ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

Том 58 2022 Вып. 1

УДК 621.391 : 519.725.3

 А.Ю. Баринов

# ПРИВЕДЕНИЕ РЕКУРСИВНЫХ ФИЛЬТРОВ К ПРЕДСТАВЛЕНИЮ РАЗРЕЖЕННЫМИ МАТРИЦАМИ

Рекурсивный фильтр как часть рекурсивного сверточного кодера имеет практическую значимость в схемах составных кодов с перемежением. В статье рассматривается матричное описание рекурсивных фильтров во временной области над конечным полем $\mathbb{F}_2$. Исследовано и формализовано приведение матриц, описывающих рекурсивные фильтры (с перфорацией), к разреженным матрицам специального вида. Основное внимание направлено на исследование двоичных последовательностей рекурсивных фильтров с перфорацией каждого второго бита. Дается приложение полученных разреженных матриц к нахождению перфорированных передаточных функций для таких фильтров. Предложен подход к минимальной схемной реализации перфорированных передаточных функций. Приведены примеры схемной реализации перфорированных турбокодов как двойных турбокодов.

*Ключевые слова*: рекурсивный фильтр, импульсная характеристика, перфорация, разреженная матрица, сверточный код, усечение сверточного кода, рекурсивный систематический сверточный кодер, минимальный кодер, двойной турбокод, идентификация перемежителя.

**DOI:** 10.31857/S0555292322010028

## § 1. Введение

Начиная с появления турбокодов [1], рекурсивные сверточные кодеры (кодеры с обратной связью) стали привлекать к себе повышенный интерес. Сегодня данные кодеры находят применение во многих передовых схемах помехоустойчивого кодирования, включая: классические (сверточные) турбокоды [1, 2], двойные (duo-binary) турбокоды [3, 4], коды повторения-накопления (repeat accumulate (RA) codes) [5, 6]. Перечисленные коды часто называют турбоподобными [7].

Рекурсивный сверточный кодер по сути является сверточным кодером общего вида и описывается рациональной матричной передаточной функцией (рациональной порождающей матрицей)

$$G(D) = \bigl\{g_{ij}(D) = f_{ij}(D)/q_{ij}(D),\ i = 0, \ldots, k-1,\ j = 0, \ldots, n-1\bigr\},$$

элементы которой – рациональные передаточные функции соответствующих рекурсивных фильтров, где формальная переменная $D$ имеет смысл задержки на один такт.

На практике, как правило, используют рекурсивные систематические сверточные кодеры (recursive systematic convolutional (RSC) encoders). Для достижения высоких скоростей передачи проверочная часть RSC-кодера подвергается перфорации (выкалыванию) [8], часто удаляют каждый второй символ проверочной части [1, 9].

Известно, что кодеры, порождающие один и тот же код, называются эквивалентными. В [10] показано, что для любого рекурсивного сверточного кодера $G_1(D)$ можно найти эквивалентный сверточный кодер $G_2(D)$ как

$$G_2(D) = Q(D)G_1(D),$$

где $Q(D) = \text{НОК}(\{q_{ij}(D)\})$.

Следовательно, исследование свойств сверточных кодов можно проводить на основе рассмотрения полиномиальных передаточных функций нерекурсивных фильтров. Например, рекурсивный фильтр $\dfrac{f(D)}{q(D)}$ можно привести к нерекурсивному фильтру $f(D) = q(D)\dfrac{f(D)}{q(D)}$.

В случае перфорации выходной последовательности рекурсивного фильтра вид его перфорированной рациональной передаточной функции не очевиден. С другой стороны, возможно представление рекурсивного фильтра с перфорацией во временной форме в виде матрицы бесконечного порядка, строки которой – перфорированные сдвиги импульсной характеристики фильтра.

В работе [11] предложено применять произведение матрицы рекурсивного фильтра (с перфорацией) $\dfrac{f(D)}{q(D)}$ на матрицу фильтра $q(D)$ справа к идентификации перемежителя турбоподобного кода. Это преобразование приводит к разреженной матрице со структурой и показало практическую ценность при идентификации перемежителя в условиях помех.

Основная цель настоящей статьи – исследование свойств (перфорированной) последовательности рекурсивного фильтра $\dfrac{f(D)}{q(D)}$ на основе анализа произведения матрицы данного фильтра на матрицу фильтра $q(D)$ во временной форме. В настоящей статье обобщается и доказывается теоретический результат, полученный в [11], а также рассматривается его приложение к нахождению полиномиального представления и схемной реализации RSC-кодера с перфорацией.

Статья организована следующим образом. В § 2 даются основные определения и обозначения, рассматривается матричное описание рекурсивных фильтров во временной области. В § 3 представлены результаты о разреженных матрицах, полученных из (перфорированных) матриц рекурсивных фильтров, в частности, с перфорацией каждого второго бита на выходе. В § 4 рассмотрено приложение представленных результатов к нахождению перфорированных передаточных функций для рекурсивных фильтров с перфорацией, предложен подход к минимальной схемной реализации данных функций, обсуждаются возможные схемные реализации некоторых турбокодов. Заключение дано в § 5.

## § 2. Предварительные сведения

Определение 1. Множество всевозможных последовательностей на выходе линейной схемы, приведенной на рис. 1, назовем сверточным кодом со скоростью $R = k/n$.

На практике в основном используются двоичные сверточные коды, поэтому далее в статье рассматриваются последовательности битов (логических 0 (нулей) и 1 (единиц)) и операции в конечном поле $\mathbb{F}_2$.

На каждом такте работы кодера ($i = 0, 1, \ldots$) на его вход поступает блок из $k$ входных информационных битов $\boldsymbol{u}_i = (u_{i,1}, \ldots, u_{i,k})$, тогда как с выхода схемы считывается очередной кодовый блок из $n$ кодовых битов $\boldsymbol{v}_i = (v_{i,1}, \ldots, v_{i,n})$. Таким образом, любой полубесконечной информационной последовательности $\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{u}_1, \ldots)$ сопоставляется полубесконечное кодовое слово $\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots)$.

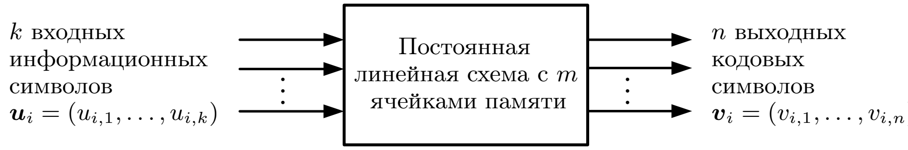


Рис. 1. Сверточный кодер со скоростью $R = k/n$

Кодирование сверточным кодом в полиномиальном виде представляет собой произведение

$$\boldsymbol{v}(D) = \boldsymbol{u}(D)G(D),$$

где $G(D)$ – матричная передаточная функция сверточного кодера.

Перфорированные сверточные коды были введены в [12] для получения высокоскоростных кодов. Перфорация кода состоит в систематическом удалении из процесса передачи в канал проверочных битов с выхода кодера. Матрица перфорации **Perf** задает правило удаления выходных битов. Обычно правило перфорации является периодическим [13].

О п р е д е л е н и е 2. Для сверточного кодера со скоростью $R = k/n$ матрица перфорации **Perf** – это двоичная $(n \times n_p)$-матрица, элементы которой $\mathrm{perf}_{ij}$ указывают, что соответствующий выходной бит будет передан ($\mathrm{perf}_{ij} = 1$) или нет ($\mathrm{perf}_{ij} = 0$), где $n$ – количество выходов кодера, $n_p$ – период перфорации, $i$ – номер выхода, $j$ – номер такта. Каждая строка данной матрицы представляет собой вектор перфорации $\mathbf{perf}_i$ для $i$-го выхода кодера.

Следует заметить, что множество последовательностей одного и того же сверточного кода может быть сгенерировано различными кодерами, причем некоторые кодеры могут быть предпочтительнее других. Для составных кодов часто выбирают компонентные рекурсивные сверточные кодеры, в том числе с перфорацией. Например, классический турбокод обычно основан на параллельном соединении RSC-кодеров вида $(1 \quad f(D)/q(D))$, тогда как в двойных турбокодах могут использовать RSC-кодеры вида $\begin{pmatrix} 1 & 0 & f(D)/q(D) \\ 0 & 1 & g(D)/q(D) \end{pmatrix}$. Неотъемлемой частью систематических кодов повторения-накопления, а также их модификаций, является RSC-кодер конкретного вида – $(1 \quad 1/(1+D))$ [6].

