{(L)}(0,N)+1}(1-p)^{N-e_{\rm bs}^{(L)}(0,N)-1} \leqslant \mathcal{P}^{(L)}(p,0,N) \leqslant \exp^{-N\widetilde{E}_{\rm ex}(p,L)}.$$

Логарифмируя это неравенство, получим

$$\big(e_{\rm bs}^{(L)}(0,N)+1\big)\ln p + \big(N-e_{\rm bs}^{(L)}(0,N)-1\big)\ln(1-p) \leqslant -N\widetilde{E}_{\rm ex}(p,L).$$

Поделим обе части на $N\ln p$, но изменим знак неравенства, так как $\ln p < 0$:

$$\frac{\widetilde{E}_{\rm ex}(p,L)}{-\ln p} \leqslant \frac{e_{\rm bs}^{(L)}(0,N)+1}{N} + \frac{N-e_{\rm bs}^{(L)}(0,N)-1}{N}\frac{\ln(1-p)}{\ln p}.$$

Теперь дважды сделаем предельный переход при $p\to 0$ и при $N\to+\infty$, учитывая что $\lim\limits_{p\to 0}\dfrac{\ln(1-p)}{\ln p}=0$. Получаем требуемое неравенство теоремы, а именно

$$\varliminf_{p\to 0}\frac{\widetilde{E}_{\rm ex}(p,L)}{-\ln p} \leqslant \varlimsup_{N\to+\infty}\frac{e_{\rm bs}^{(L)}(0,N)}{N}. \quad \blacktriangle$$

Т е о р е м а 4. *Для любого* $k=1,2,\ldots$

$$f_{\rm bs}(2k-1)=f_{\rm bs}(2k)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\right).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся формулой для $E_{\rm ex}^{(L)}(0,\underline{Q}^*)$ из п. 6 теоремы 2 и найдем $\widetilde{E}_{\rm ex}(p,L)$:

$$\widetilde{E}_{\rm ex}(p,L) \overset{\rm def}{=} E_{\rm ex}^{(L)}(0,\underline{Q}^*) = -\sum_{\underline{k}\in\mathcal{K}}\prod_{i=1}^{L+1}Q(k_i)\ln\left[\sum_{j=1}^{J}\prod_{\ell=1}^{L+1}W(j\,|\,k_\ell)^{\frac{1}{L+1}}\right] =$$

$$= -\sum_{\ell=1}^{L}\binom{L+1}{\ell}2^{-(L+1)}\ln\left[\left(p^\ell(1-p)^{L+1-\ell}\right)^{\frac{1}{L+1}}+\left((1-p)^\ell p^{L+1-\ell}\right)^{\frac{1}{L+1}}\right] =$$

$$= -\sum_{\ell=1}^{L}\binom{L+1}{\ell}2^{-(L+1)}\ln\left[(1-p)\left(\frac{p}{1-p}\right)^{\frac{\ell}{L+1}}+p\left(\frac{1-p}{p}\right)^{\frac{\ell}{L+1}}\right],$$

где суммирование в полученном выражении идет по параметру ℓ, который равен количеству k_i, равных 1. Если $\ell=0$ или $\ell=L+1$, то значение величины под знаком логарифма равно 1. Таким образом, остается суммирование по параметру $\ell\in[L]$. Под знаком суммы множитель $\dbinom{L+1}{\ell}$ соответствует числу вариантов выбрать элемент $\underline{k}\in\mathcal{K}$, в котором ровно ℓ элементов равны 1, и множитель $2^{-(L+1)}$ равен $\prod\limits_{i=1}^{L+1}Q^*(k_i)$.

