ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

Том 58 **2022** **Вып. 1**

УДК 621.391.1 : 519.725 : 512.647.2

© 2022 г. **С. Шарма**[1], **А. Шарма**[2]

МУЛЬТИСКРУЧЕННЫЕ АДДИТИВНЫЕ КОДЫ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ ДВОЙСТВЕННЫМИ НАД КОНЕЧНЫМИ ПОЛЯМИ

Мультискрученные (МС) аддитивные коды над конечными полями образуют важный класс аддитивных кодов, обобщающий констациклические аддитивные коды. Изучается специальный класс аддитивных МС-кодов над конечными полями, а именно аддитивные МС-коды с дополнительными двойственными кодами относительно обычной билинейной, эрмитовой и $*$-формы следа. Также выводится необходимое и достаточное условие, при котором аддитивный МС-код над конечным полем имеет дополнительный двойственный. Затем приводятся явные формулы для числа всех аддитивных МС-кодов с дополнительными двойственными над конечными полями относительно вышеупомянутых билинейных форм следа. Результаты проиллюстрированы несколькими примерами.

Ключевые слова: констациклические аддитивные коды, разложение Витта, индекс Витта.

DOI: 10.31857/S055529232201003X

§ 1. Введение

Линейные коды над конечными полями – наиболее хорошо изученный класс кодов, исправляющих ошибки. Линейный код, имеющий тривиальное пересечение со своим двойственным кодом, называется линейным кодом с дополнительным двойственным (или LCD-кодом – linear complementary-dual code). LCD-коды над конечными полями были введены в [1], где была дана алгебраическая характеризация LCD-кодов над конечными полями и показано, что существуют асимптотически хорошие LCD-коды. Там же было показано, что LCD-коды дают оптимальное решение задачи линейного кодирования для двоичного суммирующего канала с двумя пользователями. Позже в [2] было получено необходимое и достаточное условие, при котором циклический код над конечным полем является LCD-кодом. В [3], используя спектры размерностей остовов (hulls) линейных кодов, было показано, что LCD-коды над конечными полями лежат на асимптотической границе Варшамова–Гилберта. В [4] были построены LCD-коды с помощью ортогональных матриц, комбинаторных дизайнов, самодвойственных кодов и отображений Грея из кодов над семейством колец $\mathbb{F}_2[u_1, u_2, \ldots, u_k]/\langle u_i^2, u_iu_j - u_ju_i\rangle$. Там же была получена граница линейного программирования на наибольший размер LCD-кода заданной длины с заданным минимальным расстоянием и представлена таблица нижних границ для этой комбинаторной функции для умеренных значений параметров. Помимо применения LCD-кодов в системах связи и хранения данных, LCD-коды недавно нашли

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Комиссии по университетским грантам (UGC) Индии.

[2] Работа выполнена при финансовой поддержке фонда iHub-Anubhuti-IIITD в рамках программы NM-ICPS Министерства науки и технологии Индии (номер гранта IHUB Anubhuti/Project Grant/12).

применение в криптографии. В [5] было показано, что LCD-коды могут быть полезны для защиты конфиденциальной информации от атак по сторонним каналам (SCA) и по привнесенным помехам (FIA). Также там было представлено несколько конструкций LCD-кодов над конечными полями, основанных на расширении кодов Рида–Соломона.

Как естественное обобщение линейных кодов в другом направлении в [6] были введены и изучены аддитивные коды над конечным полем $\mathbb{F}_4$. Там же были рассмотрены их двойственные коды относительно скалярного произведения, заданного функцией следа, и предложен метод построения квантовых кодов, исправляющих ошибки, из самоортогональных аддитивных кодов над $\mathbb{F}_4$. Затем в [7, 8] изучались аддитивные коды над произвольными конечными полями. Позднее в [9, 10] были исследованы циклические аддитивные коды длины n над $\mathbb{F}_4$ и найдено каноническое разложение для таких кодов. Также в [9, 10] изучались их двойственные коды относительно скалярного произведения с функцией следа на $\mathbb{F}_4^n$ и было найдено число всех самоортогональных и самодвойственных циклических аддитивных кодов над $\mathbb{F}_4$. Обобщением этой работы явилась работа [11], в которой изучались циклические аддитивные коды длины n над $\mathbb{F}_{q^t}$, где $t \geqslant 2$ – целое число, q – степень простого, $\mathbb{F}_{q^t}$ – конечное поле порядка q^t, а n – положительное целое число, такое что НОД$(n, q) = 1$. Число всех таких кодов было найдено с помощью полученного канонического разложения для этих кодов. Там же были изучены их двойственные коды и найдено число всех самоортогональных и самодвойственных циклических аддитивных кодов над $\mathbb{F}_{q^t}$ относительно обыкновенной и эрмитовой билинейных форм следа на $\mathbb{F}_{q^t}^n$. Позже в [12] была введена и изучена новая билинейная форма следа на $\mathbb{F}_{q^t}^n$, названная $*$-формой следа, а также исследованы двойственные коды циклических аддитивных кодов и найдено число всех самоортогональных и самодвойственных циклических аддитивных кодов над $\mathbb{F}_{q^t}$ относительно билинейной $*$-формы следа. В другой работе тех же авторов [13] были изучены циклические аддитивные коды длины n с дополнительными двойственными над $\mathbb{F}_{q^t}$ относительно обычной билинейной, эрмитовой и $*$-формы следа и приведены явные формулы для числа кодов этих трех классов. В последующей работе [14] циклические аддитивные коды над $\mathbb{F}_{q^t}$ были обобщены далее – изучались констациклические аддитивные коды длины n над $\mathbb{F}_{q^t}$, где t – простое число и НОД$(n, q) = 1$. Были также изучены их двойственные коды относительно обычной билинейной формы следа на $\mathbb{F}_{q^t}^n$. В той же работе были получены необходимые и достаточные условия для того, чтобы негациклический аддитивный код длины n над $\mathbb{F}_{q^2}$ был самодвойственным или самоортогональным. Далее, для любого целого числа $t \geqslant 2$ (не обязательно степени простого) в [15] была тщательно исследована алгебраическая структура констациклических аддитивных кодов длины n над $\mathbb{F}_{q^t}$, и число всех таких кодов было найдено с помощью полученного там канонического разложения. Кроме того, были изучены их двойственные коды и даны явные формулы для числа всех констациклических аддитивных самоортогональных, самодвойственных кодов и кодов с дополнительными двойственными длины n над $\mathbb{F}_{q^t}$ относительно обычной билинейной, эрмитовой и $*$-формы следа на $\mathbb{F}_{q^t}^n$. Как обобщение констациклических аддитивных кодов в недавней работе [16] были введены и исследованы аддитивные мультискрученные (multi-twisted) коды (МС-коды) над конечными полями. Были также изучены их двойственные коды и получены явные выражения для числа всех самоортогональных и самодвойственных аддитивных МС-кодов длины n над $\mathbb{F}_{q^t}$ относительно обычной билинейной, эрмитовой и $*$-формы следа на $\mathbb{F}_{q^t}^n$.

Основной целью настоящей статьи является изучение аддитивных МС-кодов с дополнительными двойственными над конечными полями относительно следующих билинейных форм следа: обычной, эрмитовой и $*$-формы. Более точно, будет выведено необходимое и достаточное условие, при котором аддитивный МС-код над конечным полем имеет дополнительный двойственный. Будут также получены явные формулы для числа всех аддитивных МС-кодов над конечными полями с дополнительными двойственными относительно вышеуказанных билинейных форм следа.