Рассмотрим RSC-кодер $(1 \quad f(D)/q(D))$. Данный RSC-кодер можно описать порождающей матрицей бесконечного порядка

$$\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{I} \quad \boldsymbol{P}),$$

где $\boldsymbol{I}$ – полубесконечная единичная матрица, $\boldsymbol{P}$ – полубесконечная матрица, генерирующая проверочные биты кода.

Матрица $\boldsymbol{P}$ представляет рекурсивный фильтр $f(D)/q(D)$ из состава RSC-кодера во временной области.

Рекурсивные сверточные кодеры строятся на основе рекурсивных фильтров $f(D)/q(D)$ с реализуемой (т.е. $q_0 = 1$) передаточной функцией

$$P(D) = \frac{f(D)}{q(D)} = \frac{f_0 + f_1 D + \ldots + f_m D^m}{1 + q_1 D + \ldots + q_m D^m},$$

где $m$ – память фильтра.

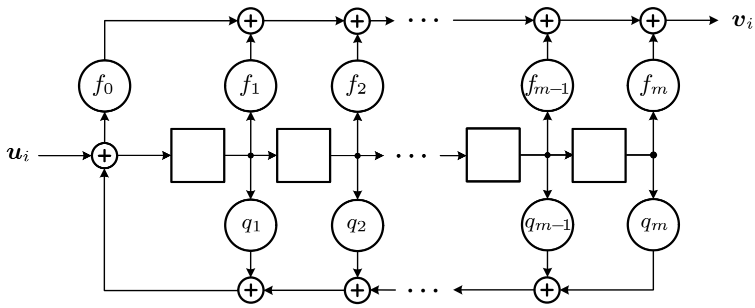


Рис. 2. Каноническая форма цифрового фильтра с вынесенными сумматорами (controller canonical form)

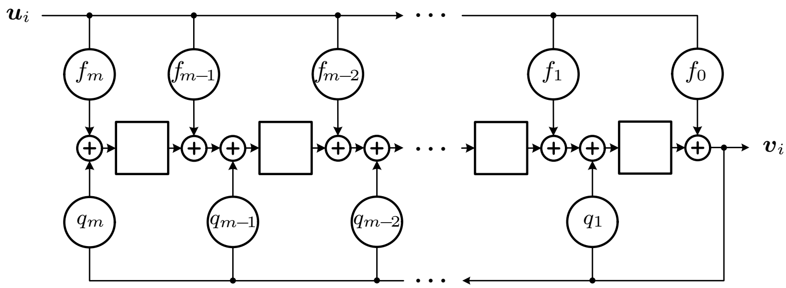


Рис. 3. Каноническая форма цифрового фильтра со встроенными сумматорами (observer canonical form)

Данные на входе и выходе фильтра представим в виде полиномов

$$u(D) = u_0 + u_1 D + u_2 D + \ldots,$$
$$v(D) = v_0 + v_1 D + v_2 D + \ldots,$$

тогда

$$v(D) = u(D)\frac{f(D)}{q(D)} = u(D)\frac{f_0 + f_1 D + \ldots + f_m D^m}{1 + q_1 D + \ldots + q_m D^m}.$$

С другой стороны, это равенство можно переписать как

$$v(D) = u(D)(f_0 + f_1 D + \ldots + f_m D^m) + v(D)(q_1 D + \ldots + q_m D^m).$$

Две канонические реализации фильтра с передаточной функцией $P(D) = f(D)/q(D)$ показаны на рис. 2, 3.

Рекурсивный фильтр использует элементы памяти и выполняет операции в $\mathbb{F}_2$ (т.е. с использованием логики “исключающее ИЛИ”) над содержимым памяти и информационными битами на своем входе. Во временной области рекурсивный фильтр можно описать разностным уравнением

$$v_i = \sum_{j=0}^{m} u_{i-j} f_j + \sum_{j=1}^{m} v_{i-j} q_j, \quad i = 0, 1, \ldots, \tag{1}$$

где здесь и далее в статье $x_{\text{ind}} = 0$ для всех $\text{ind} < 0$.

Саму операцию фильтрации можно записать как

$$v_i = \sum_{j=0}^{m} u_{i-j} p_i, \quad i = 0, 1, \ldots,$$

где здесь и далее $\{p_i\} = (p_0, p_1, \ldots)$ – биты бесконечной импульсной характеристики (БИХ) рекурсивного фильтра $P(D) = f(D)/q(D)$.

Данную операцию в матричном виде можно представить как

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}\boldsymbol{P},$$

где $\boldsymbol{P}$ – полубесконечная матрица, строки которой – сдвиги БИХ рекурсивного фильтра.

В реальности сеансы связи конечны, информацию передают блоками конечной длины (например, несколько тысяч бит) [13]. Самый простой способ получения блочного кода из сверточного кода – прямое усечение (direct truncation) [14]. Для RSC-кодера $(1 \quad f(D)/q(D))$ конструкция с прямым усечением кодовых последовательностей приводит к блочному $(2K, K, d_{DT})$-коду $C_{DT}$ с матрицей $\boldsymbol{P}^{(DT)}$, генерирующей проверочные биты данного кода

$$\boldsymbol{P}^{(DT)} = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & \cdots & & p_{K-1} \\ & p_0 & p_1 & \cdots & p_{K-2} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & p_0 & p_1 \\ & & & & p_0 \end{pmatrix},$$

здесь и далее пустые области матриц считаются заполненными нулями.

Усечение с обнулением состояния (zero-tail termination) предусматривает добавление “хвоста” из $m$ нулей к каждому информационному блоку длины $K$, при этом на период заполнения памяти $m$ нулями обратную связь кодера отключают [15]. В случае RSC-кодера $(1 \quad f(D)/q(D))$ данная конструкция приводит к блочному $(2K + 2m, K, d_{ZT})$-коду $C_{ZT}$ с матрицей $\boldsymbol{P}^{(ZT)}$, генерирующей проверочные биты данного кода

$$\boldsymbol{P}^{(ZT)} = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & \cdots & & p_{K-1} & & & \\ & p_0 & p_1 & \cdots & p_{K-2} & & & \\ & & \ddots & \ddots & \vdots & f_m & & \\ & & & p_0 & p_1 & \vdots & \ddots & \\ & & & & p_0 & f_1 & \cdots & f_m \end{pmatrix}.$$

При циклическом усечении (tail-biting) [10,14] для RSC-кодера $(1 \quad f(D)/q(D))$ на длине $K$ получаем блочный $(2K, K, d_{TB})$-код $C_{TB}$ с матрицей $\boldsymbol{P}^{(TB)}$, генерирующей проверочные биты данного кода

$$\boldsymbol{P}^{(TB)} = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & \cdots & p_{K-2} & p_{K-1} \\ p_{K-1} & p_0 & \cdots & p_{K-3} & p_{K-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ p_2 & p_3 & \cdots & p_0 & p_1 \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_{K-1} & p_0 \end{pmatrix}.$$

## § 3. Приведение рекурсивных фильтров к представлению разреженными матрицами

В этом параграфе проанализируем приведение матриц, описывающих рекурсивные фильтры $f(D)/q(D)$ (с перфорацией) во временной форме, к разреженным матрицам специального вида. Данное приведение выражается в умножении на матрицу $\boldsymbol{Q}$, соответствующую полиному $q(D)$ в знаменателе рекурсивного фильтра.

Определение 3. Матрица, имеющая небольшой процент ненулевых элементов, называется разреженной.

В настоящей статье матрица размера $M \times K$, содержащая $\tau$ единиц, будет считаться разреженной, если $\tau \ll MK$, причем $MK > 10^3$.

Определение 4. Разреженная матрица $\boldsymbol{G}$ называется ленточной матрицей с шириной ленты $\beta$, если для всех ее ненулевых элементов $g_{ij}$ выполняется условие $|i - j| \leqslant \beta$.