Л е м м а 4. *Справедливо равенство*

$$\lim_{p\to 0}\frac{\ln\left[(1-p)\Big(\dfrac{p}{1-p}\Big)^{\frac{\ell}{L+1}}+p\Big(\dfrac{1-p}{p}\Big)^{\frac{\ell}{L+1}}\right]}{\ln p} = \min\left(\frac{\ell}{L+1},1-\frac{\ell}{L+1}\right).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для нахождения этого предела воспользуемся правилом Лопиталя:

$$\lim_{p\to 0}\frac{\ln\left[(1-p)\Big(\dfrac{p}{1-p}\Big)^{\frac{\ell}{L+1}}+p\Big(\dfrac{1-p}{p}\Big)^{\frac{\ell}{L+1}}\right]}{\ln p}=$$

$$=\lim_{p\to 0}\frac{p}{p^{\frac{\ell}{L+1}}(1-p)^{1-\frac{\ell}{L+1}}+(1-p)^{\frac{\ell}{L+1}}p^{1-\frac{\ell}{L+1}}}\bigg(\frac{\ell}{L+1}p^{\frac{\ell}{L+1}-1}(1-p)^{1-\frac{\ell}{L+1}}-$$

$$-(1-\frac{\ell}{L+1})(1-p)^{-\frac{\ell}{L+1}}p^{\frac{\ell}{L+1}}+(1-\frac{\ell}{L+1})p^{-\frac{\ell}{L+1}}(1-p)^{\frac{\ell}{L+1}}-$$

$$-\frac{\ell}{L+1}(1-p)^{\frac{\ell}{L+1}-1}p^{1-\frac{\ell}{L+1}}\bigg)=\lim_{p\to 0}\frac{p}{p^{\frac{\ell}{L+1}}+p^{1-\frac{\ell}{L+1}}}\bigg(\frac{\ell}{L+1}p^{\frac{\ell}{L+1}-1}-$$

$$-(1-\frac{\ell}{L+1})p^{\frac{\ell}{L+1}}+(1-\frac{\ell}{L+1})p^{-\frac{\ell}{L+1}}-\frac{\ell}{L+1}p^{1-\frac{\ell}{L+1}}\bigg)=$$

$$=\lim_{p\to 0}\frac{p}{p^{\frac{\ell}{L+1}}+p^{1-\frac{\ell}{L+1}}}\bigg(\frac{\ell}{L+1}p^{\frac{\ell}{L+1}-1}+(1-\frac{\ell}{L+1})p^{-\frac{\ell}{L+1}}\bigg)=$$

$$=\lim_{p\to 0}p^{1-\min\left(\frac{\ell}{L+1},1-\frac{\ell}{L+1}\right)}\bigg(\frac{\ell}{L+1}p^{\frac{\ell}{L+1}-1}+(1-\frac{\ell}{L+1})p^{-\frac{\ell}{L+1}}\bigg)=$$

$$=\min\left(\frac{\ell}{L+1},1-\frac{\ell}{L+1}\right).$$

Лемма 4 доказана. ▲

Найдем значение величины $f_{\mathrm{bs}}(2k-1)$, используя симметрию биноминальных коэффициентов и результат леммы 4:

$$f_{\mathrm{bs}}(2k-1)=2\sum_{\ell=1}^{k-1}\left(\binom{2k}{\ell}2^{-2k}\frac{\ell}{2k}\right)+\binom{2k}{k}2^{-(2k+1)},$$

где последнее слагаемое соответствует $\ell=k$. Аналогично при $L=2k$ получаем

$$f_{\mathrm{bs}}(2k)=2\sum_{\ell=1}^{k}\binom{2k+1}{\ell}2^{-(2k+1)}\frac{\ell}{2k+1}=\frac{1}{2^{2k}}\sum_{\ell=1}^{k}\binom{2k}{\ell-1},$$

где последнее равенство следует из того, что $\dfrac{\ell}{2k+1}\dbinom{2k+1}{\ell}=\dbinom{2k}{\ell-1}$.