Статья имеет следующую структуру. В § 2 приведены некоторые предварительные сведения, необходимые для вывода основных результатов. В § 3 выведено необходимое и достаточное условие, при котором аддитивный МС-код над конечным полем имеет дополнительный двойственный (теорема 3). В § 4 получены явные формулы для числа всех аддитивных МС-кодов над конечными полями относительно обычной билинейной, эрмитовой и $*$-формы следа (теорема 4), а также приведены примеры, иллюстрирующие эти результаты. В § 5 вкратце подведены итоги и сформулирован интересный открытый вопрос в данном направлении.

§ 2. Предварительные сведения

В этом параграфе вводятся обозначения и приводятся некоторые базовые определения и факты, необходимые для вывода основных результатов. Всюду далее $t \geqslant 2$ – целое число, q – степень простого числа p, а через $\mathbb{F}_q$ и $\mathbb{F}_{q^t}$ обозначаются конечные поля порядков q и q^t соответственно. Пусть $m_1, m_2, \ldots, m_\ell$ – натуральные числа, взаимно простые с q, и пусть $n = m_1 + m_2 + \ldots + m_\ell$. Зафиксируем множество $\Omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\ell)$, где $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\ell$ – ненулевые элементы поля $\mathbb{F}_q$. Для каждого $1 \leqslant i \leqslant \ell$ определим факторкольцо $\mathcal{V}_i = \mathbb{F}_{q^t}[x]/\langle x^{m_i} - \omega_i\rangle$. Тогда множество $\mathcal{V} = \prod_{i=1}^{\ell} \mathcal{V}_i$ можно рассматривать как $\mathbb{F}_q[x]$-модуль относительно операций покомпонентного сложения и покомпонентного умножения на скаляры, который будем называть Ω-мультискрученным модулем (Ω-МС-модулем). Тогда Ω-мультискрученный аддитивный код (аддитивный Ω-МС-код) $\mathcal{C}$ длины n с длинами блоков $(m_1, m_2, \ldots, m_\ell)$ над $\mathbb{F}_{q^t}$ определяется [16] как $\mathbb{F}_q[x]$-подмодуль модуля $\mathcal{V}$.

Всюду далее в качестве элементов факторкольца $\mathbb{F}_{\mathfrak{Q}}[x]/\langle F(x)\rangle$ будут рассматриваться их представители в $\mathbb{F}_{\mathfrak{Q}}[x]$ степени строго меньшей, чем степень $F(x)$, и их сложение и умножение будет выполняться по модулю $F(x)$, где $\mathbb{F}_{\mathfrak{Q}}$ – конечное поле порядка $\mathfrak{Q}$, а $F(x)$ – непостоянный многочлен из $\mathbb{F}_{\mathfrak{Q}}[x]$. При этом вектор $\alpha \in \mathbb{F}_{q^t}^n$ будем записывать в виде $(\alpha_{1,0}, \alpha_{1,1}, \ldots, \alpha_{1,m_1-1}; \ldots; \alpha_{\ell,0}, \alpha_{\ell,1}, \ldots, \alpha_{\ell,m_\ell-1})$ и будем отождествлять его с элементом $\alpha(x) = (\alpha_1(x), \alpha_2(x), \ldots, \alpha_\ell(x)) \in \mathcal{V}$, где $\alpha_i(x) = \alpha_{i,0} + \alpha_{i,1}x + \ldots + \alpha_{i,m_i-1}x^{m_i-1} \in \mathcal{V}_i$ для $1 \leqslant i \leqslant \ell$. Это отображение из $\mathbb{F}_{q^t}^n$ в $\mathcal{V}$ является изоморфизмом векторных пространств. При таком отождествлении Ω-аддитивный МС-код $\mathcal{C}$ можно рассматривать как $\mathbb{F}_q$-линейное подпространство пространства $\mathbb{F}_{q^t}^n$ (или аддитивный код длины n над $\mathbb{F}_{q^t}$), удовлетворяющее следующему свойству: если $c = (c_{1,0}, c_{1,1}, \ldots, c_{1,m_1-1}; c_{2,0}, c_{2,1}, \ldots, c_{2,m_2-1}; \ldots; c_{\ell,0}, c_{\ell,1}, \ldots, c_{\ell,m_\ell-1})$ – кодовое слово кода $\mathcal{C}$, то его Ω-мультискрученный сдвиг (Ω-МС-сдвиг)

$$\begin{aligned}T_\Omega(c) = (&\omega_1 c_{1,m_1-1}, c_{1,0}, \ldots, c_{1,m_1-2}; \omega_2 c_{2,m_2-1}, c_{2,0}, \ldots, c_{2,m_2-2}; \ldots;\\ &\omega_\ell c_{\ell,m_\ell-1}, c_{\ell,0}, \ldots, c_{\ell,m_\ell-2})\end{aligned}$$

также является кодовым словом кода $\mathcal{C}$. Следует отметить, что аддитивные Ω-МС-коды над $\mathbb{F}_{q^t}$ совпадают с

- ω_1-констациклическими аддитивными кодами над $\mathbb{F}_{q^t}$ при $\ell = 1$ (см. [14, 15]);
- циклическими аддитивными кодами над $\mathbb{F}_{q^t}$ при $\ell = 1$ и $\omega_1 = 1$ (см. [11–13]);
- негациклическими аддитивными кодами над $\mathbb{F}_{q^t}$ при $\ell = 1$ и $\omega_1 = -1$ (см. [15]).

Для дальнейшего изучения алгебраической структуры аддитивных Ω-МС-кодов длины n над $\mathbb{F}_{q^t}$ обозначим через $g_1(x), g_2(x), \ldots, g_r(x)$ все различные неприводимые множители многочленов $x^{m_1} - \omega_1, x^{m_2} - \omega_2, \ldots, x^{m_\ell} - \omega_\ell$ в кольце $\mathbb{F}_q[x]$. Для $1 \leqslant u \leqslant r$

и $1 \leqslant i \leqslant \ell$ положим

$$\varepsilon_{u,i} = \begin{cases} 1, & \text{если } g_u(x) \text{ делит } x^{m_i} - \omega_i \text{ в } \mathbb{F}_q[x], \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Из китайской теоремы об остатках получаем, что $\mathbb{F}_q[x]/\langle x^{m_i} - \omega_i \rangle \simeq \bigoplus\limits_{u=1}^{r} \varepsilon_{u,i}\mathcal{F}_u$ для $1 \leqslant i \leqslant \ell$, где $\mathcal{F}_u = \mathbb{F}_q[x]/\langle g_u(x)\rangle \simeq \mathbb{F}_{q^{d_u}}$, $d_u = \deg g_u(x)$ для $1 \leqslant u \leqslant r$. Согласно [11, лемма 1] можно далее разложить многочлен $g_u(x)$ на неприводимые многочлены над $\mathbb{F}_{q^t}$ в виде $g_u(x) = g_{u,0}(x)g_{u,1}(x)\ldots g_{u,a_u-1}(x)$, где $a_u = \text{НОД}(t, d_u)$, а $g_{u,j}(x)$ – неприводимый многочлен над $\mathbb{F}_{q^t}$ степени $\deg g_{u,j}(x) = d_u/a_u = D_u$ для $0 \leqslant j \leqslant a_u - 1$. Снова применяя китайскую теорему об остатках, получаем, что $\mathcal{V}_i \simeq \bigoplus\limits_{u=1}^{r} \bigoplus\limits_{j=0}^{a_u-1} \varepsilon_{u,i}\mathcal{F}_{u,j}$ для каждого i, где $\mathcal{F}_{u,j} = \mathbb{F}_{q^t}[x]/\langle g_{u,j}(x)\rangle \simeq \mathbb{F}_{q^{tD_u}}$ для $1 \leqslant u \leqslant r$ и $0 \leqslant j \leqslant a_u - 1$. В действительности для $1 \leqslant i \leqslant \ell$ соответствующий изоморфизм колец $\psi_i \colon \mathcal{V}_i \to \bigoplus\limits_{u=1}^{r} \bigoplus\limits_{j=0}^{a_u-1} \varepsilon_{u,i}\mathcal{F}_{u,j}$ задается как