Рассмотрим рекурсивный фильтр $P(D) = f(D)/q(D)$, которому во временной области соответствует полубесконечная матрица $\boldsymbol{P}$.

Теорема 1. *Пусть $\boldsymbol{P}$ – матрица, строки которой являются сдвигами импульсного отклика фильтра $f(D)/q(D)$, $\boldsymbol{Q}$ – матрица, строки которой являются сдвигами импульсного отклика фильтра $q(D)$. Тогда $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{QP} = \boldsymbol{PQ}$ – матрица, строки которой являются сдвигами импульсного отклика фильтра $f(D)$ и представляет собой ленточную матрицу с шириной ленты $\beta \leqslant m + 1$.*

Доказательство. В полиномиальном представлении матрице $\boldsymbol{P}$ соответствует передаточная функция $P(D) = f(D)/q(D)$, тогда передаточная функция $q(D)P(D) = f(D)$ во временной области может быть представлена в виде

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{QP} = \boldsymbol{PQ} = \begin{pmatrix} f_0 & f_1 & \dots & f_m & & \\ & f_0 & f_1 & \dots & f_m & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

где

$$f_i = \sum_{j=0}^{m} q_j p_{i-j}, \quad i = 0, 1, \dots, m. \quad \blacktriangle$$

Последнее уравнение можно использовать для построения рекурсивного фильтра $f(D)/q(D)$ по первым битам его БИХ при известном $q(D)$.

Если определенные биты на выходе рекурсивного фильтра удаляются, то данному фильтру с перфорацией соответствует матрица $\boldsymbol{P}_{\mathrm{perf}}$.

Обычно правило перфорации является периодическим. Например, при удалении каждого второго бита на выходе рекурсивного фильтра согласно вектору перфорации $\mathbf{perf} = (0 \quad 1)$ получим матрицу

$$\boldsymbol{P}_{(0\ 1)} = \begin{pmatrix} p_1 & p_3 & p_5 & \dots & & & \\ p_0 & p_2 & p_4 & \dots & & & \\ & p_1 & p_3 & p_5 & \dots & & \\ & p_0 & p_2 & p_4 & \dots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

согласно вектору перфорации $\mathbf{perf} = (1 \quad 0)$ соответственно получим

$$\boldsymbol{P}_{(1\ 0)} = \begin{pmatrix} p_0 & p_2 & p_4 & \dots & & & & \\ & p_1 & p_3 & p_5 & \dots & & & \\ & p_0 & p_2 & p_4 & \dots & & & \\ & & p_1 & p_3 & p_5 & \dots & & \\ & & p_0 & p_2 & p_4 & \dots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Далее в статье перфорация каждого второго бита преимущественно рассматривается на примере вектора перфорации $\mathbf{perf} = (0 \quad 1)$, что соответствует перфорации нечетных битов. Рассуждения для перфорации четных битов, т.е. согласно вектору перфорации $\mathbf{perf} = (1 \quad 0)$, аналогичны.

Из теоремы 1 получаем

Следствие 1. *Матрицу $\boldsymbol{F}_{\mathrm{perf}}$, описывающую фильтр $f(D)$ с перфорацией, можно получить в результате умножения матрицы $\boldsymbol{P}_{\mathrm{perf}}$ на соответствующую полиному обратной связи $q(D)$ ленточную матрицу $\boldsymbol{Q}$ слева*:

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{perf}} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}_{\mathrm{perf}},$$

*альтернативным образом матрицу $\boldsymbol{F}_{\mathrm{perf}}$ можно получить удалением определенных столбцов соответствующей матрицы $\boldsymbol{F}$.*

С другой стороны, для решения задачи идентификации перемежителя в работе [11] предложено умножать матрицу $\boldsymbol{P}_{(0\ 1)}$, описывающую рекурсивный фильтр $f(D)/q(D)$ с перфорацией, на соответствующую полиному обратной связи $q(D)$ ленточную матрицу $\boldsymbol{Q}$ справа. При этом получим следующую матрицу:

$$\boldsymbol{Y}_{(0\ 1)} = \boldsymbol{P}_{(0\ 1)}\boldsymbol{Q}. \tag{2}$$

В работе [11] утверждается, что матрица $\boldsymbol{Y}_{(0\ 1)}$ генерирует модифицированную перфорированную последовательность рекурсивного фильтра, каждый член которой зависит от ограниченного количества $\leqslant 2m$ входных информационных битов. Докажем данное утверждение, которое имеет значение для идентификации перемежителя турбоподобного кода в условиях априорной неопределенности при наличии помех.

Теорема 2. *Пусть матрица $\boldsymbol{P}_{(0\ 1)}$ описывает рекурсивный фильтр $\dfrac{f(D)}{q(D)} = \dfrac{f_0 + f_1 D + \ldots + f_m D^m}{1 + q_1 D + \ldots + q_m D^m}$ с перфорацией. Тогда матрица $\boldsymbol{Y}_{(0\ 1)} = \boldsymbol{P}_{(0\ 1)}\boldsymbol{Q}$ является разреженной.*

Доказательство. Матрица $\boldsymbol{Y}_{(0\ 1)}$ является результатом произведения матриц специального вида, следовательно, может быть представлена в виде

$$\boldsymbol{Y}_{(0\ 1)} = \begin{pmatrix} y_1 & y_3 & y_5 & \dots & & & \\ y_0 & y_2 & y_4 & \dots & & & \\ & y_1 & y_3 & y_5 & \dots & & \\ & y_0 & y_2 & y_4 & \dots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

где

$$y_i = \sum_{j=0}^{m} q_j p_{i-2j}, \quad i = 0, 1, \ldots \tag{3}$$

Если в уравнении (1) информационная последовательность является импульсным (единичным) воздействием $\{u_i\} = (1, 0, 0, 0, \ldots)$, то получим уравнение импульсной характеристики рекурсивного фильтра $f(D)/q(D)$

$$p_i = f_i + \sum_{j=1}^{m} q_j p_{i-j}, \quad i = 0, 1, \ldots, \tag{4}$$

где $f_i \overset{\text{def}}{=} 0$ для всех $i > m$.

Уравнение (3) с учетом (4) и $q_0 = 1$ примет вид

$$\begin{aligned} y_i &= p_i + \sum_{j=1}^{m} q_j p_{i-2j} = f_i + \sum_{j=1}^{m} q_j p_{i-j} + \sum_{j=1}^{m} q_j p_{i-2j} = \\ &= f_i + \sum_{j=1}^{m} q_j f_{i-j} + \left( \sum_{j=1}^{m} q_j \sum_{l=1}^{m} q_l p_{i-j-l} + \sum_{j=1}^{m} q_j p_{i-2j} \right), \end{aligned}$$

в поле $\mathbb{F}_2$ выражение в скобках равно нулю, следовательно,

$$y_i = \sum_{j=0}^{m} q_j f_{i-j}, \quad i = 0, 1, \ldots,$$

где $f_{i-j} \overset{\text{def}}{=} 0$ для всех $i - j > m$.

Тогда понятно, что $y_i = 0$ для всех $i > 2m$, и матрицу $\boldsymbol{Y}_{(0\ 1)}$ можно переписать в виде

$$\boldsymbol{Y}_{(0\ 1)} = \begin{pmatrix} y_1 & y_3 & \cdots & y_{2m-1} & & & \\ y_0 & y_2 & \cdots & y_{2m-2} & y_{2m} & & \\ & y_1 & \cdots & y_{2m-3} & y_{2m-1} & & \\ & y_0 & \cdots & y_{2m-4} & y_{2m-2} & y_{2m} & \\ & & \ddots & \vdots & y_{2m-3} & y_{2m-1} & \\ & & & y_1 & \vdots & y_{2m-2} & \ddots \\ & & & y_0 & y_2 & \vdots & \ddots \\ & & & & y_1 & y_3 & \ddots \\ & & & & y_0 & y_2 & \ddots \\ & & & & & y_1 & \ddots \\ & & & & & y_0 & \ddots \\ & & & & & & \ddots \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где

$$y_i = \sum_{j=0}^{m} q_j f_{i-j}, \quad i = 0, 1, \ldots, 2m, \tag{6}$$

где $f_{i-j} \overset{\text{def}}{=} 0$ для всех $i - j > m$.

