ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

Том 57 **2021** **Вып. 4**

УДК 621.391 : 519.176

© 2021 г. **Н.А. Дубинин**

НОВЫЕ ОЦЕНКИ ТУРАНОВСКОГО ТИПА ДЛЯ ГРАФОВ ДЖОНСОНА

Получена новая оценка числа ребер в индуцированных подграфах графов Джонсона.

Ключевые слова: теорема Турана, дистанционные графы, графы Джонсона.

DOI: 10.31857/S0555292321040070

§ 1. Введение

В данной статье рассматривается граф $G(n,r,s)$, вершины которого – r-элементные подмножества множества $\{1,2,\ldots,n\}$, а ребро между двумя вершинами проводится в том случае, если размер пересечения соответствующих подмножеств равен s. Другое определение графа $G(n,r,s)$ следующее: вершинами графа являются вершины единичного куба в n-мерном пространстве, имеющие в координатной записи ровно r единиц, а ребро между двумя вершинами проводится, когда расстояние между ними равно $\sqrt{2(r-s)}$. Понятно, что эти две формулировки эквивалентны.

Графы $G(n,r,s)$ называются графами Джонсона. Они играют огромную роль в задачах комбинаторной геометрии (см., например, [1–3], где описаны, среди прочего, контрпримеры к гипотезе Борсука, основанные на графах Джонсона; далее, см. [1, 4, 5], где обсуждается применение графов Джонсона к задачам о раскрасках метрических пространств; наконец, см. [6–8], где говорится о некоторых смежных задачах, решаемых с помощью графов Джонсона). Также они играют огромную роль в теории кодирования (см., например, [9,10]), теории Рамсея (см., например, [11–13]) и др.

В настоящей статье изучаются экстремальные свойства графа $G(n,r,s)$. А именно, исследуется число ребер в произвольном подграфе этого графа. Напомним, что *независимое множество вершин* графа G – это такое подмножество его вершин, что никакие две вершины из этого подмножества не соединены ребром. *Числом независимости* $\alpha(G)$ называется наибольшая мощность независимого множества вершин графа.

Обозначим через $r(W)$ количество ребер графа $G=(V,E)$ на множестве $W\subseteq V$. Иными словами,

$$r(W)=|\{(x,y)\in E\mid x\in W,\ y\in W\}|.$$

Также положим

$$r(\ell)=\min_{|W|=\ell,\,W\subseteq V} r(W).$$

Возникает вопрос об изучении данной величины. Классическая теорема Турана 1941 года дает ответ на этот вопрос в общем случае.

Т е о р е м а 1. *Пусть G – произвольный граф, α – его число независимости, $\ell > \alpha$. Тогда*

$$r(\ell) \geqslant \frac{\ell^2}{2\alpha} - \frac{\ell}{2}.$$

В доказательстве этой теоремы не учитываются никакие специальные свойства графа G, и более того, эта теорема в общем случае неулучшаема. Однако разумно предположить, что для графов с некоторыми ограничениями оценку можно улучшить. Мы рассматриваем *дистанционные* графы – графы, вершинами которых являются точки в пространстве $\mathbb{R}^n$, а ребро между такими вершинами проводится тогда и только тогда, когда расстояние между ними равно некоторому фиксированному числу. Понятно, что определенный выше граф $G(n, r, s)$ является дистанционным.

Для произвольных дистанционных графов была доказана следующая теорема (см. [14, лемма 4]).

Т е о р е м а 2. *Пусть G_n – последовательность дистанционных графов, у которых $V(G_n) \subset \mathbb{R}^n$. Положим $\alpha_n = \alpha(G_n)$. Пусть W_n – подмножество множества $V(G_n)$. Тогда если $|W_n| = \ell(n)$ и $n\alpha_n = o(\ell(n))$, то при $n \to \infty$*

$$r(\ell(n)) \geqslant \frac{\ell(n)^2}{\alpha_n}(1 + o(1)).$$

Таким образом, мы видим, что на классе дистанционных графов, образующих последовательности с определенными асимптотическими свойствами, оценка Турана улучшается примерно в два раза. Можно предположить, что на еще более узком классе дистанционных графов $G(n, r, s)$ оценка допускает дальнейшее улучшение. И действительно, в работе [15] была доказана следующая теорема (см. также [16,17]).

