ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

Том 57 2021 Вып. 4

УДК 621.391 : 519.2

 Н.Г. Докучаев

К ОДНОЗНАЧНОСТИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ДАННЫХ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА МНОЖЕСТВО СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Изучаются возможности восстановления данных для конечных последовательностей при ограничениях на возможное множество спектральных значений. Соответствующие последовательности плотны в пространстве всех последовательностей. Показано, что множество однозначности для них может быть одноточечным.

Ключевые слова: восстановление данных, сжатие данных, Z-преобразование, дискретное преобразование Фурье, дискретизация множества спектральных значений.

DOI: 10.31857/S0555292321040069

§ 1. Введение

Статья изучает возможности восстановления данных для конечных последовательностей при ограничениях на значения спектра, возникающих при специальной дискретизации области возможного диапазона спектра. Обычно такого рода восстановимость ассоциируется с ограничениями на носитель спектра, такими как разреженность носителя спектра или наличие областей с нулевыми значениями спектра (см., например, работы [1–5] и ссылки в них).

Настоящая статья исследует задачи восстановления и сжатия данных данных в условиях ограничений только на множество спектральных значений. Показано, что существуют классы последовательностей, которые плотны в пространстве всех последовательностей и в то же время имеют однотонные множества однозначности (теорема 2). Эти классы определяются ограничениями, налагаемыми специальной дискретизацией возможного множества спектральных значений. Подразумеваемая процедура восстановления потребует решения уравнения диофантового типа. Хотя эффективное численное решение в больших измерениях неосуществимо, эта теорема может привести к некоторым новым выводам о вычислительных ограничениях для эффективности сжатия данных.

§ 2. Определения и постановка задачи

Для целого числа $N > 0$ обозначим через $\mathcal{X}$ множество отображений $x\colon D \to \mathbb{C}$, где $D \triangleq \{0, 1, \ldots, N-1\}$. Это множество мы также будем ассоциировать с векторным пространством $\mathbb{C}^N$. Будем рассматривать $\mathcal{X}$ как линейное нормированное пространство со стандартной нормой из $\mathbb{C}^N$.

Рассмотрим следующее Z-преобразование $Y = Zy$ для $y \in \mathcal{X}$:

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{N-1} z^{-k} y_k, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Также будем рассматривать дискретное преобразование Фурье (ДПФ) – отображение $\mathcal{F}\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, такое что $Y = \mathcal{F}y$ задано условиями

$$Y_d = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-i\omega_k d} y_k, \quad d = 0, 1, \ldots, N-1,$$

где $i = \sqrt{-1}$,

$$\omega_k = \frac{2\pi}{N} k.$$

Определение 1. Пусть заданы подмножество U в $\mathbb{C}$ и подмножество $\mathcal{Y}$ в $\mathcal{X}$.

1. Если любой $y \in \mathcal{Y}$ однозначно определяется значениями $Y|_U$, где $Y = Zy$, то будем говорить, что U является множеством однозначности для $\mathcal{Y}$ в частотной области относительно Z-преобразования;
2. Если любой элемент $y \in \mathcal{Y}$ однозначно определяется значениями $Y|_U$, где $Y = \mathcal{F}y$, то будем говорить, что U является множеством однозначности для $\mathcal{Y}$ в частотной области относительно дискретного преобразования Фурье.

Приведем несколько примеров множеств однозначности.

Пример 1. Следующие множества $U \subset \mathbb{C}$ являются множествами однозначности для $\mathcal{X}$ в частотной области относительно Z-преобразования:

1. Любое открытое множество $U \subset \mathbb{C}$;
2. Множество $U = \{e^{i\omega},\ \omega \in [0, 2\pi)\}$.

Будем обозначать через $|U|$ количество элементов в множестве U.

Пример 2. Пусть задано $S \in \{1, \ldots, N-1\}$. Пусть $\mathcal{X}_S$ – множество всех $y \in \mathcal{X}$, таких что $\sum\limits_{k\in D} \mathbb{I}_{\{y_k \neq 0\}} \leqslant S$.

1. Если N – простое число, то любое множество $U \subset D$, такое что $|U| = 2S$, является множеством однозначности для $\mathcal{Y}_S$ в частотной области относительно дискретного преобразования Фурье (см., например, [1, теорема 1.1]);
2. Пусть $U \subset D$ таково, что $|U| = 2S$ и существуют такие $u, v \in D$, что

$$U = \{u, u+v, u+2v, \ldots, u+(2S-1)v\}.$$

Тогда U является множеством однозначности для $\mathcal{Y}_S$ в частотной области относительно дискретного преобразования Фурье (см., например, [6]).