Затем отметим следующие свойства биномиальных коэффициентов:

1. $2^{2k-1}=\displaystyle\sum_{\ell=0}^{2k-1}\binom{2k-1}{\ell}=2\sum_{\ell=0}^{k-1}\binom{2k-1}{\ell}\ \Rightarrow\ \sum_{\ell=0}^{k-1}\binom{2k-1}{\ell}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1}=\frac{1}{2};$
2. $\displaystyle\sum_{\ell=0}^{k-1}\binom{2k}{\ell}=\frac{2^{2k}-\binom{2k}{k}}{2};$
3. $\displaystyle\binom{2k}{k}=2\binom{2k-1}{k-1}\ \Rightarrow\ 4\binom{2k-1}{k-1}-\binom{2k}{k}=2\binom{2k}{k}-\binom{2k}{k}=\binom{2k}{k}.$

Преобразуем выражение для $f_{\mathrm{bs}}(2k-1)$, используя свойства 1 и 3 биномиальных коэффициентов:

$$f_{\mathrm{bs}}(2k-1) = \sum_{\ell=0}^{k-2} \binom{2k-1}{\ell} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1} + \binom{2k}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\binom{2k-1}{k-1}}{2^{2k-1}} + \frac{\binom{2k}{k}}{2^{2k+1}} = \frac{1}{2} - \frac{4\binom{2k-1}{k-1} - \binom{2k}{k}}{2^{2k+1}} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\binom{2k}{k}}{2^{2k}}\right).$$

Теперь применим свойство (2) и получим следующее равенство:

$$f_{\mathrm{bs}}(2k) = \frac{1}{2^{2k}} \sum_{\ell=1}^{k} \binom{2k}{\ell-1} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\binom{2k}{k}}{2^{2k}}\right) = f_{\mathrm{bs}}(2k-1).$$

Поэтому для любого числа $k = 1, 2, 3, \ldots$ справедливо следующее равенство:

$$f_{\mathrm{bs}}(2k-1) = f_{\mathrm{bs}}(2k) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\binom{2k}{k}}{2^{2k}}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{(2k)!}{k!\,k!\,2^{2k}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{(2k)!}{(2k)!!\,(2k)!!}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\right).$$

Теорема 4 полностью доказана. ▲

Таким образом, теорема 3 утверждает, что $f_{\mathrm{bs}}(L)$ является нижней границей для доли симметричных ошибок, исправляемых оптимальным двоичным кодом при декодировании списком фиксированной длины, в частном случае комбинаторного двоичного симметричного канала связи и нулевой скорости передачи, а теорема 4 позволяет точно посчитать эту границу для любого наперед заданного L. Приведем таблицу значений полученной границы:

L	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f_{\mathrm{bs}}(L)$	$1/4$	$1/4$	$5/16$	$5/16$	$11/32$	$11/32$	$93/256$	$93/256$	$193/512$	$193/512$

Также можно отметить, что

$$\lim_{k\to+\infty} f_{\mathrm{bs}}(2k-1) = \lim_{k\to+\infty} f_{\mathrm{bs}}(2k) = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{2k-1}{2k}\right) = \frac{1}{2}.$$

§ 4. Нижняя граница для максимальной доли асимметричных ошибок, исправляемых при передаче с нулевой скоростью и декодировании списком длины L в частном случае двоичного асимметричного Z-канала

Целью этого параграфа является применение построенной в § 2 границы выбрасывания при декодировании списком фиксированной длины L к важному частному случаю ДКБП, называемому вероятностным Z-каналом, а затем к соответствующему *комбинаторному двоичному асимметричному каналу связи* (Z-каналу), в которых ошибки могут происходить при передаче лишь одного из двух возможных двоичных входных символов.

Напомним, что для Z-канала с вероятностью ошибки p переходные вероятности имеют вид $W(1\,|\,1) = 1$, $W(1\,|\,2) = p$, $W(2\,|\,1) = 0$, $W(2\,|\,2) = 1 - p$. Рассмотрим для Z-канала более общий случай по сравнению с ДСК, а именно зафиксируем для данного канала распределение вероятностей на входном алфавите $\underline{Q}^* = (1 - w, w)$. Введем дополнительно следующие обозначения:

$$\widetilde{E}_{\text{ex}}(p, w, L) \stackrel{\text{def}}{=} E_{\text{ex}}^{(L)}(0, \underline{Q}^*),$$

$$f_{\text{z}}(w, L) \stackrel{\text{def}}{=} \varliminf_{p \to 0} \frac{\widetilde{E}_{\text{ex}}(p, w, L)}{-\ln p}.$$