Т е о р е м а 3. *Рассмотрим граф $G(n, 3, 1)$. Пусть функция $\ell\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такова, что $n^2 = o(\ell)$ при $n \to \infty$. Тогда существует такая функция $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, что $h \sim \dfrac{3\ell^2}{2n}$ при $n \to \infty$ и $r(\ell(n)) \geqslant h(n)$ для любого достаточно большого $n \in \mathbb{N}$.*

Чтобы пояснить, как соотносятся между собой результаты теорем 2 и 3, заметим, что $\alpha(G(n, 3, 1)) \in \{n-2, n-1, n\}$ (см. [13]). Это значит, что на своем классе графов теорема 3 в полтора раза сильнее общей теоремы 2. Наш основной результат будет обобщением теоремы 3 на случай фиксированных r и s с условием, что $r = 2s + 1$ и что $r - s$ – степень простого числа. Очевидно, что параметры теоремы 3 удовлетворяют этим условиям. Заметим, что именно в этих ограничениях на r и s в работе [18] было показано, что $\alpha(G(n, r, s)) \sim n^s \dfrac{(2r-2s-1)!}{r!\,(r-s-1)!}$. Эта запись означает, что существует такая функция $q(n) = (1 + o(1))$, что $\alpha(G(n, r, s)) = q(n) n^s \dfrac{(2r-2s-1)!}{r!\,(r-s-1)!}$. Кроме того, поскольку функция $q(n)$ ограничена, существует такая константа C_0, что $\alpha(G(n, r, s)) \leqslant C_0 n^s$. Такого рода огрубления нам иногда понадобятся. Итак, справедлива

Т е о р е м а 4. *Пусть $r = 2s+1$, где $r-s$ – степень простого числа, и пусть $\ell(n)$ – любая функция с ограничением $n^{2s} = o(\ell(n))$. Положим $\alpha_n = \alpha(G(n, r, s))$. Тогда существует такая функция $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, что $h \sim \dfrac{3\ell(n)^2}{2\alpha_n}$ при $n \to \infty$ и $r(\ell(n)) \geqslant h(n)$.*

В работе [17] Пушняковым доказана следующая

Т е о р е м а 5. *Пусть даны числа r, s. Пусть $G_n = G(n, r, s)$. Пусть $\ell = \ell(n) \to \infty$. Тогда*

$$r(\ell) \leqslant (1 + o(1)) \frac{\ell^2}{n^s} \frac{C_r^s r!}{2(r-s)!}.$$

Таким образом, отличие нашей новой нижней оценки от известной верхней границы имеет величину порядка константы при фиксированных r, s. Например, в случае, когда $r = 3$, $s = 1$, оценка из теоремы 5 имеет вид $\frac{9}{2} \frac{\ell^2}{n}$, т.е. отличается от воспроизведенной нами оценки Пушнякова всего в 3 раза. Ни для каких других значений r, s ранее нижние оценки, превосходящие результаты теорем 1 и 2, получены не были.

Отметим также, что условие теоремы 4, требующее, чтобы функция ℓ росла быстрее, чем n^{2s}, в случае $r = 3$, $s = 1$, который изучал Пушняков, не является сильно ограничительным. А именно, Пушняков доказал (см. [17]), что в противоположных условиях величина $r(\ell)$ асимптотически равна либо своей нижней границе из теоремы 1, либо своей нижней границе из теоремы 2. В нашем, существенно более общем случае остается достаточно большой диапазон значений функции ℓ, который пока не изучен. Разумеется, в этом диапазоне верны теоремы 1, 2 и 5. Дальнейшие уточнения – дело будущего.

В чем-то наше доказательство будет следовать идеям Пушнякова. Однако будет и значимое количество существенных отличий. Так, для доказательства теоремы 4 нам понадобится вспомогательная лемма, напоминающая утверждение из работы Пушнякова [17].

Л е м м а. *Пусть параметры r, s и функция ℓ удовлетворяют условиям теоремы 4. Пусть W – произвольное множество вершин графа $G(n, r, s)$, имеющее мощность $\ell(n)$. Пусть Γ – любое наибольшее по мощности независимое множество вершин в подграфе графа $G(n, r, s)$, порожденном вершинами из W. Пусть $w \in W \setminus \Gamma$. Обозначим через $n(\Gamma, w)$ число вершин в множестве Γ, смежных с w. Пусть U_1 и U_2 – множества таких вершин $w \in W \setminus \Gamma$, что $n(\Gamma, w) = 1$ или 2 соответственно. Тогда существует такая константа C_1, что $|U_1 \cup U_2| \leqslant C_1 n^{2s}$.*

Подчеркнем, что константа в лемме будет зависеть только от r и s, но не от ℓ, W и Γ.