Таким образом, матрица $\boldsymbol{Y}_{(0\ 1)}$ является разреженной. ▲

Пусть матрица $\boldsymbol{P}'_{(0\ 1)}$ описывает рекурсивный фильтр $q(D)/f(D)$, тогда для матрицы (5) справедливо свойство

$$\boldsymbol{Y}_{(0\ 1)} = \boldsymbol{P}_{(0\ 1)} \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{P}'_{(0\ 1)} \boldsymbol{F}.$$

Данное свойство следует из теоремы 2 и проверяется вычислением согласно уравнению (6), которое симметрично относительно своих членов.

Особый случай представляют RA-коды, а также их модификации, где одной из ключевых компонент является фильтр с передаточной функцией $1/(1+D)$ с разными правилами перфорации.

Следующий пример иллюстрирует приведение матрицы $\boldsymbol{P}_{\text{perf}}$, соответствующей фильтру $1/(1+D)$ с произвольной перфорацией, к разреженному виду.

П р и м е р 1. Для матрицы $\boldsymbol{P}_{\text{perf}}$, описывающей рекурсивный фильтр $1/(1+D)$, получим вид матрицы $\boldsymbol{Y}_{\text{perf}} = \boldsymbol{P}_{\text{perf}}\boldsymbol{Q}$, где матрица $\boldsymbol{Q}$ соответствует полиному $q(D) = 1 + D$.

БИХ рекурсивного фильтра $1/(1+D)$ во временной области представляет собой последовательность единиц $\{p_i\} = (1111111\ldots)$, которая инвариантна к перфорации. Следовательно, матрица $\boldsymbol{P}_{\text{perf}}$, порождающая перфорированную последовательность рекурсивного фильтра $1/(1+D)$, имеет перфорированную ступенчатую структуру, заполненную единицами, при этом высота каждой ступени зависит от правила перфорации.

Тогда с учетом структур матриц $\boldsymbol{P}_{\text{perf}}$ и $\boldsymbol{Q}$ получим

$$\boldsymbol{Y}_{\text{perf}} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & \vdots & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & \vdots & \\ & & & 1 & \ddots \end{pmatrix}.$$

Таким образом, матрица $\boldsymbol{Y}_{\text{perf}}$ представляет собой разреженную матрицу со ступенчатой структурой, где длина серии единиц в каждом блоке-столбце зависит от правила перфорации.

В связи с тем, что в практических приложениях данные передают блоками конечной длины, рассмотрим разреженные матрицы, соотносящиеся с матрицами, генерирующими проверочные биты блочных кодов.

Очевидно, что при прямом усечении выполнены равенства $\boldsymbol{F}^{(DT)} = \boldsymbol{P}^{(DT)}\boldsymbol{Q}^{(DT)}$ и $\boldsymbol{Y}^{(DT)}_{(0\ 1)} = \boldsymbol{P}^{(DT)}_{(0\ 1)}\boldsymbol{Q}^{(DT)}$, где $\boldsymbol{Q}^{(DT)}$ – квадратная матрица соответствующего размера, полученная из матрицы $\boldsymbol{Q}$ прямым усечением.

Также понятно, что в случае усечения с обнулением состояния имеем $\boldsymbol{F}^{(ZT)} = \boldsymbol{P}^{(ZT)}\boldsymbol{Q}^{(ZT)}$, где $\boldsymbol{Q}^{(ZT)}$ – матрица размера $(K+m)\times(K+m)$

$$\boldsymbol{Q}^{(ZT)} = \begin{pmatrix} q_0 & q_1 & \cdots & & q_{K-1} & & & \\ & q_0 & q_1 & \cdots & q_{K-2} & & & \\ & & \ddots & \ddots & \vdots & & & \\ & & & q_0 & q_1 & & & \\ & & & & q_0 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix},$$

и $\boldsymbol{Y}^{(ZT)}_{(0\ 1)} = \boldsymbol{P}^{(ZT)}_{(0\ 1)}\boldsymbol{Q}^{(ZT)}$, где $\boldsymbol{Q}^{(ZT)}$ – матрица соответствующего размера.

Т е о р е м а 3. *Пусть матрица $\boldsymbol{P}^{(TB)}$ описывает рекурсивный фильтр при циклическом усечении. Тогда матрица $\boldsymbol{A}^{(TB)} = \boldsymbol{P}^{(TB)}\boldsymbol{Q}^{(TB)}$ является разреженной циркулянтной матрицей.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. $\boldsymbol{Q}^{(TB)}$ – циркулянтная матрица, полученная из матрицы $\boldsymbol{Q}$ циклическим усечением на длине $K$. Из структур матриц $\boldsymbol{P}^{(TB)}$ и $\boldsymbol{Q}^{(TB)}$ видно, что $\boldsymbol{A}^{(TB)} = \boldsymbol{P}^{(TB)}\boldsymbol{Q}^{(TB)} = \boldsymbol{Q}^{(TB)}\boldsymbol{P}^{(TB)}$, где

$$\boldsymbol{A}^{(TB)} = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{K-2} & a_{K-1} \\ a_{K-1} & a_0 & \dots & a_{K-3} & a_{K-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \dots & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{K-1} & a_0 \end{pmatrix},$$

$$a_i = \sum_{j=0}^{m} q_j p_{(i-j+K) \bmod K}, \quad i = 0, 1, \dots, K-1.$$

Данное уравнение с учетом (4) и равенства $q_0 = 1$ примет вид

$$a_i = f_i + \sum_{j=1}^{m} q_j p_{i-j} + \sum_{j=1}^{m} q_j p_{(i-j+K) \bmod K},$$

где $f_i \overset{\text{def}}{=} 0$ для всех $i > m$.

Понятно, что при $i > m$ имеем $a_i = 0$. Тогда матрицу $\boldsymbol{A}^{(TB)}$ можно представить в виде

$$\boldsymbol{A}^{(TB)} = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_m & & & & \\ & a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_m & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_m \\ a_m & & & & a_0 & a_1 & \dots & a_{m-1} \\ \vdots & \ddots & & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_1 & \dots & a_m & & & & & a_0 \end{pmatrix},$$

где

$$a_i = \sum_{j=0}^{m} q_j p_{(i-j+K) \bmod K}, \quad i = 0, 1, \dots, m. \quad \blacktriangle$$

Т е о р е м а 4. *Пусть $\boldsymbol{P}^{(TB)}_{(0\ 1)}$ – циркулянтная матрица, описывающая рекурсивный фильтр с перфорацией. Тогда матрица $\boldsymbol{B}^{(TB)}_{(0\ 1)} = \boldsymbol{P}^{(TB)}_{(0\ 1)}\boldsymbol{Q}^{(TB)}$ является разреженной циркулянтной матрицей.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим матрицу

$$\boldsymbol{B}^{(TB)}_{(0\ 1)} = \begin{pmatrix} b_1 & b_3 & \dots & b_{K-3} & b_{K-1} \\ b_0 & b_2 & \dots & b_{K-4} & b_{K-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_3 & b_5 & \dots & b_{K-1} & b_1 \\ b_2 & b_4 & \dots & b_{K-2} & b_0 \end{pmatrix},$$

где

$$b_i = \sum_{j=0}^{m} q_j p_{(i-2j+K) \bmod K}, \quad i = 0, 1, \ldots, K-1.$$

Данное уравнение с учетом (4) и $q_0 = 1$ примет вид

$$b_i = f_i + \sum_{j=1}^{m} q_j f_{i-j} + \left( \sum_{j=1}^{m} q_j \sum_{l=1}^{m} q_l p_{i-j-l} + \sum_{j=1}^{m} q_j p_{(i-2j+K) \bmod K} \right),$$

где $f_i \overset{\text{def}}{=} 0$ для всех $i > m$, $f_{i-j} \overset{\text{def}}{=} 0$ для всех $i - j > m$.