Ниже мы покажем, что существуют примеры одноэлементных множеств однозначности для некоторых классов процессов, допускающих конструктивное описание через ограничения на возможное множество спектральных значений.

§ 3. Случай частично наблюдаемого Z-преобразования

В этом параграфе мы рассмотрим случай, где для данного $x \in \mathcal{X}$ наблюдаются некоторые отсчеты Z-преобразования $X = \mathcal{Z}x$.

Обозначим через $\mathcal{X}_{\text{alg}}$ множество всех $x \in \mathcal{X}$, таких что члены соответствующих последовательностей $\operatorname{Re} x$ и $\operatorname{Im} x$ являются алгебраическими числами (см., например, [7, гл. 1]).

В частности, класс $\mathcal{X}_{\text{alg}}$ включает в себя все $x \in \mathcal{X}$, такие что их компоненты имеют рациональные вещественные и мнимые части. Очевидно, что множество $\mathcal{X}_{\text{alg}}$ всюду плотно в $\mathcal{X}$.

Теорема 1. *Пусть для некоторого $\widehat{z} \in \mathbb{C}$ его модуль и аргумент являются алгебраическими числами, т.е. $\widehat{z} = re^{i\omega}$, где $r > 0$ и $\omega \neq 0$ – вещественные алгебраические числа. Тогда одноточечное множество $U = \{\widehat{z}\}$ является множеством однозначности для $\mathcal{X}_{\mathrm{alg}}$ в частотной области относительно Z-преобразования.*

Доказательство. Для доказательства достаточно показать, что если $\widetilde{y}, \overline{y} \in \mathcal{X}_{\mathrm{alg}}$ и $\widehat{Y}(\widehat{z}) = \overline{Y}(\widehat{z})$ для $\widehat{Y} = \mathcal{Z}\widehat{y}$, $\overline{Y} = \mathcal{Z}\overline{y}$, то $\widetilde{y} = \overline{y}$. Следовательно, достаточно показать, что если $Y(\widehat{z}) = 0$ для $y = (y_0, \dots, y_{N-1}) \in \mathcal{X}_{\mathrm{alg}}$ и $Y = \mathcal{Z}y$, то y равен нулю. Покажем это.

Имеем

$$0 = Y(\widehat{z}) = \sum_{k=0}^{N-1} r^{-k} e^{-i\omega k} y_k. \tag{1}$$

Поскольку $y \in \mathcal{X}_{\mathrm{alg}}$, компоненты вектора y являются алгебраическими числами. Кроме того, коэффициенты $r^{-k} y_k$ являются алгебраическими числами. Из теоремы Линдемана – Вейерштрасса (см. [7, гл. 1, теорема 1.4]) следует, что $r^{-k} y_k = 0$ для всех k, что и завершает доказательство. ▲

§ 4. Случай частично наблюдаемого ДПФ

В этом параграфе мы рассматриваем ситуацию, где для данного $x \in \mathcal{X}$ наблюдаются некоторые компоненты дискретного преобразования Фурье $X = \mathcal{F}x$.

Зафиксируем $d \in \{1, \dots, N-1\}$ и зададим вектор $a = (a_0, a_1, \dots, a_{N-1}) \in \mathbb{R}^N$, компоненты которого являются алгебраическими числами. Зададим вектор $\zeta(a, d) = (\zeta_0(a, d), \dots, \zeta_{N-1}(a, d)) \in \mathcal{X}$ таким образом, что

$$\zeta_k(a, d) = e^{i(a_k - \omega_k)d}.$$

Обозначим через $\widehat{\mathcal{Y}}_{a,d}$ набор всех $y = (y_0, y_1, \dots, y_{N-1}) \in \mathcal{X}$, таких что $x = (x_0, x_1, \dots, x_{N-1}) \in \mathcal{X}_{\mathrm{alg}}$, где $x_k = \zeta_k(a, d) y_k$, $k = 0, 1, \dots, N-1$.

Теорема 2. *Для любого $d \in \{1, \dots, N-1\}$ одноточечное множество $U = \{d\}$ является множеством однозначности для класса $\widehat{\mathcal{Y}}_{a,d}$ в частотной области относительно дискретного преобразования Фурье.*

Замечание 1. Поскольку a_k могут быть сколь угодно близкими к π, то и коэффициенты $\zeta_k(a, d)$ могут быть сколь угодно близкими к 1. Отсюда следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует a, такое что множество $\widehat{\mathcal{Y}}_{a,d}$ является ε-плотным в $\mathcal{X}$, и множество $\bigcup_a \widehat{\mathcal{Y}}_{a,d}$ всюду плотно в $\mathcal{X}$.