$$\begin{aligned}&\psi_i(\alpha_i(x)) = \big(\varepsilon_{1,i}\alpha_i(x) + \langle g_{1,0}(x)\rangle, \varepsilon_{1,i}\alpha_i(x) + \langle g_{1,1}(x)\rangle, \ldots, \varepsilon_{1,i}\alpha_i(x) + \langle g_{1,a_1-1}(x)\rangle, \\ &\quad \ldots, \varepsilon_{r,i}\alpha_i(x) + \langle g_{r,0}(x)\rangle, \varepsilon_{r,i}\alpha_i(x) + \langle g_{r,1}(x)\rangle, \ldots, \varepsilon_{r,i}\alpha_i(x) + \langle g_{r,a_r-1}(x)\rangle\big) \\ &\quad \text{для любого } \alpha_i(x) \in \mathcal{V}_i.\end{aligned}$$

Из этого следует, что

$$\mathcal{V} \simeq \bigoplus_{u=1}^{r} \bigoplus_{j=0}^{a_u-1} \underbrace{(\varepsilon_{u,1}\mathcal{F}_{u,j}, \varepsilon_{u,2}\mathcal{F}_{u,j}, \ldots, \varepsilon_{u,\ell}\mathcal{F}_{u,j})}_{\mathcal{G}_{u,j}}.$$

Положим $\mathcal{G} = \bigoplus\limits_{u=1}^{r} \mathcal{G}_u$, где $\mathcal{G}_u = \bigoplus\limits_{j=0}^{a_u-1} \mathcal{G}_{u,j}$ для $1 \leqslant u \leqslant r$. Тогда соответствующий изоморфизм колец $\psi \colon \mathcal{V} \to \mathcal{G}$ задается как

$$\begin{aligned}&\psi(\alpha_1(x), \alpha_2(x), \ldots, \alpha_\ell(x)) = \mathcal{A} = (\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_r) \\ &\quad \text{для любого } (\alpha_1(x), \alpha_2(x), \ldots, \alpha_\ell(x)) \in \mathcal{V},\end{aligned}$$

где $\mathcal{A}_u = (\mathcal{A}_{u,0}, \mathcal{A}_{u,1}, \ldots, \mathcal{A}_{u,a_u-1}) \in \mathcal{G}_u$, а $\mathcal{A}_{u,j} \in \mathcal{G}_{u,j}$ имеет вид $\mathcal{A}_{u,j} = (\mathcal{A}_{u,j}^{(1)}, \mathcal{A}_{u,j}^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_{u,j}^{(\ell)})$, где $\mathcal{A}_{u,j}^{(i)} := \varepsilon_{u,i}\alpha_i(x) + \langle g_{u,j}(x)\rangle \in \varepsilon_{u,i}\mathcal{F}_{u,j}$ для любых i, u и j. Далее, для $1 \leqslant u \leqslant r$ положим $\varepsilon_u = \sum\limits_{i=1}^{\ell} \varepsilon_{u,i}$. Заметим, что множество $\mathcal{G}_u$ является $(\varepsilon_u t)$-мерным векторным пространством над $\mathcal{F}_u$ относительно покомпонентного сложения и покомпонентного умножения на скаляры. Теперь приведем теорему 2.2 из работы [16], описывающую каноническое разложение всякого Ω-аддитивного МС-кода длины n над $\mathbb{F}_{q^t}$.

Теорема 1 [16]. *Справедливы следующие утверждения.*

(a) *Пусть $\mathcal{C}$ – Ω-аддитивный МС-код длины n над $\mathbb{F}_{q^t}$. Для $1 \leqslant u \leqslant r$ положим $\mathcal{C}_u = \mathcal{C} \cap \mathcal{G}_u$. Тогда для каждого u множество $\mathcal{C}_u$ является $\mathcal{F}_u$-линейным подпространством пространства $\mathcal{G}_u$, а код $\mathcal{C}$ имеет единственное разложение в прямую сумму $\mathcal{C} = \bigoplus\limits_{u=1}^{r} \mathcal{C}_u$. (Подпространства $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \ldots, \mathcal{C}_r$ называются компонентами кода $\mathcal{C}$.)*

(b) *И наоборот, если* $\mathcal{D}_u$ – $\mathcal{F}_u$*-линейное подпространство пространства* $\mathcal{G}_u$ *для* $1 \leqslant u \leqslant r$ *и* $\mathcal{D} = \sum_{u=1}^{r} \mathcal{D}_u$, *то* $\mathcal{D} = \bigoplus_{u=1}^{r} \mathcal{D}_u$ *и множество* $\mathcal{D}$ *является* Ω*-аддитивным МС-кодом длины* n *над* $\mathbb{F}_{q^t}$.

В [16, §§ 2, 3] изучались двойственные коды аддитивных Ω-МС-кодов длины n над $\mathbb{F}_{q^t}$ относительно следующих билинейных форм следа: обычной, эрмитовой и $*$-формы следа на $\mathbb{F}_{q^t}^n$, которые определяются следующим образом.

Обычная билинейная форма следа – это отображение $\langle \cdot\,, \cdot \rangle_0 \colon \mathbb{F}_{q^t}^n \times \mathbb{F}_{q^t}^n \to \mathbb{F}_q$, задаваемое формулой

$$\langle \alpha, \beta \rangle_0 = \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{h=0}^{m_i-1} \mathrm{Tr}_{q^t,q}(\alpha_{i,h}\beta_{i,h})$$

для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{F}_{q^t}^n$, где $\mathrm{Tr}_{q^t,q}$ – отображение следа из $\mathbb{F}_{q^t}$ в $\mathbb{F}_q$. Как указано в [11, лемма 5], эта билинейная форма следа $\langle \cdot\,, \cdot \rangle_0$ является невырожденной симметрической билинейной формой на $\mathbb{F}_{q^t}^n$.