В поле $\mathbb{F}_2$ при $i \geqslant 2m$ выражение в скобках равно нулю, следовательно, при $i > 2m$ имеем $b_i = 0$. Тогда матрицу $\boldsymbol{B}^{(TB)}_{(0\ 1)}$ можно представить в виде

$$\boldsymbol{B}^{(TB)}_{(0\ 1)} = \begin{pmatrix}
b_1 & b_3 & \ldots & b_{2m-1} & & & & & & & \\
b_0 & b_2 & \ldots & b_{2m-2} & b_{2m} & & & & & & \\
 & b_1 & \ldots & b_{2m-3} & b_{2m-1} & & & & & & \\
 & b_0 & \ldots & b_{2m-4} & b_{2m-2} & \ddots & & & & & \\
 & & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & b_{2m} & & & & \\
 & & & b_1 & b_3 & \ddots & b_{2m-1} & & & & \\
 & & & b_0 & b_2 & \ddots & b_{2m-2} & b_{2m} & & & \\
 & & & & b_1 & \ddots & b_{2m-3} & b_{2m-1} & & & \\
 & & & & b_0 & \ddots & b_{2m-4} & b_{2m-2} & b_{2m} & & \\
 & & & & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & b_{2m} \\
 & & & & & & b_1 & b_3 & b_5 & \ldots & b_{2m-1} \\
b_{2m} & & & & & & b_0 & b_2 & b_4 & \ldots & b_{2m-2} \\
b_{2m-1} & & & & & & & b_1 & b_3 & \ldots & b_{2m-3} \\
b_{2m-2} & b_{2m} & & & & & & b_0 & b_2 & \ldots & b_{2m-4} \\
b_{2m-3} & b_{2m-1} & & & & & & & b_1 & \ldots & b_{2m-5} \\
\vdots & \vdots & & & & & & & & \ddots & \vdots \\
b_3 & b_5 & \ddots & & & & & & & & b_1 \\
b_2 & b_4 & \ldots & b_{2m} & & & & & & & b_0
\end{pmatrix},$$

где

$$b_i = \sum_{j=0}^{m} q_j p_{(i-2j+K) \bmod K}, \quad i = 0, 1, \ldots, 2m. \quad \blacktriangle$$

## § 4. Варианты реализации рекурсивных фильтров с перфорацией

В этом параграфе для некоторых рекурсивных фильтров с перфорацией, воспользовавшись равенством (2), получим перфорированные передаточные функции. Рассмотрим новый подход к минимальной реализации полученных функций и их связь с двойными RSC-кодерами.

Т е о р е м а 5. *Перфорация каждого второго бита на выходе рекурсивного фильтра* $P(D) = f(D)/q(D) = \dfrac{f_0 + f_1 D + \ldots + f_m D^m}{1 + q_1 D + \ldots + q_m D^m}$ *приводит к рекурсивному фильтру* *с перфорированной рациональной передаточной функцией*

$$P_{(0\ 1)}(D) = \begin{pmatrix} y_1(D)/q(D) \\ y_0(D)/q(D) \end{pmatrix}$$

*в случае перфорации нечетных битов, и*

$$P_{(1\ 0)}(D) = \begin{pmatrix} y_0(D)/q(D) \\ Dy_1(D)/q(D) \end{pmatrix}$$

*в случае перфорации четных битов, где*

$$y_0(D) = y_0 + y_2 D + y_4 D^2 + \ldots + y_{2m} D^m,$$
$$y_1(D) = y_1 + y_3 D + y_5 D^2 + \ldots + y_{2m-1} D^{m-1},$$

*а коэффициенты* $(y_0, y_1, \ldots, y_{2m})$ *определяются формулой* (6) *по коэффициентам* $(f_0, f_1, \ldots, f_m)$ *и* $(q_0 = 1, q_1, \ldots, q_m)$ *фильтра* $f(D)/q(D)$.

Доказательство. В соответствии с теоремой 2 и структурой матрицы (5) равенство (2) можно записать в полиномиальном виде как

$$Y_{(0\ 1)}(D) = P_{(0\ 1)}(D) q(D),$$

где

$$P_{(0\ 1)}(D) = \begin{pmatrix} p_1(D) \\ p_0(D) \end{pmatrix},$$
$$p_0(D) = p_0 + p_2 D + p_4 D^2 + \ldots,$$
$$p_1(D) = p_1 + p_3 D + p_5 D^2 + \ldots,$$

$\{p_i\} = (p_0, p_1, \ldots)$ – БИХ рекурсивного фильтра $P(D) = f(D)/q(D)$,

$$Y_{(0\ 1)}(D) = \begin{pmatrix} y_1(D) \\ y_0(D) \end{pmatrix}.$$

В силу этого

$$P_{(0\ 1)}(D) = \begin{pmatrix} y_1(D)/q(D) \\ y_0(D)/q(D) \end{pmatrix}.$$

Вид функции $P_{(1\ 0)}(D)$ доказывается аналогично. ▲

В качестве следствия теоремы 5 получаем

Следствие 2. *Для рекурсивного фильтра* $P(D) = f(D)/q(D)$ *с* $t$*-кратной перфорацией каждого второго бита, определяемой вектором* $\mathbf{perf} = (0\ \ 1)$, *перфорированная рациональная передаточная функция имеет вид*

$$P_{\mathrm{perf}^{(t)}}(D) = \begin{pmatrix} y_{2^t-1}(D)/q(D) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_1(D)/q(D) \\ y_0(D)/q(D) \end{pmatrix},$$

*где каждый из полиномов* $y_0(D), y_1(D), \ldots, y_{2^t-1}(D)$ *имеет степень* $\leqslant m$.

Рассмотрим следующий

Пример 2. В RA-кодах, а также в их модификациях, одной из ключевых компонент является фильтр с передаточной функцией $1/(1+D)$ с разными правилами перфорации. Для случая перфорации каждого второго бита на выходе данного

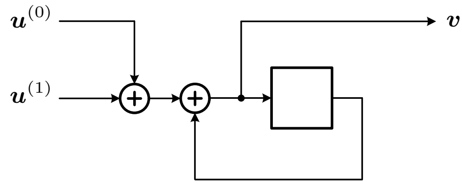


Рис. 4. Двойной рекурсивный фильтр для примера 2

фильтра, применив теорему 5, получим перфорированную рациональную передаточную функцию

$$P_{(0\ 1)}(D) = \begin{pmatrix} 1/(1+D) \\ 1/(1+D) \end{pmatrix}.$$

Легко заметить, что полученную функцию можно оптимально реализовать как двойной рекурсивный фильтр, изображенный на рис. 4.

Однако схемная реализация функции $P_{(0\ 1)}(D)$ общего вида с минимальным количеством элементов памяти далеко не очевидна. Можно воспользоваться стандартным методом минимизации последовательных схем (см., например, [16, 17]).

Представим оригинальный подход к минимальной схемной реализации функции вида $P_{(0\ 1)}(D)$ на основе анализа импульсных характеристик, которые являются полной характеристикой системы.

Сперва сформулируем свойство импульсной характеристики фильтра $f(D)/q(D)$ в виде следующей леммы.

Лемма 1. *Предположим, что полином обратной связи $q(D)$ для рекурсивного фильтра $f(D)/q(D)$ памяти $m$ является примитивным, а это означает, что в состав фильтра входит регистр сдвига с линейной обратной связью (РСЛОС), генерирующий повторяющуюся последовательность максимальной длины $N = 2^m - 1$: $\{\boldsymbol{h}, \boldsymbol{h}, \ldots, \boldsymbol{h}, \ldots\}$, где $\boldsymbol{h} = (h_1, h_2, \ldots, h_N)$. Тогда импульсная характеристика данного фильтра имеет вид $\boldsymbol{p} = \{f_0, \boldsymbol{h}(i), \boldsymbol{h}(i), \ldots, \boldsymbol{h}(i), \ldots\}$, где $\boldsymbol{h}(i)$ – $i$-кратный циклический сдвиг вектора $\boldsymbol{h}$, т.е. $\boldsymbol{h}(i) = (h_{N-i+1}, h_{N-i+2}, \ldots, h_N, h_1, h_2, \ldots, h_{N-i})$, $i \in [1, \ldots, N]$.*

Доказательство. Рассмотрим отклик рекурсивного фильтра $f(D)/q(D)$, реализованного в канонической форме со встроенными сумматорами (см. рис. 3), на единичный проходящий бит при нулевых начальных условиях $S_0$. Видно, что на первом такте в ячейки памяти фильтра производится запись некоторого ненулевого состояния $S_1$, а первый бит импульсной характеристики $p_0 = f_0$. При этом состояние $S_1$ зависит от мест подсоединения отводов фильтра. Поскольку в состав рекурсивного фильтра входит РСЛОС, генерирующий последовательность максимальной длины, то последующие состояния фильтра имеют вид $\{S_1, S_2, \ldots, S_N, S_1, \ldots\}$, т.е. повторяются через каждые $N$ тактов. Следовательно, со второго такта импульсная характеристика рекурсивного фильтра определяется последовательностью максимальной длины, сгенерированной РСЛОС из некоторого состояния $S_1$. ▲

Суть предлагаемого подхода к минимальной реализации фильтра изложена в следующей теореме.