В следующем параграфе мы сперва приведем доказательство леммы, а потом – в п. 2.2 – докажем теорему 4. В доказательствах во избежание путаницы нам удобно будет иногда различать обозначения для той или иной вершины u графа $G(n, r, s)$ и отвечающего ей r-элементного подмножества. Последнее мы будем обозначать через $\mathrm{supp}(u)$ и называть *носителем* вершины u.

Отметим, наконец, что близкие результаты для случая произвольных дистанционных графов на плоскости можно найти в работе [19].

§ 2. Доказательства

2.1. Доказательство леммы. Докажем сначала, что существует такая константа C_2, что $|U_1| \leqslant C_2 n^{s+1}$. Выберем вершину $u \in \Gamma$. Пусть

$$U_{1,u} = \{w : \ w \in W \setminus \Gamma, \ n(\Gamma, w) = 1 \text{ и } (w, u) \in E\}.$$

Тогда U_1 – объединение множеств $U_{1,u}$ по всем $u \in \Gamma$. Зафиксируем u и оценим мощность $U_{1,u}$. Пусть $v \in U_{1,u}$. Носители вершин u и v пересекаются по s элементам, и выбрать эти элементы можно C_r^s способами. Следующий, $(s+1)$-й, элемент носителя v выбираем $n - r$ способами. Для этих выбранных $s + 1$ элементов существует не более одного способа выбрать все остальные. Пусть это не так, тогда существует

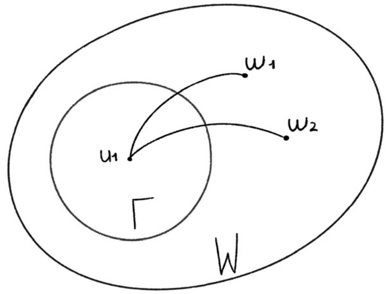

Рис. 1. Вершины с единственным ребром в Γ

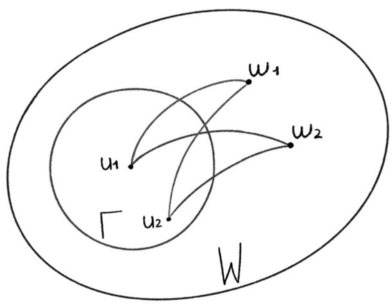

Рис. 2. Галочки

как минимум две вершины $v_1 = \{v^1, v^2, \ldots, v^{s+1}, a, \ldots\}$ и $v_2 = \{v^1, v^2, \ldots, v^{s+1}, b, \ldots\}$. Заметим, что между ними нет ребра, поскольку их носители пересеклись как минимум по $s+1$ элементам. Также заметим, что каждая из вершин имеет лишь одно ребро с множеством Γ, и это ребро ведет в выбранную вершину u (см. рис. 1). Тогда множество $(\Gamma \setminus \{u\}) \cup \{v_1, v_2\}$ не имеет ребер, т.е. является независимым, и имеет мощность больше, чем мощность множества Γ, что противоречит предположению максимальности Γ. Итак,

$$|U_1| \leqslant C_r^s |\Gamma| n \leqslant C_r^s \alpha_n n \sim n^{s+1} C_r^s \frac{(2r-2s-1)!}{r!\,(r-s-1)!}.$$

Теперь докажем, что существует такая константа C_3, что $|U_2| \leqslant C_3 n^{2s}$. Иными словами, надо оценить количество таких вершин $w \in W \setminus \Gamma$, что $n(\Gamma, w) = 2$. Пусть w имеет ребра с $u_1, u_2 \in \Gamma$. Носители вершин u_1, u_2 могут пересекаться по $0, 1, \ldots, s-1, s+1, \ldots, r-1 = 2s$ элементам. Поскольку вершина w имеет ребро с каждой из вершин u_1, u_2, носитель w и объединение носителей u_1, u_2 могут пересечься по $s, s+1, \ldots, r-1 = 2s$ элементам. Введем понятие *галочки*. Назовем *галочкой* три вершины, обладающие следующими свойствами: $u_1, u_2 \in \Gamma$ и $w \in W \setminus \Gamma$, $n(\Gamma, w) = 2$, причем $(u_1, w) \in E, (u_2, w) \in E$ (см. рис. 2). Вершину w будем называть *центром* галочки, остальные вершины галочки назовем ее *краями*.