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим $y = (y_0, \dots, y_{N-1}) \in \widehat{\mathcal{Y}}_{a,d}$, $Y = (Y_0, \dots, Y_{N-1}) = \mathcal{F}y$, а также $x = (x_0, \dots, x_{N-1}) \in \mathcal{X}_{\mathrm{alg}}$, такой что $x_k = \zeta_k(a, d) y_k$. Имеем

$$Y_d = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-i\omega_k d} y_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-ia_k d} \zeta_k(a, d) y_k.$$

Следовательно,

$$Y_d = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-ia_k d} x_k. \tag{2}$$

Для доказательства теоремы достаточно показать, что для любого $y \in \widehat{\mathcal{Y}}_{a,d}$ существует единственный вектор $x = (x_0, \dots, x_{N-1}) \in \mathcal{X}_{\mathrm{alg}}$, удовлетворяющий (2). Для этого достаточно показать, что если $\widehat{Y}_d = \widetilde{Y}_d$ для некоторых $\widehat{y}, \widetilde{y} \in \widehat{\mathcal{Y}}_{a,d}$, $\widehat{Y} = \mathcal{F}(\widehat{y})$ и $\widetilde{Y} = \mathcal{F}(\widetilde{y})$, то $\widehat{y} = \widetilde{y}$.

Теперь можно завершить доказательство. Достаточно показать, что если $Y_d = 0$ для $y \in \widehat{\mathcal{Y}}_{a,d}$ и $Y = \mathcal{F}y$, то уравнение (2) имеет только нулевое решение x в $\mathcal{X}_{\text{alg}}$. Покажем это.

Поскольку $y \in \widehat{\mathcal{Y}}_{a,d}$, из определений следует, что x_k – алгебраические числа для $k = 0, 1, \ldots, N-1$. Кроме того, a_k – также алгебраические числа. Снова применив теорему Линдемана – Вейерштрасса (см. [7, гл. 1, теорема 1.4]), получаем, что $x_k = 0$ для всех k, что и завершает доказательство. ▲

О возможности восстановления данных. Теорема 2 и ее доказательство формально ведут к следующей процедуре сжатия и декодирования данных: (i) последовательность $x \in \mathcal{X}$ можно аппроксимировать некоторым достаточно близким вектором $y \in \widehat{\mathcal{Y}}_{a,d}$; этот вектор y восстанавливается из решения $\{x_k\}$ уравнения (2).

Далее, существование решения $\{x_k\}$ уравнения (2) в нашем подходе заведомо предполагается, поскольку x_k являются параметрами исследуемого процесса y; это решение приводит к восстановлению y. Мы показали, что это решение единственно. Однако теорема 2 не приводит к эффективному численному алгоритму.

Если класс $\mathcal{X}_{\text{alg}}$ заменить конечным множеством, то решение могло бы быть получено полным перебором. Очевидно, что результат об однозначности остается верным, если класс $\mathcal{X}_{\text{alg}}$ заменить его конечным подмножеством.

Приведем пример таких подмножеств.

Будем использовать обозначение

$$\lfloor a \rfloor = \begin{cases} \{k \in \mathbb{Z} : \ a \in [k, k+1)\} & \text{для } a \in \mathbb{R}, \ a \geqslant 0, \\ \{k \in \mathbb{Z} : \ a \in (k-1, k]\} & \text{для } a \in \mathbb{R}, \ a < 0. \end{cases}$$

Для положительных целых чисел ν и μ зададим $\rho_{\nu,\mu}(a) = \nu^{-\mu} \lfloor \nu^{\mu} a \rfloor$ для $a \in \mathbb{R}$ и

$$\rho_{\nu,\mu}(z) = \rho_{\nu,\mu}(\operatorname{Re} z) + i \rho_{\nu,\mu}(\operatorname{Im} z) \quad \text{для } z \in \mathbb{C}.$$

Определим множество $\mathcal{X}^{\mu,\nu,M}$ как множество "округленных" последовательностей $x \in \mathcal{X}$, таких что $\max\limits_t |x(t)| \leqslant M$ и $x(t) = \rho_{\nu,\mu}(x(t))$. Это множество конечно, и уравнение (2) представляет собой вариант диофантова уравнения. Для определенного диапазона значений N, M, μ, ν решение может быть получено полным перебором. Постоянно растущие доступные вычислительные мощности позволяют увеличивать значения N, M, μ и ν.