Теорема 6. *Рациональную передаточную функцию вида*

$$P_{(0\ 1)}(D) = \begin{pmatrix} f(D)/q(D) = \dfrac{f_0 + f_1 D + \ldots + f_m D^m}{1 + q_1 D + \ldots + q_m D^m} \\[2ex] g(D)/q(D) = \dfrac{g_0 + g_1 D + \ldots + g_m D^m}{1 + q_1 D + \ldots + q_m D^m} \end{pmatrix},$$

*где $q(D)$ – примитивный полином степени $m$, можно реализовать на основе только схемы фильтра $f(D)/q(D)$ или фильтра $g(D)/q(D)$ с использованием дополнительных сумматоров.*

Доказательство. Возьмем фильтр $f(D)/q(D)$ в канонической форме с вынесенными сумматорами (см. рис. 2). Изначально все разряды данного фильтра заполнены нулями и находятся в состоянии $S_0$. При импульсном воздействии последующие состояния и соответствующие им биты импульсной характеристики фильтра $f(D)/q(D)$ имеют вид

$$\begin{array}{cccccccc} S_0 & S_1 & S_2 & \dots & S_N & S_1 & S_2 & \dots \\ p_0 = f_0 & p_1 & p_2 & \dots & p_N & p_1 & p_2 & \dots \end{array}$$

Теперь возьмем фильтр $g(D)/q(D)$ в канонической форме с вынесенными сумматорами. Применяя лемму 1, импульсную характеристику фильтра $g(D)/q(D)$ выразим через биты $(p_1, p_2, \dots, p_N, \dots)$ импульсной характеристики фильтра $f(D)/q(D)$ как

$$g_0 \quad p_{N-i+1} \quad p_{N-i+2} \quad \cdots \quad p_N \quad p_1 \quad p_2 \quad \cdots \quad p_{N-i} \quad p_{N-i+1} \quad p_{N-i+2} \quad \cdots$$

Тогда соответствие между состояниями и импульсной характеристикой фильтра $g(D)/q(D)$ в терминах фильтра $f(D)/q(D)$ имеет вид

$$\begin{array}{ccccccccccc} S_0 & S^* = S_{N-i+1} & S_{N-i+2} & \dots & S_N & S_1 & S_2 & \dots & S_{N-i} & S_{N-i+1} & S_{N-i+2} & \dots \\ g_0 & p_{N-i+1} & p_{N-i+2} & \dots & p_N & p_1 & p_2 & \dots & p_{N-i} & p_{N-i+1} & p_{N-i+2} & \dots \end{array}$$

Из этого соответствия следует, что фильтр $g(D)/q(D)$ можно реализовать на основе фильтра $f(D)/q(D)$ в канонической форме с вынесенными сумматорами (см. рис. 2), если на первом такте работы (отклика на единичное воздействие) фильтра на рис. 2:

– записать в ячейки памяти фильтра $d_1\ d_2\ \dots\ d_m$ состояние $S^* = S_{N-i+1}$;

– обеспечить начальный бит импульсной характеристики фильтра $g_0$.

Указанные требования можно выполнить, подав входную последовательность на встроенные в соответствующих местах схемы на рис. 2 сумматоры.

Таким образом, возможный вариант реализации функции $P_{(0\ 1)}(D)$ – это схема фильтра $f(D)/q(D)$ на рис. 2, в которую добавлен второй вход через встроенные в соответствующих местах дополнительные сумматоры.

Реализация функции $P_{(0\ 1)}(D)$ на основе фильтра $g(D)/q(D)$ доказывается аналогично. ▲

С учетом вышеизложенного представим алгоритм минимальной реализации рекурсивного фильтра $f(D)/q(D)$ с перфорацией каждого второго бита как двойного рекурсивного фильтра, где $q(D)$ – примитивный полином.

<u>Шаг 1</u>: Для фильтра $f(D)/q(D) = \dfrac{f_0 + f_1 D + \ldots + f_m D^m}{1 + q_1 D + \ldots + q_m D^m}$ получить перфорированную рациональную передаточную функцию

$$P_{(0\ 1)}(D) = \begin{pmatrix} y_1(D)/q(D) = \dfrac{y_1 + y_3 D + y_5 D^2 + \ldots + y_{2m-1} D^{m-1}}{1 + q_1 D + \ldots + q_m D^m} \\ y_0(D)/q(D) = \dfrac{y_0 + y_2 D + y_4 D^2 + \ldots + y_{2m} D^m}{1 + q_1 D + \ldots + q_m D^m} \end{pmatrix},$$

где

$$y_i = \sum_{j=0}^{m} q_j f_{i-j}, \quad i = 0, 1, \ldots, 2m,$$

$q_0 = 1,\ f_{i-j} \overset{\text{def}}{=} 0$ для всех $i - j > m$.

Шаг 2: Взять фильтр $y_1(D)/q(D)$ в канонической форме с вынесенными сумматорами и записать его $N + 1 = 2^m$ состояний при импульсном воздействии, начиная с начального нулевого состояния $S_0$:

$$S_0, S_1, S_2, \ldots, S_N. \tag{7}$$

Шаг 3: Первые $2^m$ битов импульсной характеристики фильтра $y_1(D)/q(D)$

$$\{y_1, p_1, p_2, \ldots, p_N\}$$

сравнить с первыми $2^m$ битами импульсной характеристики фильтра $y_0(D)/q(D)$

$$\{y_0, p_{N-i+1}, p_{N-i+2}, \ldots, p_{N-i}\}.$$

Найти сдвиг $i$.

Определить состояние $S^* = S_{N-i+1}$ из (7).

Шаг 4: На схеме фильтра $y_1(D)/q(D)$ в канонической форме с вынесенными сумматорами организовать второй вход через встроенные в схему дополнительные сумматоры. Данный вход организовать таким образом, чтобы при поданном на него импульсном воздействии на первом такте работы фильтра выполнялись условия:

– запись в ячейки памяти фильтра $d_1\ d_2\ \ldots\ d_m$ состояния $S^*$;
– обеспечение начального бита импульсной характеристики фильтра $p_0 = y_0$.

Заметим, что возможна альтернативная реализация на основе схемы фильтра $y_0(D)/q(D)$. Лучше выбрать вариант, требующий меньшего количества сумматоров.

Рассмотрим применение алгоритма на примерах для кодеров турбокодов с перфорацией.

Пример 3. В составе кодера турбокода системы спутниковой связи Inmarsat нашел применение RSC-кодер

$$G(D) = \Big(1 \quad (1 + D + D^2 + D^4)/(1 + D^3 + D^4)\Big)$$

с перфорацией каждого второго проверочного бита [18], т.е. на выходе первого компонентного RSC-кодера удаляется каждый четный проверочный бит, на выходе второго компонентного RSC-кодера удаляется каждый нечетный проверочный бит (см. рис. 5, где $\pi$ – перемежитель).

Отметим, что полином обратной связи $q(D) = 1 + D^3 + D^4$ является примитивным.

Возможная реализация показана на рис. 6 и не является ни одной из канонических форм представления (со встроенными сумматорами, с вынесенными сумматорами).