Для определения эрмитовой билинейной форм следа пусть $t \geqslant 2$ – четное целое, и пусть $t = 2^a U$, где $a \geqslant 1$, а U – нечетное целое. Нетрудно видеть, что существует ненулевой элемент $\gamma \in \mathbb{F}_{q^{2^a}}$, такой что $\gamma + \gamma^{q^{2^{a-1}}} = 0$. Тогда эрмитова билинейная форма следа – это отображение $\langle \cdot\,, \cdot \rangle_\gamma \colon \mathbb{F}_{q^t}^n \times \mathbb{F}_{q^t}^n \to \mathbb{F}_q$, задаваемое формулой

$$\langle \alpha, \beta \rangle_\gamma = \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{h=0}^{m_i-1} \mathrm{Tr}_{q^t,q}(\gamma\alpha_{i,h}\beta_{i,h}^{q^{t/2}})$$

для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{F}_{q^t}^n$. Как указано в [11, лемма 5], эрмитова билинейная форма следа $\langle \cdot\,, \cdot \rangle_\gamma$ является невырожденной рефлексивной неопределенной билинейной формой на $\mathbb{F}_{q^t}^n$.

Наконец, для определения билинейной $*$-формы следа пусть $t \geqslant 2$ – целое число, такое что $t \not\equiv 1 \pmod{p}$. Тогда отображение $\varphi \colon \mathbb{F}_{q^t} \to \mathbb{F}_{q^t}$, задаваемое формулой $\varphi(a) = \sum_{\lambda=1}^{t-1} a^{q^\lambda} = \mathrm{Tr}_{q^t,q}(a) - a$ для всех $a \in \mathbb{F}_{q^t}$, является $\mathbb{F}_q$-линейным изоморфизмом векторных пространств. Билинейная $*$-форма следа – это отображение $\langle \cdot\,, \cdot \rangle_* \colon \mathbb{F}_{q^t}^n \times \mathbb{F}_{q^t}^n \to \mathbb{F}_q$, задаваемое формулой

$$\langle \alpha, \beta \rangle_* = \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{h=0}^{m_i-1} \mathrm{Tr}_{q^t,q}(\alpha_{i,h}\varphi(\beta_{i,h}))$$

для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{F}_{q^t}^n$. Согласно [12, лемма 3.2] билинейная $*$-форма следа $\langle \cdot\,, \cdot \rangle_*$ является невырожденной симметрической билинейной формой на $\mathbb{F}_{q^t}^n$, причем неопределенной в случае четного q.

Всюду далее будем использовать обозначение $\delta \in \{0, *, \gamma\}$ и определим $\mathbb{T}_\delta$ как множество (i) всех целых чисел $t \geqslant 2$, если $\delta = 0$, (ii) всех целых $t \geqslant 2$, таких что $t \not\equiv 1 \pmod{p}$, если $\delta = *$, и (iii) всех четных целых $t \geqslant 2$, если $\delta = \gamma$. Далее, если $\mathcal{C}$ $(\subseteq \mathbb{F}_{q^t}^n)$ – Ω-аддитивный МС-код длины n над $\mathbb{F}_{q^t}$, то его δ-двойственный код $\mathcal{C}^{\perp_\delta}$ определяется как $\mathcal{C}^{\perp_\delta} = \{v \in \mathbb{F}_{q^t}^n : \langle v, c \rangle_\delta = 0$ для всех $c \in \mathcal{C}\}$. Можно показать, что δ-двойственный код $\mathcal{C}^{\perp_\delta}$ является Ω'-аддитивным МС-кодом длины n над $\mathbb{F}_{q^t}$, где $\Omega' = (\omega_1^{-1}, \omega_2^{-1}, \ldots, \omega_\ell^{-1})$. При этом Ω-аддитивный МС-код $\mathcal{C}$ называется кодом, имеющим дополнительный δ-двойственный, где $\delta \in \{0, *, \gamma\}$, если он удовлетворяет соотношению $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}^{\perp_\delta} = \{0\}$. Рассуждая как и выше, нетрудно показать, что δ-двойственный код $\mathcal{C}^{\perp_\delta}$ можно также рассматривать как $\mathbb{F}_q[x]$-подмодуль Ω'-МС-модуля $\mathcal{V}' = \prod\limits_{i=1}^{\ell} \mathcal{V}'_i$, где $\mathcal{V}'_i = \mathbb{F}_{q^t}[x]/\langle x^{m_i} - \omega_i^{-1}\rangle$ для $1 \leqslant i \leqslant \ell$.

Для дальнейшего изучения алгебраической структуры δ-двойственных кодов для аддитивных Ω-МС-кодов над $\mathbb{F}_{q^t}$ заметим, что число $m = \text{НОК}[m_1 O(\omega_1), m_2 O(\omega_2), \ldots, m_\ell O(\omega_\ell)]$ является наименьшим натуральным числом, таким что $\text{НОК}[x^{m_1} - \omega_1, x^{m_2} - \omega_2, \ldots, x^{m_\ell} - \omega_\ell]$ делит $x^m - 1$ в $\mathbb{F}_q[x]$, где через $O(\omega_i)$ обозначается мультипликативный порядок элемента ω_i, $1 \leqslant i \leqslant \ell$. Отметим, что $T_\Omega^m = I$, где I – тождественный оператор на $\mathbb{F}_{q^t}^n$. Теперь пусть $\mathfrak{Q} = q^e$, где $e \geqslant 1$, $\pi \in \{1, -1\}$, и пусть θ – целое число, такое что $0 \leqslant \theta \leqslant e-1$. Далее, пусть $F(x) = \sum\limits_{h=0}^{d-1} a_h x^h + x^d$ – нормированный делитель многочлена $x^m - 1$ в $\mathbb{F}_{\mathfrak{Q}}[x]$. Тогда многочлен, взаимный с $F(x)$, определяется как $F^\dagger(x) = a_0^{-1} \sum\limits_{h=0}^{d-1} a_h x^{d-h} + a_0^{-1}$. Кроме того, определим $\widehat{F}(x) = \sum\limits_{h=0}^{d-1} a_h^{q^\theta} x^h + x^d$, если $\pi = 1$, и $\widehat{F}(x) = a_0^{-q^\theta} \sum\limits_{h=0}^{d-1} a_h^{q^\theta} x^{d-h} + a_0^{-q^\theta}$, если $\pi = -1$. Тогда отображение $\tau_{q^\theta,\pi} \colon \mathbb{F}_{\mathfrak{Q}}[x]/\langle F(x)\rangle \to \mathbb{F}_{\mathfrak{Q}}[x]/\langle \widehat{F}(x)\rangle$, определяемое как

$$\tau_{q^\theta,\pi}\left(\sum_{h=0}^{d-1} f_h x^h\right) = \sum_{h=0}^{d-1} f_h^{q^\theta} x^{\pi h} \quad \text{для любого } \sum_{h=0}^{d-1} f_h x^h \in \mathbb{F}_{\mathfrak{Q}}[x]/\langle F(x)\rangle,$$