Разделим доказательство на два случая. В первом случае носитель центра галочки пересекается с объединением носителей краев галочки больше чем по s элементам. Во втором случае носитель центра пересекается с объединением носителей краев по s элементам. Это возможно, если сами носители краев галочки имеют хотя бы $s+1$ общий элемент (а не s, ведь между u_1, u_2 нет ребра).

w –

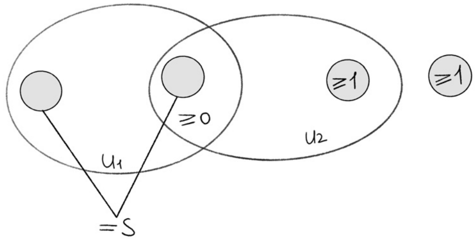

Рис. 3. Носители вершин в случае 1

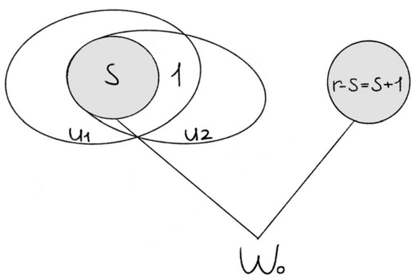

Рис. 4. Носители вершин в случае 2

Случай 1. Пусть $|(\mathrm{supp}(u_1) \cup \mathrm{supp}(u_2)) \cap \mathrm{supp}(w)| = k$, $k \geqslant s+1$. Выберем пару $u_1, u_2 \in \Gamma$ и посчитаем количество галочек с краями в этой паре и центрами в тех или иных w. Поскольку $|\,\mathrm{supp}(u_1) \cap \mathrm{supp}(w)| = s$, существует C_r^s способов выбрать s элементов носителя w, по которым он пересечется с носителем u_1. Среди не более чем r элементов, находящихся в разности носителя u_2 и носителя u_1, надо выбрать $k - s \geqslant 1$ элементов (см. рис. 3). Значит, $s+1$-й элемент выбирается не более чем r способами в носителе u_2. А способов выбрать остальные элементы не больше двух, причем неважно, где эти элементы выбирать – в носителе или во всем множестве из n чисел. Пусть это не так, тогда есть как минимум три вершины w_1, w_2, w_3, носители которых имеют хотя бы $s+1$ общий элемент, а следовательно, между ними нет ребер. Таким образом, поскольку из каждой вершины w_1, w_2, w_3 идет ровно два ребра в множество Γ, причем все ребра идут в вершины u_1, u_2, множество $(\Gamma \setminus \{u_1, u_2\}) \cup \{w_1, w_2, w_3\}$ является независимым и имеет мощность больше, чем мощность Γ, что противоречит максимальности Γ. Значит, для любых двух вершин u_1, u_2 существует не более $2rC_r^s$ галочек. Пару вершин можно выбрать не более чем $\alpha_n^2 \sim n^{2s}\left(\dfrac{(2r-2s-1)!}{r!\,(r-s-1)!}\right)^2$ способами, а стало быть, всего вершин w не более

$$\alpha_n^2 2rC_r^s < C_4 n^{2s}.$$

Случай 2. Здесь нас интересуют галочки, у которых $|(\mathrm{supp}(u_1) \cup \mathrm{supp}(u_2)) \cap$ $\cap\, \mathrm{supp}(w)| = s$. Выберем одну вершину $u_1 \in \Gamma$ и в ее носителе зафиксируем s элементов. Пусть существует хотя бы одна такая галочка, что носитель ее центра w_0

пересекается с носителями краев u_1, u_2 именно по этим s элементам (будем называть их *фиксированными*), а носители ее краев, соответственно, пересекаются по фиксированным s и еще хотя бы по какому-нибудь одному элементу (см. рис. 4). Теперь посчитаем, сколько еще может быть краев галочек с краем в вершине u_1 и этими же s элементами (мы хотим оценить именно число краев; оценивать число центров для данной пары краев мы будем позже). Поскольку все носители краев галочек имеют общие фиксированные элементы с носителем u_1 и этих элементов s штук, каждый из носителей краев должен иметь некоторый $(s+1)$-й общий элемент с носителем u_1, иначе в независимом множестве вершин Γ образуется ребро. Более того, все края галочек, кроме u_1 и второго края галочки с центром w_0, не имеют ребра с w_0, ведь центр галочки имеет ровно два ребра с множеством Γ. Однако все носители этих краев и носитель w_0 имеют в пересечении одни и те же фиксированные s элементов. Значит, каждый из этих носителей краев должен иметь хотя бы один дополнительный общий элемент с носителем w_0. Таким образом, искомое число краев не больше величины