Теорема 5. *Пусть $-N\widetilde{E}_{\text{ex}}(p, w, L)$ – показатель экспоненты в верхней границе вероятности ошибки при передаче слов длины N по двоичному асимметричному Z-каналу с вероятностью ошибки p, а $e_z^{(L)}(R, N)$ – максимально возможное количество ошибок, исправляемых при передаче слов длины N по Z-каналу связи со скоростью R с использованием на выходе Z-канала декодирования списком длины L. Тогда при $R = 0$ справедливо следующее неравенство*:

$$f_{\text{z}}(w, L) = \varliminf_{p \to 0} \frac{\widetilde{E}_{\text{ex}}(p, w, L)}{-\ln p} \leqslant \varlimsup_{N \to +\infty} \frac{e_z^{(L)}(0, N)}{N},$$

где $e_z^{(L)}(R, N)$ определяется в точке $R = 0$ по непрерывности.

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{P}^{(L)}(p, R, N)$ минимальную вероятность ошибки при передаче слов длины N по Z-каналу со скоростью R с использованием на выходе Z-канала декодирования списком длины L. Для двоичного асимметричного Z-канала с нулевой скоростью передачи по условию имеем

$$p^{e_z^{(L)}(0,N)+1} 1^k (1 - p)^{N - k - e_z^{(L)}(0,N) - 1} \leqslant \mathcal{P}^{(L)}(p, 0, N) \leqslant \exp^{-N\widetilde{E}_{\text{ex}}(p,w,L)},$$

где k – число единиц, перешедших по каналу в единицы.

Логарифмируя это неравенство, получаем

$$(e_z^{(L)}(0, N) + 1) \ln p + k \ln 1 + (N - k - e_z^{(L)}(0, N) - 1) \ln(1 - p) \leqslant -N\widetilde{E}_{\text{ex}}(p, w, L).$$

Поделим обе части на $N \ln p$, но изменим знак неравенства, так как $\ln p < 0$:

$$\frac{\widetilde{E}_{\text{ex}}(p, w, L)}{-\ln p} \leqslant \frac{e_z^{(L)}(0, N)}{N} + \frac{N - k - e_z^{(L)}(0, N) - 1}{N} \frac{\ln(1 - p)}{\ln p}.$$

Теперь дважды сделаем предельный переход при $p \to 0$ и при $N \to +\infty$, учитывая что $\lim\limits_{p \to 0} \dfrac{\ln(1 - p)}{\ln p} = 0$. Получаем требуемое неравенство теоремы, а именно

$$\varliminf_{p \to 0} \frac{\widetilde{E}_{\text{ex}}(p, w, L)}{-\ln p} \leqslant \varlimsup_{N \to +\infty} \frac{e_z^{(L)}(0, N)}{N}. \quad \blacktriangle$$

Теорема 6. *Для любого натурального L и любого $w \in [0, 1]$ справедливо*

$$f_{\text{z}}(w, L) = w\left(1 - w^L\right).$$

Более того,

$$f_{\mathrm{z}}(L) = \max_{w\in[0,1]} f_{\mathrm{z}}(w,L) = \left(\frac{1}{L+1}\right)^{\frac{1}{L}} \left(1-\frac{1}{L+1}\right),$$

$$\lim_{L\to+\infty} \left(\max_{w\in[0,1]} f_{\mathrm{z}}(w,L)\right) = 1.$$

Доказательство. 1. Воспользовавшись формулой для $E_{\mathrm{ex}}^{(L)}(0,\underline{Q}^*)$ из п. 6 теоремы 2, вычислим для такого канала следующую величину:

$$\widetilde{E}_{\mathrm{ex}}(p,w,L) \stackrel{\mathrm{def}}{=} E_{\mathrm{ex}}^{(L)}(0,\underline{Q}^*) = -\sum_{\underline{k}\in\mathcal{K}} \prod_{i=1}^{L+1} Q(k_i) \ln\left[\sum_{j=1}^{J}\prod_{\ell=1}^{L+1} W(j\,|\,k_\ell)^{\frac{1}{L+1}}\right] =$$

$$= -\sum_{\ell=0}^{L+1}\binom{L+1}{\ell}(1-w)^{\ell}w^{L+1-\ell}\ln\left[\left(1^{\ell}p^{L+1-\ell}\right)^{\frac{1}{L+1}} + \left(0^{\ell}(1-p)^{L+1-\ell}\right)^{\frac{1}{L+1}}\right],$$