является изоморфизмом колец, где $x^{-1} = x^{m-1}$ в $\mathbb{F}_{\mathfrak{Q}}[x]/\langle \widehat{F}(x)\rangle$, если $\pi = -1$. Более того, изоморфизм $\tau_{q^{e-\theta},\pi}$ является обратным к $\tau_{q^\theta,\pi}$. В частности, если $F(x) = x^{m_i} - \omega_i^{-1} \in \mathbb{F}_{q^t}[x]$, то $\widehat{F}(x) = x^{m_i} - \omega_i$, где $1 \leqslant i \leqslant \ell$. Кроме того, для $1 \leqslant i \leqslant \ell$ изоморфизм $\tau_{1,-1} \colon \mathcal{V}'_i \to \mathcal{V}_i$ задается равенством $\tau_{1,-1}(\beta_i(x)) = \beta_i(x^{-1})$ для любого $\beta_i(x) \in \mathcal{V}'_i$, где $x^{-1} = \omega_i^{-1} x^{m_i - 1} \in \mathcal{V}_i$. Отображение $\tau_{1,-1}$ можно далее продолжить до отображения $\tau_{1,-1} \colon \mathcal{V}' \to \mathcal{V}$ как $\tau_{1,-1}(\beta(x)) = \big(\tau_{1,-1}(\beta_1(x)), \tau_{1,-1}(\beta_2(x)), \ldots, \tau_{1,-1}(\beta_\ell(x))\big)$ для любого $\beta(x) = (\beta_1(x), \beta_2(x), \ldots, \beta_\ell(x)) \in \mathcal{V}'$. С другой стороны, если $F(x) = x^m - 1$, то $\widehat{F}(x) = x^m - 1$, и поэтому отображение $\tau_{1,-1} \colon \mathbb{F}_q[x]/\langle x^m - 1\rangle \to \mathbb{F}_q[x]/\langle x^m - 1\rangle$ задается как

$$\tau_{1,-1}\left(\sum_{h=0}^{m-1} a_h x^h\right) = \sum_{h=0}^{m-1} a_h x^{-h} \quad \text{для любого } \sum_{h=0}^{m-1} a_h x^h \in \mathbb{F}_q[x]/\langle x^m - 1\rangle,$$

где $x^{-1} = x^{m-1}$ в $\mathbb{F}_q[x]/\langle x^m - 1\rangle$. Теперь для $\delta \in \{0, *, \gamma\}$ определим отображение $(\cdot,\cdot)_\delta \colon \mathcal{V} \times \mathcal{V}' \to \mathbb{F}_q[x]/\langle x^m - 1\rangle$ следующим образом.

Для $\alpha(x) \in \mathcal{V}$ и $\beta(x) \in \mathcal{V}'$ положим

$$(\alpha(x), \beta(x))_\delta = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{\ell} \sum\limits_{\mu=0}^{t-1} \omega_i \Big(\dfrac{x^m - 1}{x^{m_i} - \omega_i}\Big) \tau_{q^\mu,1}\big(\alpha_i(x) \tau_{1,-1}(\beta_i(x))\big) & \text{для } \delta = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{\ell} \sum\limits_{\mu=0}^{t-1} \omega_i \Big(\dfrac{x^m - 1}{x^{m_i} - \omega_i}\Big) \tau_{q^\mu,1}\left(\alpha_i(x) \sum\limits_{\lambda=1}^{t-1} \tau_{q^\lambda,-1}(\beta_i(x))\right) & \text{для } \delta = *, \\ \sum\limits_{i=1}^{\ell} \sum\limits_{\mu=0}^{t-1} \omega_i \Big(\dfrac{x^m - 1}{x^{m_i} - \omega_i}\Big) \tau_{q^\mu,1}\big(\gamma \alpha_i(x) \tau_{q^{t/2},-1}(\beta_i(x))\big) & \text{для } \delta = \gamma. \end{cases}$$

Здесь факторкольцо $\mathbb{F}_q[x]/\langle x^m - 1\rangle$ рассматривается как $\mathbb{F}_q[x]$-модуль. Согласно [16, лемма 2.2] для $\delta \in \{0, *, \gamma\}$ имеем $(\alpha(x), \beta(x))_\delta = \sum\limits_{k=0}^{m-1} \langle \alpha, T_{\Omega'}^k(\beta)\rangle_\delta x^k$ для $\alpha(x) \in \mathcal{V}$ и

$\beta(x) \in \mathcal{V}'$, где через $T^k_{\Omega'}(\beta)$ обозначен k-кратный Ω'-МС-сдвиг вектора $\beta \in \mathbb{F}^n_{q^t}$. При этом отображение $(\cdot\,,\cdot)_\delta$ является рефлексивной невырожденной $\tau_{1,-1}$-полуторалинейной формой на $\mathcal{V} \times \mathcal{V}'$ для $\delta \in \{0,*,\gamma\}$. Отображение $(\cdot\,,\cdot)_\delta$ эрмитово, когда $\delta \in \{0,*\}$, и антиэрмитово, когда $\delta = \gamma$. Кроме того, согласно [16, теорема 2.4], если $\mathcal{C}$ $(\subseteq \mathcal{V})$ – Ω-аддитивный МС-код длины n над $\mathbb{F}_{q^t}$, то для $\delta \in \{0,*,\gamma\}$ соответствующий δ-двойственный код $\mathcal{C}^{\perp_\delta}(\subseteq \mathcal{V}')$ кода $\mathcal{C}$ является $\mathbb{F}_q[x]$-подмодулем $\mathcal{V}'$ и имеет вид $\mathcal{C}^{\perp_\delta} = \{\beta(x) \in \mathcal{V}' :\ (\alpha(x),\beta(x))_\delta = 0$ для всех $\alpha(x) \in \mathcal{C}\}$.

Снова применяя китайскую теорему об остатках и рассуждая как выше, получаем, что $\mathcal{V}' \simeq \mathcal{G}' = \bigoplus\limits_{u=1}^{r} \mathcal{G}'_u$, где $\mathcal{G}'_u = \bigoplus\limits_{j=0}^{a_u-1} \mathcal{G}'_{u,j}$, а $\mathcal{G}'_{u,j} = \big(\varepsilon_{u,1}\mathcal{F}^\dagger_{u,j}, \varepsilon_{u,2}\mathcal{F}^\dagger_{u,j}, \ldots, \varepsilon_{u,\ell}\mathcal{F}^\dagger_{u,j}\big)$, где $\mathcal{F}^\dagger_{u,j} = \mathbb{F}_{q^t}[x]/\langle g^\dagger_{u,j}(x)\rangle$ для $1 \leqslant u \leqslant r$ и $0 \leqslant j \leqslant a_u - 1$. Поэтому всякий элемент $(\beta_1(x), \beta_2(x), \ldots, \beta_\ell(x)) \in \mathcal{V}'$ отождествляется с элементом $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{B}_r) \in \mathcal{G}'$, где $\mathcal{B}_u = (\mathcal{B}_{u,0}, \mathcal{B}_{u,1}, \ldots, \mathcal{B}_{u,a_u-1}) \in \mathcal{G}'_u$, а элемент $\mathcal{B}_{u,j} \in \mathcal{G}'_{u,j}$ имеет вид $\mathcal{B}_{u,j} = (\mathcal{B}^{(1)}_{u,j}, \mathcal{B}^{(2)}_{u,j}, \ldots, \mathcal{B}^{(\ell)}_{u,j})$, где $\mathcal{B}^{(i)}_{u,j} := \varepsilon_{u,i}\beta_i(x) + \langle g^\dagger_{u,j}(x)\rangle \in \varepsilon_{u,i}\mathcal{F}^\dagger_{u,j}$ для $1 \leqslant i \leqslant \ell$, $1 \leqslant u \leqslant r$ и $0 \leqslant j \leqslant a_u - 1$. При таких отождествлениях $\mathcal{V}$ с $\mathcal{G}$ и $\mathcal{V}'$ с $\mathcal{G}'$ пусть $[\cdot\,,\cdot]_\delta \colon \mathcal{G} \times \mathcal{G}' \to \to \bigoplus\limits_{u=1}^{r} \mathcal{F}_u$ – отображение, соответствующее $\tau_{1,-1}$-полуторалинейной форме $(\cdot\,,\cdot)_\delta$ для $\delta \in \{0,\gamma,*\}$, имеющее в трех случаях следующий вид соответственно:

$$[\mathcal{A},\mathcal{B}]_0 = \Bigg(\sum_{i=1}^{\ell} \frac{m}{m_i}\varepsilon_{1,i} \sum_{j=0}^{a_1-1} \sum_{\mu=0}^{(t/a_1)-1} \tau_{q^{\mu a_1+j},1}\big(\mathcal{A}^{(i)}_{1,a_1-j}\tau_{1,-1}(\mathcal{B}^{(i)}_{1,a_1-j})\big), \ldots$$
$$\ldots, \sum_{i=1}^{\ell} \frac{m}{m_i}\varepsilon_{r,i} \sum_{j=0}^{a_r-1} \sum_{\mu=0}^{(t/a_r)-1} \tau_{q^{\mu a_r+j},1}\big(\mathcal{A}^{(i)}_{r,a_r-j}\tau_{1,-1}(\mathcal{B}^{(i)}_{r,a_r-j})\big)\Bigg),$$
$$[\mathcal{A},\mathcal{B}]_\gamma = \Bigg(\sum_{i=1}^{\ell} \frac{m}{m_i}\varepsilon_{1,i} \sum_{j=0}^{a_1-1} \sum_{\mu=0}^{(t/a_1)-1} \tau_{q^{\mu a_1+j},1}\big(\gamma\mathcal{A}^{(i)}_{1,a_1-j}\tau_{q^{\frac{t}{2}},-1}(\mathcal{B}^{(i)}_{1,\frac{t}{2}-j})\big), \ldots$$
$$\ldots, \sum_{i=1}^{\ell} \frac{m}{m_i}\varepsilon_{r,i} \sum_{j=0}^{a_r-1} \sum_{\mu=0}^{(t/a_r)-1} \tau_{q^{\mu a_r+j},1}\big(\gamma\mathcal{A}^{(i)}_{r,a_r-j}\tau_{q^{\frac{t}{2}},-1}(\mathcal{B}^{(i)}_{r,\frac{t}{2}-j})\big)\Bigg)$$

и

$$[\mathcal{A},\mathcal{B}]_* = -[\mathcal{A},\mathcal{B}]_0 + \Bigg(\sum_{i=1}^{\ell} \frac{m}{m_i}\varepsilon_{1,i}\Bigg(\Bigg(\sum_{j=0}^{a_1-1} \sum_{\mu=0}^{(t/a_1)-1} \tau_{q^{\mu a_1+j},1}\big(\mathcal{A}^{(i)}_{1,a_1-j}\big)\Bigg) \times$$
$$\times \Bigg(\sum_{j=0}^{a_1-1} \sum_{\sigma=0}^{(t/a_1)-1} \tau_{q^{\sigma a_1+j},1}\big(\tau_{1,-1}(\mathcal{B}^{(i)}_{1,a_1-j})\big)\Bigg)\Bigg), \ldots$$
$$\ldots, \sum_{i=1}^{\ell} \frac{m}{m_i}\varepsilon_{r,i}\Bigg(\Bigg(\sum_{j=0}^{a_r-1} \sum_{\mu=0}^{(t/a_r)-1} \tau_{q^{\mu a_r+j},1}\big(\mathcal{A}^{(i)}_{r,a_r-j}\big)\Bigg) \times$$
$$\times \Bigg(\sum_{j=0}^{a_r-1} \sum_{\sigma=0}^{(t/a_r)-1} \tau_{q^{\sigma a_r+j},1}\big(\tau_{1,-1}(\mathcal{B}^{(i)}_{r,a_r-j})\big)\Bigg)\Bigg)\Bigg)$$

для любых $\mathcal{A} \in \mathcal{G}$ и $\mathcal{B} \in \mathcal{G}'$. Согласно [16, леммы 2.3, 2.4] отображение $[\cdot\,,\cdot]_\delta$ является рефлексивной невырожденной эрмитовой $\tau_{1,-1}$-полуторалинейной формой на $\mathcal{G} \times \mathcal{G}'$ при $\delta \in \{0,*\}$, а отображение $[\cdot\,,\cdot]_\gamma$ – рефлексивной невырожденной антиэрмитовой

$\tau_{1,-1}$-полуторалинейной формой на $\mathcal{G} \times \mathcal{G}'$. Ввиду вышесказанного δ-двойственный код $\mathcal{C}^{\perp_\delta}$ для Ω-аддитивного МС-кода $\mathcal{C}(\subseteq \mathcal{G})$ длины n над $\mathbb{F}_{q^t}$ задается как

$$\mathcal{C}^{\perp_\delta} = \{\mathcal{B} \in \mathcal{G}' : [\mathcal{A}, \mathcal{B}]_\delta = 0 \text{ для всех } \mathcal{A} \in \mathcal{C}\}.$$

Теперь без ограничения общности пусть $g_{1,0}(x), g_{1,1}(x), \ldots, g_{1,a_1-1}(x), \ldots, g_{e_1,0}(x), g_{e_1,1}(x), \ldots, g_{e_1,a_{e_1}-1}(x)$ – все различные возвратные (взаимные самим себе) неприводимые множители многочленов $x^{m_1} - \omega_1, x^{m_2} - \omega_2, \ldots, x^{m_\ell} - \omega_\ell$ в кольце $\mathbb{F}_{q^t}[x]$, $g_{e_1+1,0}(x), g^\dagger_{e_1+1,0}(x),\ g_{e_1+1,1}(x), g^\dagger_{e_1+1,1}(x),\ \ldots,\ g_{e_1+1,a_{e_1+1}-1}(x), g^\dagger_{e_1+1,a_{e_1+1}-1}(x),\ \ldots,$ $g_{e_2,0}(x), g^\dagger_{e_2,0}(x),\ g_{e_2,1}(x), g^\dagger_{e_2,1}(x),\ \ldots,\ g_{e_2,a_{e_2}-1}(x), g^\dagger_{e_2,a_{e_2}-1}(x)$ – неприводимые множители, образующие взаимные пары, а $g_{e_2+1,0}(x), g_{e_2+1,1}(x), \ldots, g_{e_2+1,a_{e_2+1}-1}(x), \ldots,$ $g_{e_3,0}(x), g_{e_3,1}(x), \ldots, g_{e_3,a_{e_3}-1}(x)$ – все остальные неприводимые множители этих многочленов. Заметим, что $r = e_2 + e_3 - e_1$.