Далее, перебор может быть сокращен при наличии дополнительных наблюдений, поскольку эти наблюдения порождают дополнительные уравнения, ограничивающие перебор.

Предположим, что в условиях и обозначениях доказательства теоремы 2 доступны дополнительные наблюдения Y_m для $m \in \widehat{D} \cup \{d\}$, где $\widehat{D}$ – подмножество множества D. Здесь $Y = \mathcal{F}y$, и вектор $y = (y_0, \ldots, y_{N-1}) \in \mathcal{X}$ таков, что $y_k = \zeta_k(a,d) x_k$ для $x \in X^{\mu,\nu,M}$. В этом случае уравнение (2) можно дополнить уравнениями

$$Y_m = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-i\omega_k m} \frac{x_k}{\zeta_k(a,d)}, \quad m \in \widehat{D}.$$

Полученная расширенная система имеет единственное решение, поскольку уравнение (2) имеет единственное решение; тем не менее, включение дополнительных уравнений может помочь сократить поиск.

Другая возможность сократить поиск – рассматривать последовательности с дополнительными ограничениями, такими как как ограничение снизу на количество нулей для x или X, рассматривавшееся в [1, 2].

§ 5. Заключительные замечания

Обычно возможности восстановления и экстраполяции данных рассматриваются в связи с вырожденностью спектра, например, ограниченностью полосы частот, наличием пропусков в спектре и разреженностью спектра. Теоремы 1 и 2 предлагают изучить ограничения на возможные значения спектра. Эти теоремы устанавливают существование плотных множеств последовательностей, которые однозначно восстанавливаются по значениям спектра только в одной точке. Возможные значения спектра последовательности из этого класса определяются специальным типом дискретизации; ограниченность диапазона или наличие пропусков в спектре не требуются.

Теоремы 1 и 2 не дают эффективного численного алгоритма, поскольку решение уравнения (2) затруднительно. Для некоторых более узких классов лежащих в основе процессов уравнение (2) может быть решено с помощью перебора, как упоминалось выше. Эта задача выходит за рамки данной статьи; обзор некоторых связанных методов, а также некоторые ссылки можно найти, например, в [8].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Candés E., Romberg J., Tao T.* Robust Uncertainty Principles: Exact Signal Reconstruction from Highly Incomplete Frequency Information // IEEE Trans. Inform. Theory. 2006. V. 52. № 2. P. 489–509. `https://doi.org/10.1109/TIT.2005.862083`
2. *Candés E., Tao T.* Near Optimal Signal Recovery from Random Projections: Universal Encoding Strategies // IEEE Trans. Inform. Theory. 2006. V. 52. № 12. P. 5406–5425. `https://doi.org/10.1109/TIT.2006.885507`
3. *Dokuchaev N.* On Recovery of Discrete Time Signals from Their Periodic Subsequences // Signal Process. 2019. V. 162. P. 180–188. `https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2019.04.008`
4. *Dokuchaev N.* On Linear Weak Predictability with Single Point Spectrum Degeneracy // Appl. Comput. Harmon. Anal. 2021. V. 53. P. 116–131. `https://doi.org/10.1016/j.acha.2021.01.005`
5. *Olevskii A.M., Ulanovskii A.* Functions with Disconnected Spectrum: Sampling, Interpolation, Translates. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2016.
6. *Venkataramani R., Bresler Y.* Sub-Nyquist Sampling of Multiband Signals: Perfect Reconstruction and Bounds on Aliasing Error // Proc. 1998 IEEE Int. Conf. on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP'98). May 12–15, 1998. Seattle, WA, USA. V. 3. P. 1633–1636. `https://doi.org/10.1109/ICASSP.1998.681767`
7. *Baker A.* Transcendental Number Theory. London/New York: Cambridge Univ. Press, 1975.
8. *Smart N.P.* The Algorithmic Resolution of Diophantine Equations. New York: Cambridge Univ. Press, 1998.

Докучаев Николай Геннадьевич
Институт ZJU-UIUC (Чжэцзянский университет / Иллинойский университет в Урбане-Шампейне),
Чжэцзянский университет, Хайнин,
провинция Чжэцзян, Китай
`Dokuchaev@intl.zju.edu.cn`

Поступила в редакцию
18.08.2021
После доработки
10.10.2021
Принята к публикации
08.11.2021