где суммирование идет по параметру ℓ, который равен числу k_i, равных 1, а под знаком суммы множитель $\binom{L+1}{\ell}$ соответствует числу вариантов выбрать элемент $\underline{k}\in\mathcal{K}$, в котором ровно ℓ единиц, а множитель $(1-w)^l w^{L+1-\ell}$ равен $\prod_{i=1}^{L+1} Q^*(k_i)$. Если $\ell=0$ или $\ell=L+1$, то величина под знаком логарифма равна 1. Поэтому суммирование остается лишь по $\ell\in[L]$:

$$\widetilde{E}_{\mathrm{ex}}(p,w,L) = -\sum_{\ell=1}^{L}\binom{L+1}{\ell}(1-w)^{l}w^{L+1-\ell}\ln\left[p^{\frac{L+1-\ell}{L+1}}\right].$$

Лемма 5. *Справедливо равенство*

$$\lim_{p\to 0}\frac{\ln p^{\frac{L+1-\ell}{L+1}}}{\ln p} = 1-\frac{\ell}{L+1}.$$

Доказательство. Для нахождения этого предела воспользуемся правилом Лопиталя:

$$\lim_{p\to 0}\frac{\ln p^{\frac{L+1-\ell}{L+1}}}{\ln p} = \lim_{p\to 0}\frac{p}{p^{\frac{L+1-\ell}{L+1}}}\frac{L+1-\ell}{L+1}p^{\frac{-\ell}{L+1}} = \frac{L+1-\ell}{L+1} = 1-\frac{\ell}{L+1}.$$

Лемма 5 доказана. ▲

Воспользуемся определением величины $f_{\mathrm{z}}(w,L)$, выражением $\widetilde{E}_{\mathrm{ex}}(p,w,L)$ для асимметричного Z-канала и результатом леммы 5:

$$f_{\mathrm{z}}(w,L) = \sum_{\ell=1}^{L}\binom{L+1}{\ell}(1-w)^{l}w^{L+1-\ell}\frac{L+1-\ell}{L+1} =$$

$$= \sum_{\ell=1}^{L}\frac{(L+1)!}{\ell!(L+1-\ell)!}(1-w)^{l}w^{L+1-\ell}\frac{L+1-\ell}{L+1} =$$

$$= \sum_{\ell=1}^{L}\frac{L!}{\ell!(L-\ell)!}(1-w)^{l}w^{L+1-\ell} = \sum_{\ell=1}^{L}\binom{L}{\ell}(1-w)^{l}w^{L+1-\ell}.$$

Затем рассмотрим хорошо известное свойство биномиальных коэффициентов:

$$1^L = ((1-w)+w)^L = \sum_{\ell=0}^{L} \binom{L}{\ell} (1-w)^\ell w^{L-\ell} =$$

$$= \binom{L}{0} w^L + \sum_{\ell=1}^{L} \binom{L}{\ell} (1-w)^\ell w^{L-\ell} = w^L + \sum_{\ell=1}^{L} \binom{L}{\ell} (1-w)^\ell w^{L-\ell}.$$

Воспользуемся этим свойством, чтобы получить нужное нам выражение для величины $f_{\rm z}(w,L)$:

$$f_{\rm z}(w,L) = w \sum_{\ell=1}^{L} \binom{L}{\ell} (1-w)^l w^{L-\ell} = w(1-w^L).$$

Первая часть теоремы доказана.