Для рекурсивного фильтра $(1 + D + D^2 + D^4)/(1 + D^3 + D^4)$ вычислим перфорированные рациональные передаточные функции

$$P_{(0\ 1)}(D) = \begin{pmatrix} p_1(D) \\ p_0(D) \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{c} \dfrac{1 + D + D^3}{1 + D^3 + D^4} \\ \dfrac{1 + D + D^2 + D^3 + D^4}{1 + D^3 + D^4} \end{array} \right),$$

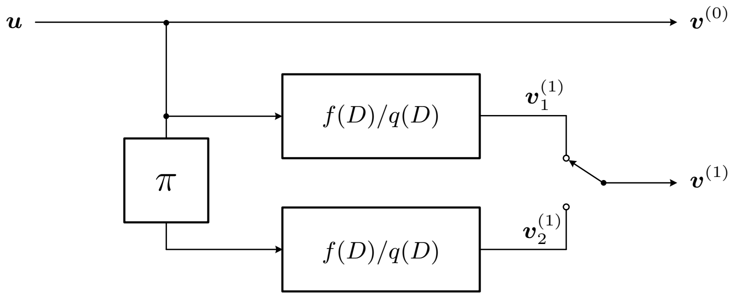


Рис. 5. Кодер систематического турбокода скорости 1/2

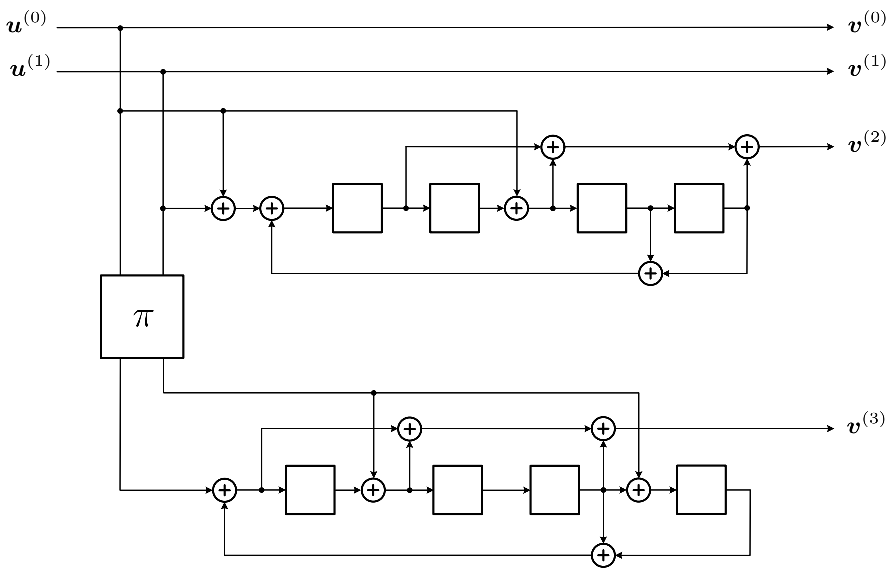


Рис. 6. Реализация кодера на рис. 5 при $\dfrac{f(D)}{q(D)} = \dfrac{1 + D + D^2 + D^4}{1 + D^3 + D^4}$ как кодера двойного турбокода

$$P_{(1\ 0)}(D) = \begin{pmatrix} p_0(D) \\ Dp_1(D) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1 + D + D^2 + D^3 + D^4}{1 + D^3 + D^4} \\ \dfrac{D + D^2 + D^4}{1 + D^3 + D^4} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим минимизацию схемной реализации передаточной функции

$$P_{(1\ 0)}(D) = \begin{pmatrix} \dfrac{1 + D + D^2 + D^3 + D^4}{1 + D^3 + D^4} \\ \dfrac{D + D^2 + D^4}{1 + D^3 + D^4} \end{pmatrix}.$$

За основу такой схемы можно взять фильтр $\dfrac{1 + D + D^2 + D^3 + D^4}{1 + D^3 + D^4}$ или же фильтр $\dfrac{D + D^2 + D^4}{1 + D^3 + D^4}$ в канонической форме с вынесенными сумматорами. Возьмем фильтр

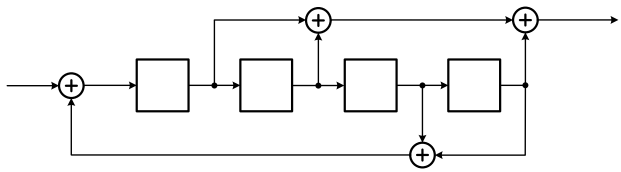

Рис. 7. Фильтр $\dfrac{D+D^2+D^4}{1+D^3+D^4}$ в канонической форме с вынесенными сумматорами

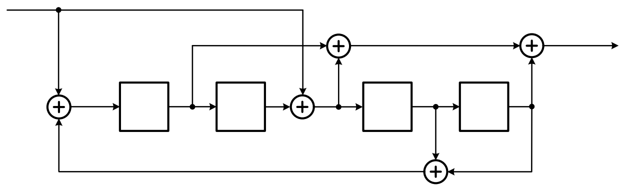

Рис. 8. Реализация фильтра $\dfrac{1+D+D^2+D^3+D^4}{1+D^3+D^4}$ на основе схемы на рис. 7

$\dfrac{D+D^2+D^4}{1+D^3+D^4}$, изображенный на рис. 7, так как для его реализации необходимо меньшее количество сумматоров (логики "исключающее ИЛИ").

Изначально все разряды данного фильтра находятся в состоянии $S_0 = 0000$. Тогда при импульсном воздействии последующие состояния имеют вид

$$\begin{array}{cccccc}
S_0 = 0000 & S_1 = 1000 & S_2 = 0100 & S_3 = 0010 & S_4 = 1001 & S_5 = 1100 \\
S_6 = 0110 & S_7 = 1011 & S_8 = 0101 & S_9 = 1010 & S_{10} = 1101 & S_{11} = 1110 \\
S_{12} = 1111 & S_{13} = 0111 & S_{14} = 0011 & S_{15} = 0001 & S_1 = 1000 & S_2 = 0100.
\end{array}$$

Сравнив первые 16 битов импульсной характеристики фильтра $\dfrac{D+D^2+D^4}{1+D^3+D^4}$

$$\{y_1, p_1, p_2, \ldots, p_N\} = 0,1,1,0,0,0,1,0,0,1,1,0,1,0,1,1$$

с первыми 16 битами импульсной характеристики фильтра $\dfrac{1+D+D^2+D^3+D^4}{1+D^3+D^4}$

$$\{y_0, p_{N-i+1}, p_{N-i+2}, \ldots, p_{N-i}\} = 1,1,1,0,1,0,1,1,1,1,0,0,0,1,0,0,$$

найдем $i = 7$, тогда $S^* = S_9 = 1010$.

Теперь на основе схемы фильтра $\dfrac{D+D^2+D^4}{1+D^3+D^4}$, представленного на рис. 7, реализуем фильтр $\dfrac{1+D+D^2+D^3+D^4}{1+D^3+D^4}$. В схеме на рис. 7 организуем вход таким образом, чтобы на первом такте работы (реакции на импульсное воздействие) фильтра на рис. 7:

– записать в ячейки памяти фильтра состояние $S^* = 1010$;

– обеспечить первый бит импульсной характеристики фильтра $y_0 = 1$.

Указанные условия можно выполнить, подав входную последовательность на встроенные в соответствующих местах схемы на рис. 7 сумматоры, как показано на рис. 8.

Таким образом, возможный вариант минимальной реализации $P_{(1\ 0)}(D)$ – это вычислитель проверочных битов $v^{(2)}$ на рис. 6.

Аналогично рассмотрим основные этапы минимизации схемной реализации для функции

$$P_{(0\ 1)}(D) = \begin{pmatrix} \dfrac{1+D+D^3}{1+D^3+D^4} \\ \dfrac{1+D+D^2+D^3+D^4}{1+D^3+D^4} \end{pmatrix}.$$

За основу схемы возьмем фильтр $\dfrac{1+D+D^3}{1+D^3+D^4}$ в форме с вынесенными сумматорами. Сравнив первые 16 битов импульсной характеристики данного фильтра

$$\{y_1, p_1, p_2, \ldots, p_N\} = 1,1,0,0,0,1,0,0,1,1,0,1,0,1,1,1$$

с первыми 16 битами импульсной характеристикой фильтра $\dfrac{1+D+D^2+D^3+D^4}{1+D^3+D^4}$

$$\{y_0, p_{N-i+1}, p_{N-i+2}, \ldots, p_{N-i}\} = 1,1,1,0,1,0,1,1,1,1,0,0,0,1,0,0,$$

найдем $i = 8$, тогда $S^* = S_8 = 0101$.