$$(r-s)^2 C_n^{r-s-2} \leqslant C_5 n^{r-s-2} = C_5 n^{s-1}.$$

Теперь для каждой пары краев галочек посчитаем, сколько центров w может существовать. Первые s элементов носителя зафиксированы – по ним w пересекается с носителями u_1 и u_2. Следующий элемент выбираем не более чем n способами вне носителей u_1 и u_2. А для выбора всех остальных элементов есть не более двух способов. Доказательство аналогично доказательству в случае 1 – иначе у нас будет три вершины w_1, w_2, w_3 без ребер, и множество $(\Gamma \setminus \{u_1, u_2\}) \cup \{w_1, w_2, w_3\}$ будет иметь большую, чем Γ, мощность, оставаясь независимым. Значит, для вершины u_1 и каких-то s элементов из ее носителя галочек с центрами в некоторых w не больше чем $2n$, откуда получаем, что число галочек с данным u_1 и данными s фиксированными элементами не превосходит величины $2nC_5n^{s-1} = C_6n^s$. Способов выбрать вершину u_1 и s элементов в ней, соответственно,

$$\alpha_n C_r^s \leqslant n^s C_7,$$

и значит, в текущем случае количество вершин w не больше чем

$$(C_6 n^s)(C_7 n^s) = C_8 n^{2s}.$$

Итак, в каждом из случаев имеем оценку величиной вида Cn^{2s}. Складывая все константы, получаем заявленную в лемме величину C_1. ▲

2.2. Доказательство теоремы 4. Пусть W – некоторое подмножество в множестве вершин графа $G(n, r, s)$, имеющее мощность $\ell = \ell(n)$. Рассмотрим наибольшее по мощности независимое множество Γ_1 в подграфе графа $G(n, r, s)$, порожденном множеством вершин W. Пусть его мощность равна $\beta_1 \leqslant \alpha_n$. Пусть F_1 – подмножество таких вершин в множестве $W \setminus \Gamma_1$, что для любой вершины $w \in F_1$ выполнено $n(\Gamma_1, w) \leqslant 2$. Пусть $f_1 = |F_1|$. Из леммы следует, что $f_1 \leqslant C_1 n^{2s}$. Заметим, что любая вершина $u \in W \setminus (\Gamma_1 \cup F_1)$ имеет хотя бы три ребра с Γ_1. Тогда найдено хотя бы

$$3(\ell(n) - f_1 - \beta_1) + f_1 \geqslant 3(\ell(n) - \alpha_n) - 2C_1 n^{2s}$$

ребер. Выкинем из W независимое множество Γ_1, и в получившемся множестве $W \setminus \Gamma_1$ выберем новое наибольшее независимое множество Γ_2 мощности $\beta_2 \leqslant \alpha_n$. Пусть F_2 – такое подмножество множества $W \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$, что для любой вершины $w \in F_2$ выполнено $n(\Gamma_2, w) \leqslant 2$. Пусть $f_2 = |F_2|$. Из леммы имеем оценку $f_2 \leqslant C_1 n^{2s}$. Мы снова нашли хотя бы

$$3(\ell(n) - 2\alpha_n) - 2C_1 n^{2s}$$

ребер. Повторив эту операцию $\left[\dfrac{\ell(n)}{\alpha_n}\right]$ раз, получим оценку

$$r(\ell(n)) \geqslant \sum_{i=1}^{[\ell(n)/\alpha_n]} \big(3(\ell(n) - i\alpha_n) - 2C_1 n^{2s}\big) \sim$$

$$\sim 3\ell(n)\frac{\ell(n)}{\alpha_n} - \frac{3}{2}\alpha_n \frac{\ell(n)}{\alpha_n}\left(\frac{\ell(n)}{\alpha_n} + 1\right) - \frac{\ell(n)}{\alpha_n} 2C_1 n^{2s} \sim$$

$$\sim 3\frac{\ell^2(n)}{\alpha_n} - \frac{3}{2}\frac{\ell^2(n)}{\alpha_n} - 2C_1 n^{2s}\frac{\ell(n)}{\alpha_n} \sim \frac{3}{2}\frac{\ell^2(n)}{\alpha_n}$$

при $n \to \infty$, поскольку по предположению $n^{2s} = o(\ell(n))$. Теорема 4 доказана. ▲