2. Найдем значение величины $\max\limits_{w\in[0,1]} f_{\rm z}(w,L)$. Для этого решим уравнение

$$(f_{\rm z}(w,L))'_w = 1-(L+1)w^L = 0.$$

Отсюда получаем $w_{\max} = (L+1)^{-\frac{1}{L}}$ и

$$f_{\rm z}(L) = \max_{w\in[0,1]} f_{\rm z}(w,L) = f_{\rm z}(w_{\max},L) = \left(\frac{1}{L+1}\right)^{\frac{1}{L}} \left(1-\frac{1}{L+1}\right).$$

Для нахождения $\lim\limits_{L\to+\infty}\left(\max\limits_{w\in[0,1]} f_{\rm z}(w,L)\right)$ вычислим сначала следующий предел:

$$\lim_{L\to+\infty}\left(\frac{1}{L+1}\right)^{\frac{1}{L}} = \lim_{L\to+\infty} \exp\left\{-\frac{1}{L}\ln(1+L)\right\} = \lim_{L\to+\infty} \exp\left\{-\frac{1}{L+1}\right\} = 1.$$

Тогда искомый предел будет равен

$$\lim_{L\to+\infty}\left(\max_{w\in[0,1]} f_{\rm z}(w,L)\right) = \lim_{L\to+\infty}\left(\frac{1}{L+1}\right)^{\frac{1}{L}} \cdot \lim_{L\to+\infty}\left(1-\frac{1}{L+1}\right) = 1\cdot 1 = 1.$$

Теорема 6 полностью доказана. ▲

Итак, теорема 5 утверждает, что значение $f_{\rm z}(w,L)$ является нижней границей доли асимметричных ошибок, исправляемых оптимальным кодом при декодировании списком фиксированной длины в Z-канале с нулевой скоростью передачи, а теорема 6 позволяет точно посчитать эту границу для любых наперед заданных значений w и L. Таблица значений величин $w_{\max}$ и $\max\limits_{w\in[0,1]} f_{\rm z}(w,L)$ (т.е. доли числа ошибок, исправляемых оптимальным кодом) приведена в § 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Elias P.* List Decoding for Noisy Channels // Tech. Rep. № 335. Research Lab. of Electronics, MIT. Cambridge, MA, USA. 1957. (Reprinted from: IRE WESCON Convention Record. Part 2. P. 99–104). Available at https://dspace.mit.edu/handle/1721.1/4484
2. *Wozencraft J.M.* List Decoding. Quarterly Progress Report, Research Lab. of Electronics, MIT. Cambridge, MA, USA. 1958. V. 48. P. 90–95.
3. *Elias P.* Error-Correcting Codes for List Decoding // IEEE Trans. Inform. Theory. 1991. V. 37. № 1. P. 5–12. https://doi.org/10.1109/18.61123

4. *Блиновский В.М.* Нижняя граница вероятности ошибки декодирования списком фиксированного объема // Пробл. передачи информ. 1991. Т. 27. № 4. С. 17–33. http://mi.mathnet.ru/ppi578
5. *Блиновский В.М.* Границы для кодов при декодировании списком конечного объема // Пробл. передачи информ. 1986. Т. 22. № 1. С. 11–25. http://mi.mathnet.ru/ppi839
6. *Дьячков А.Г.* Граница выбрасывания при декодировании списком фиксированной длины для дискретного канала без памяти. Неопубликованная рукопись, 1982.
7. *Gallager R.G.* Information Theory and Reliable Communication. New York: Wiley, 1968.
8. *Polyanskii N., Zhang Y.* Codes for the Z-Channel, https://arXiv.org/abs/2105.01427 [cs.IT], 2021.
9. *Lebedev A., Lebedev V., Polyanskii N.* Two-Stage Coding over the Z-Channel, https://arXiv.org/abs/2010.16362v2 [cs.IT], 2020.

Дьячков Аркадий Георгиевич
(29.09.1944 – 20.10.2021)
Гошкодер Даниил Юрьевич
Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова, механико-математический
факультет, кафедра теории вероятностей
daniilgoshkoder@mail.ru

Поступила в редакцию
31.05.2021
После доработки
07.11.2021
Принята к публикации
08.11.2021