Тогда фильтр $\dfrac{1+D+D^2+D^3+D^4}{1+D^3+D^4}$ может быть реализован на основе фильтра $\dfrac{1+D+D^3}{1+D^3+D^4}$, если на первом такте работы (реакции на импульсное воздействие) данного фильтра:

– записать в ячейки памяти фильтра состояние $S^* = 0101$;
– обеспечить начальный бит импульсной характеристики фильтра $y_0 = 1$.

Таким образом, схемная реализация $P_{(0\ 1)}(D)$ – это вычислитель проверочных битов $v^{(3)}$ на рис. 6.

Пример 4. В системах спутниковой телеметрии CCSDS рекомендует кодер турбокода на рис. 5 при $f(D)/q(D) = (1+D+D^3+D^4)/(1+D^3+D^4)$ [9]. Применив предложенный алгоритм, получим возможную реализацию на рис. 9.

Отметим, что реализация фильтров с перфорацией в представленном виде может иметь преимущества. Например, использование в турбокодах двойных RSC-кодеров в сравнении с традиционными RSC-кодерами показывает меньшую задержку.

## § 5. Заключение

В статье получены следующие результаты.

Исследовано приведение рекурсивных фильтров (с перфорацией) к представлению разреженными матрицами, обладающими структурой. Найдены явные формулы расчета элементов приведенных разреженных матриц для рекурсивных фильтров с перфорацией каждого второго бита на выходе.

Рассмотрено приложение полученных разреженных матриц к нахождению перфорированных передаточных функций для рекурсивных фильтров с перфорацией каждого второго бита. Предложен подход к минимальной схемной реализации данных функций. Представлены возможные варианты схемной реализации некоторых турбокодов с перфорацией.

Приложение приведенных в статье разреженных матриц к задаче идентификации турбоподобных кодов в условиях априорной неопределенности при наличии помех предложено в [11], обсуждается в работах [19,20] и является направлением дальнейших исследований.

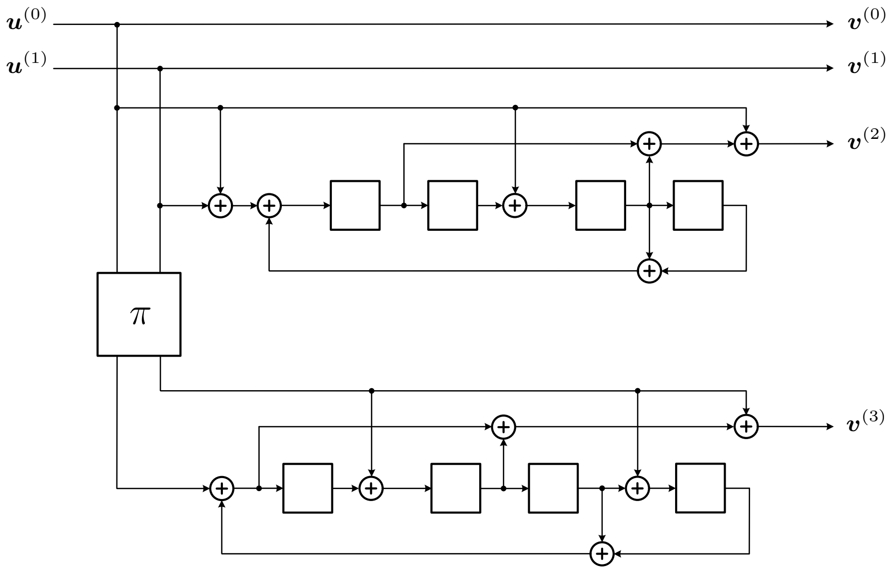


Рис. 9. Реализация кодера на рис. 5 при $\dfrac{f(D)}{q(D)} = \dfrac{1 + D + D^3 + D^4}{1 + D^3 + D^4}$ как кодера двойного турбокода

Автор благодарит рецензента за полезные замечания и предложения, позволившие значительно улучшить первоначальный вариант статьи.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Berrou C., Glavieux A., Thitimajshima P.* Near Shannon Limit Error-Correcting Coding and Decoding: Turbo-Codes. 1 // Proc. IEEE Int. Conf. on Communications (ICC'93). Geneva, Switzerland. May 23–26, 1993. V. 2. P. 1064–1070. `https://doi.org/10.1109/ICC.1993.397441`
2. *Berrou C., Glavieux A.* Near Optimum Error Correcting Coding and Decoding // IEEE Trans. Commun. 1996. V. 44. № 10. P. 1261–1271. `https://doi.org/10.1109/26.539767`
3. *Douillard C., Berrou C.* Turbo Codes with Rate-$m/(m+1)$ Constituent Convolutional Codes // IEEE Trans. Commun. 2005. V. 53. № 10. P. 1630–1638. `https://doi.org/10.1109/TCOMM.2005.857165`
4. Channel Coding in Communication Networks: From Theory to Turbocodes. London; Newport Beach, CA: ISTE, 2007.
5. *Jin H., Khandecar A., McEliece R.* Irregular Repeat-Accumulate Codes // Proc. 2nd Int. Symp. on Turbo Codes and Related Topics. Brest, France. Sept. 4–7, 2000. P. 1–8.
6. *Johnson S.J.* Iterative Error Correction: Turbo, Low-Density Parity-Check and Repeat-Accumulate Codes. Cambridge, UK; New York: Cambridge Univ. Press, 2010.
7. *Abbasfar A.* Turbo-like Codes: Design for High Speed Decoding. Dordrecht: Springer, 2007.
8. *Deshmukh R.M., Ladhake S.A.* Analysis of Various Puncturing Patterns and Code Rates: Turbo Code // Int. J. Electron. Eng. Res. 2009. V. 1. № 2. P. 79–88.
9. TM Synchronization and Channel Coding: Recommended Standard, Issue 3. CCSDS 131.0-B-3 (Blue Book, September 2017). Washington, DC: CCSDS, 2017.
10. *Johannesson R., Zigangirov K.Sh.* Fundamentals of Convolutional Coding. Pisacataway, NJ: IEEE Press; Hoboken, NJ: Wiley, 2015.
11. *Баринов А.Ю.* Методы анализа турбоподобных кодов с учетом идентификации их компонентных перемежителей // Наукоемкие технологии. 2016. Т. 17. № 12. С. 4–11.
12. *Clark G., Cain J.* Error-Correction Coding for Digital Communications. New York: Plenum, 1981.

13. *Morelos-Zaragoza R.H.* The Art of Error Correcting Coding. Chichester, UK: Wiley, 2002.
14. *Бочарова И.Е., Хуг Ф., Йоханнессон Р., Кудряшов Б.Д.* Дуальные сверточные коды и тождества Мак-Вильямс // Пробл. передачи информ. 2012. Т. 48. № 1. С. 26–36. http://mi.mathnet.ru/ppi2066
15. *Richardson T., Urbanke R.* Modern Coding Theory. Cambridge, UK: Cambridge Univ. Press, 2008.
16. *Gill A.* Linear Sequential Circuits; Analysis, Synthesis and Applications. New York: McGraw-Hill, 1966.
17. *Lee S.C.* Modern Switching Theory and Digital Design. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1978.
18. *Costello D.J., Forney G.D.* Channel Coding: The Road to Channel Capacity // Proc. IEEE. 2007. V. 95. № 6. P. 1150–1177. https://doi.org/10.1109/JPROC.2007.895188
19. *Баринов А.Ю., Асеев А.Ю.* Модифицированная математическая модель системы генерирования перемеженной дискретной последовательности турбоподобного кода // Вестн. ЧерГУ. 2017. № 6 (81). С. 9–18. https://doi.org/10.23859/1994-0637-2017-6-81-1
20. *Баринов А.Ю.* Идентификация перемежителей турбокодов на основе их полиномиального и матричного представления // Информация и космос. 2018. № 2. С. 61–66.

*Баринов Антон Юрьевич*
Военный университет радиоэлектроники, Череповец
aybarinov@mail.ru

Поступила в редакцию
12.05.2021
После доработки
15.12.2021
Принята к публикации
03.02.2022