Далее, для $e_1 + 1 \leqslant w \leqslant e_2$ и $1 \leqslant i \leqslant \ell$ положим

$$\varepsilon^\dagger_{w,i} = \begin{cases} 1, & \text{если } g^\dagger_{w,j}(x) \mid (x^{m_i} - \omega_i) \text{ в } \mathbb{F}_{q^t}[x] \text{ для некоторого } j, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть $\mathcal{I}_w = \{i : 1 \leqslant i \leqslant \ell,\ \varepsilon_{w,i} = \varepsilon^\dagger_{w,i}\}$ и $\mathcal{I}'_w = \{i : 1 \leqslant i \leqslant \ell,\ \varepsilon_{w,i} \neq \varepsilon^\dagger_{w,i}\}$. Заметим, что тогда $\{1, 2, \ldots, \ell\} = \mathcal{I}_w \cup \mathcal{I}'_w$ (несвязное объединение). Положим $\eta_w = \sum\limits_{i \in \mathcal{I}_w} \varepsilon_{w,i}$, $\varrho_w = \sum\limits_{i \in \mathcal{I}'_w} \varepsilon_{w,i}$ и $\tau_w = \sum\limits_{i \in \mathcal{I}'_w} \varepsilon^\dagger_{w,i}$ для $e_1 + 1 \leqslant w \leqslant e_2$. Тогда

$$\mathcal{G} = \left(\bigoplus_{\nu=1}^{e_1} \mathcal{G}_\nu\right) \oplus \left(\bigoplus_{w=e_1+1}^{e_2} (\mathcal{G}_w \oplus \mathcal{G}^\dagger_w)\right) \oplus \left(\bigoplus_{s=e_2+1}^{e_3} \mathcal{G}_s\right),$$

где $\mathcal{G}_\nu$ (соответственно, $\mathcal{G}_w$, $\mathcal{G}^\dagger_w$ и $\mathcal{G}_s$) – векторное пространство над $\mathcal{F}_\nu$ (соответственно, $\mathcal{F}_w$, $\mathcal{F}^\dagger_w$ и $\mathcal{F}_s$) для каждого ν (соответственно, w и s). Заметим также, что

$$\mathcal{G}' = \left(\bigoplus_{\nu=1}^{e_1} \mathcal{G}_\nu\right) \oplus \left(\bigoplus_{w=e_1+1}^{e_2} (\mathcal{H}_w \oplus \mathcal{H}^\dagger_w)\right) \oplus \left(\bigoplus_{s=e_2+1}^{e_3} \mathcal{G}^\dagger_s\right),$$

где $\mathcal{G}_\nu$ (соответственно, $\mathcal{H}_w$, $\mathcal{H}^\dagger_w$ и $\mathcal{G}^\dagger_s$) – векторное пространство над $\mathcal{F}_\nu$ (соответственно, $\mathcal{F}_w$, $\mathcal{F}^\dagger_w$ и $\mathcal{F}^\dagger_s$) для каждого ν (соответственно, w и s). Таким образом, справедлива следующая

Теорема 2 [16]. *Пусть $\mathcal{C}$ – Ω-аддитивный МС-код длины n над $\mathbb{F}_{q^t}$. Тогда имеют место следующие разложения*:

(a) $\mathcal{C} = \left(\bigoplus\limits_{\nu=1}^{e_1} \mathcal{C}_\nu\right) \oplus \left(\bigoplus\limits_{w=e_1+1}^{e_2} (\mathcal{C}_w \oplus \mathcal{C}^\dagger_w)\right) \oplus \left(\bigoplus\limits_{s=e_2+1}^{e_3} \mathcal{C}_s\right)$, *где $\mathcal{C}_\nu$ (соответственно, $\mathcal{C}_w$, $\mathcal{C}^\dagger_w$ и $\mathcal{C}_s$) – подпространство пространства $\mathcal{G}_\nu$ (соответственно, $\mathcal{G}_w$, $\mathcal{G}^\dagger_w$ и $\mathcal{G}_s$) над $\mathcal{F}_\nu$ (соответственно, $\mathcal{F}_w$, $\mathcal{F}^\dagger_w$ и $\mathcal{F}_s$) для каждого ν (соответственно, w и s)*;

(b) $\mathcal{C}^{\perp_\delta} = \left(\bigoplus\limits_{\nu=1}^{e_1} \mathcal{C}_\nu^{\perp_\delta}\right) \oplus \left(\bigoplus\limits_{w=e_1+1}^{e_2} (\mathcal{C}_w^{\dagger\perp_\delta} \oplus \mathcal{C}_w^{\perp_\delta})\right) \oplus \left(\bigoplus\limits_{s=e_2+1}^{e_3} \mathcal{C}_s^{\perp_\delta}\right)$, *где $\mathcal{C}_\nu^{\perp_\delta}$ (соответственно, $\mathcal{C}_w^{\perp_\delta}$, $\mathcal{C}_w^{\dagger\perp_\delta}$ и $\mathcal{C}_s^{\perp_\delta}$) – ортогональное дополнение к $\mathcal{C}_\nu$ (соответственно, $\mathcal{C}_w$, $\mathcal{C}^\dagger_w$ и $\mathcal{C}_s$) относительно полуторалинейной формы $[\cdot\,,\cdot]_\delta$, ограниченной на $\mathcal{G}_\nu \times \mathcal{G}_\nu$ (соответственно, $\mathcal{H}^\dagger_w \times \mathcal{G}_w$, $\mathcal{H}_w \times \mathcal{G}^\dagger_w$ и $\mathcal{G}^\dagger_s \times \mathcal{G}_s$) для каждого ν (соответственно, w и s).*

Подробнее об алгебраических структурах аддитивных Ω-МС-кодов над $\mathbb{F}_{q^t}$ и их δ-двойственных кодов см. в [16, §§ 2, 3].

§ 3. Необходимое и достаточное условие, при котором Ω-аддитивный МС-код над $\mathbb{F}_{q^t}$ имеет дополнительный δ-двойственный

В следующей теореме выводится необходимое и достаточное условие, при котором Ω-аддитивный МС-код длины n над $\mathbb{F}_{q^t}$ имеет дополнительный δ-двойственный, где $\delta \in \{0, *, \gamma\}$.

Теорема 3. *Пусть $\Omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\ell)$ фиксировано. Рассмотрим Ω-аддитивный МС-код*

$$\mathcal{C} = \left(\bigoplus_{\nu=1}^{e_1} \mathcal{C}_\nu\right) \oplus \left(\bigoplus_{w=e_1+1}^{e_2} (\mathcal{C}_w \oplus \mathcal{C}_w^\dagger)\right) \oplus \left(\bigoplus_{s=e_2+1}^{e_3} \mathcal{C}_s\right)$$

длины n над $\mathbb{F}_{q^t}$. Для $\delta \in \{0, *, \gamma\}$ код $\mathcal{C}$ имеет дополнительный δ-двойственный тогда и только тогда, когда выполнены следующие два условия:

- *Для $1 \leqslant \nu \leqslant e_1$ пространство $\mathcal{C}_\nu$ является $\mathcal{F}_\nu$-подпространством $\mathcal{G}_\nu$, таким что $\mathcal{C}_\nu \cap \mathcal{C}_\nu^{\perp_\delta} = \{0\}$ (т.е. $\mathcal{C}_\nu$ – невырожденное $\mathcal{F}_\nu$-подпространство $\mathcal{G}_\nu$);*
- *Для $e_1+1 \leqslant w \leqslant e_2$ пространство $\mathcal{C}_w$ является $\mathcal{F}_w$-подпространством $\mathcal{G}_w$, а $\mathcal{C}_w^\dagger$ – $\mathcal{F}_w^\dagger$-подпространством $\mathcal{G}_w^\dagger$, и при этом $\mathcal{C}_w \cap \mathcal{C}_w^{\dagger\perp_\delta} = \{0\}$ и $\mathcal{C}_w^\dagger \cap \mathcal{C}_w^{\perp_\delta} = \{0\}$.*