Автор признателен Андрею Михайловичу Райгородскому за многогранную поддержку, без которой работа не состоялась бы. Также автор признателен и выражает благодарность художнице рисунков и схем студентке ВШЭ Марии Сметаниной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Raigorodskii A.M.* Cliques and Cycles in Distance Graphs and Graphs of Diameters // Discrete Geometry and Algebraic Combinatorics (AMS Special Session on Discrete Geometry and Algebraic Combinatorics. San Diego, CA, USA. Jan. 11, 2013). Contemp. Math. V. 625. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2014. P. 93–109.
2. *Boltyanski V.G., Martini H., Soltan P.S.* Excursions into Combinatorial Geometry. Berlin: Springer, 2012.
3. *Бердников А.В., Райгородский А.М.* Оценки чисел Борсука по дистанционным графам специального вида // Пробл. передачи информ. 2021. Т. 57. № 2. С. 44–50. `https://doi.org/10.31857/S0555292321020030`
4. *Pach J., Agarwal P.K.* Combinatorial Geometry. New York: Wiley, 2011.
5. *Soifer A.* The Mathematical Coloring Book: Mathematics of Coloring and the Colorful Life of Its Creators. New York: Springer, 2009.
6. *Raigorodskii A.M., Koshelev M.M.* New Bounds on Clique-Chromatic Numbers of Johnson Graphs // Discrete Appl. Math. 2020. V. 283. P. 724–729. `https://doi.org/10.1016/j.dam.2020.01.015`
7. *Ипатов М.М., Кошелев М.М., Райгородский А.М.* Модулярность некоторых дистанционных графов // Докл. РАН. Матем., информ., процессы упр. 2020. Т. 490. № 1. С. 71–73. `https://doi.org/10.31857/S2686954320010142`
8. *Бобу А.В., Куприянов А.Э., Райгородский А.М.* Об одном обобщении кнезеровских графов // Матем. заметки. 2020. Т. 107. № 3. С. 351–365. `https://doi.org/10.4213/mzm12205`
9. *Bassalygo L., Cohen G., Zémor G.* Codes with Forbidden Distances // Discrete Math. 2000. V. 213. № 1–3. P. 3–11. `https://doi.org/10.1016/S0012-365X(99)00161-2`
10. *Мак-Вильямс Ф.Дж., Слоэн Н.Дж.А.* Теория кодов, исправляющих ошибки. М.: Связь, 1979.
11. *Graham R.L., Rothschild B.L., Spencer J.H.* Ramsey Theory. New York: Wiley, 1990.
12. *Kupavskii A., Sagdeev A.* All Finite Sets Are Ramsey in the Maximum Norm // Forum Math. Sigma. 2021. V. 9. Paper No. e55 (12 pp.). `https://doi.org/10.1017/fms.2021.50`
13. *Nagy Zs.* A Ramsey-szám egy konstruktiv becslése (A Constructive Estimation of the Ramsey Number) // Matem. Lapok. 1972. V. 23. № 3–4. P. 301–302.
14. *Райгородский А.М., Михайлов К.А.* О числах Рамсея для полных дистанционных графов с вершинами в $\{0,1\}^n$ // Матем. сб. 2009. Т. 200. № 12. С. 63–80. `https://doi.org/10.4213/sm6373`
15. *Пушняков Ф.А.* Новая оценка числа ребер в индуцированных подграфах специального дистанционного графа // Пробл. передачи информ. 2015. Т. 51. № 4. С. 71–77. `http://mi.mathnet.ru/ppi2188`

16. *Пушняков Ф.А.* О количествах ребер в порожденных подграфах некоторых дистанционных графов // Матем. заметки. 2019. Т. 105. № 4. С. 592–602. https://doi.org/10.4213/mzm11942

17. *Пушняков Ф.А., Райгородский А.М.* Оценка числа ребер в подграфах графа Джонсона // Докл. РАН. Матем., информ., процессы упр. 2021. Т. 499. № 1. С. 40–43. https://doi.org/10.31857/S2686954321040135

18. *Frankl P., Füredi Z.* Forbidding Just One Intersection // J. Combin. Theory Ser. A. 1985. V. 39. № 2. P. 160–176. https://doi.org/10.1016/0097-3165(85)90035-4

19. *Shabanov L.E., Raigorodskii A.M.* Turán Type Results for Distance Graphs // Discrete Comput. Geom. 2016. V. 56. № 3. P. 814–832. https://doi.org/10.1007/s00454-016-9817-z

Дубинин Никита Андреевич
Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)
nikita.dubinin2010@yandex.ua

Поступила в редакцию
10.05.2021
После доработки
04.09.2021
Принята к публикации
05.09.2021