Как следствие, общее число $\mathfrak{D}$ различных аддитивных Ω-МС-кодов длины n над $\mathbb{F}_{q^t}$, имеющих дополнительные δ-двойственные, равно

$$\mathfrak{D} = \prod_{\nu=1}^{e_1} \mathfrak{D}_\nu \prod_{w=e_1+1}^{e_2} \mathfrak{D}_w \prod_{s=e_2+1}^{e_3} \mathfrak{D}_s, \tag{1}$$

где $\mathfrak{D}_\nu$, $1 \leqslant \nu \leqslant e_1$, – число различных невырожденных $\mathcal{F}_\nu$-подпространств в $\mathcal{G}_\nu$, $\mathfrak{D}_w$, $e_1+1 \leqslant w \leqslant e_2$, – число различных пар $(\mathcal{C}_w, \mathcal{C}_w^\dagger)$, где $\mathcal{C}_w$ – $\mathcal{F}_w$-подпространство в $\mathcal{G}_w$, а $\mathcal{C}_w^\dagger$ – $\mathcal{F}_w^\dagger$-подпространство в $\mathcal{G}_w^\dagger$, таких что $\mathcal{C}_w \cap \mathcal{C}_w^{\dagger\perp_\delta} = \{0\}$ и $\mathcal{C}_w^\dagger \cap \mathcal{C}_w^{\perp_\delta} = \{0\}$, а $\mathfrak{D}_s$, $e_2+1 \leqslant s \leqslant e_3$, – число различных $\mathcal{F}_s$-подпространств в $\mathcal{G}_s$.

Доказательство непосредственно вытекает из теорем 1 и 2. ▲

Теперь применим эту теорему и теорию разложений Витта для подсчета количества всех аддитивных Ω-МС-кодов длины n над $\mathbb{F}_{q^t}$, имеющих дополнительные δ-двойственные, где $\delta \in \{0, *, \gamma\}$. Для этого вначале напомним некоторые определения из геометрии и теории групп. Если V – конечномерное векторное пространство над полем $\mathbb{F}_{\mathfrak{Q}}$, а B – полуторалинейная форма на V, то пара (V, B) называется полуторалинейным пространством (formed space) над $\mathbb{F}_{\mathfrak{Q}}$. Размерностью полуторалинейного пространства (V, B) называется размерность V как векторного пространства над $\mathbb{F}_{\mathfrak{Q}}$ и обозначается через $\dim_{\mathbb{F}_{\mathfrak{Q}}} V$. Пусть теперь (V, B) – n-мерное рефлексивное невырожденное полуторалинейное пространство над $\mathbb{F}_{\mathfrak{Q}}$. Индексом Витта m пространства (V, B) называется размерность максимального самоортогонального (или, что то же самое, максимального вполне изотропного) подпространства V. Отметим, что $n \geqslant 2m$. Ненулевой вектор $v \in V$ называется изотропным, если $B(v, v) = 0$. Гиперболической парой называется пара (v, w) изотропных векторов $v, w \in V$, таких что $B(v, w) = 1$. Всюду далее через $I_{m,n-2m}$ и $H_{m,n-2m}$ будем обозначать, соответственно, число изотропных векторов и гиперболических пар в n-мерном полуторалинейном пространстве (V, B) с индексом Витта m. Подробнее см. в [17, 18].

Напомним также следующий хорошо известный факт.

Лемма 1. *Для любого числа $\mathfrak{Q}$, равного степени простого, и любых натуральных чисел B, K, таких что $B \leqslant K$, число различных B-мерных подпространств K-мерного векторного пространств над $\mathbb{F}_{\mathfrak{Q}}$ равно $\mathfrak{Q}$-ичному гауссовскому биномиальному коэффициенту $\begin{bmatrix} K \\ B \end{bmatrix}_{\mathfrak{Q}} = \prod\limits_{b=0}^{B-1} \dfrac{(\mathfrak{Q}^{K-b} - 1)}{(\mathfrak{Q}^{b+1} - 1)}$ (напомним, что $\mathfrak{Q}$-ичный биноми-*

альный коэффициент $\begin{bmatrix} K \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathfrak{Q}}$ *по определению равен* 1). *Как следствие, общее число различных подпространств* K*-мерного векторного пространства над* $\mathbb{F}_{\mathfrak{Q}}$ *равно*

$$N(K,\mathfrak{Q}) = \sum_{B=0}^{K} \begin{bmatrix} K \\ B \end{bmatrix}_{\mathfrak{Q}} = 1 + \sum_{B=1}^{K} \begin{bmatrix} K \\ B \end{bmatrix}_{\mathfrak{Q}}.$$

Теперь приступим к подсчету количества всех аддитивных Ω-МС-кодов длины n с длинами блоков $(m_1, m_2, \ldots, m_\ell)$ над $\mathbb{F}_{q^t}$, имеющих дополнительные δ-двойственные, для $\delta \in \{0, *, \gamma\}$.

§ 4. Число аддитивных Ω-МС-кодов над $\mathbb{F}_{q^t}$, имеющих дополнительные δ-двойственные

В следующей теореме получены явные формулы для числа всех аддитивных Ω-МС-кодов длины n над $\mathbb{F}_{q^t}$, имеющих дополнительные δ-двойственные, для $\delta \in$ $\in \{0, *, \gamma\}$.

Теорема 4. *Пусть* $\Omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\ell)$ *фиксировано. Тогда для* $\delta \in \{0, *, \gamma\}$ *общее число* $\mathfrak{D}$ *различных аддитивных* Ω*-МС-кодов длины* n *над* $\mathbb{F}_{q^t}$*, имеющих дополнительные* δ*-двойственные, равно*

$$\mathfrak{D} = \prod_{\nu=1}^{e_1} \mathfrak{D}_\nu \prod_{w=e_1+1}^{e_2} \left(\sum_{k=0}^{\eta_w t} \sum_{k_1=0}^{\varrho_w t} \sum_{k_2=0}^{\tau_w t} q^{k d_w (\eta_w t - k)} \begin{bmatrix} \eta_w t \\ k \end{bmatrix}_{q^{d_w}} \begin{bmatrix} \varrho_w t \\ k_1 \end{bmatrix}_{q^{d_w}} \begin{bmatrix} \tau_w t \\ k_2 \end{bmatrix}_{q^{d_w}} \right) \times$$
$$\times \prod_{s=e_2+1}^{e_3} \left(\sum_{a=0}^{\varepsilon_s t} \begin{bmatrix} \varepsilon_s t \\ a \end{bmatrix}_{q^{d_s}} \right),$$

где число $\mathfrak{D}_\nu$, $1 \leqslant \nu \leqslant e_1$, *равно следующему*:

- $2 + \sum\limits_{\substack{k=1 \\ k \text{ четно}}}^{\varepsilon_\nu t - 1} q^{\frac{k(\varepsilon_\nu t - k)}{2}} \begin{bmatrix} \varepsilon_\nu t/2 \\ k/2 \end{bmatrix}_{q^2}$, *если* $\nu \in \mathcal{J}_1$ *и либо* $\delta = \gamma$ *и* $\varepsilon_\nu t$ *четно, либо* $\delta = *$ *и оба числа* $\varepsilon_\nu t, q$ *четны*;
- $2 + \sum\limits_{\substack{k=1 \\ k \text{ четно}}}^{\varepsilon_\nu t - 1} q^{\frac{k(\varepsilon_\nu t - k + 1)}{2}} \begin{bmatrix} (\varepsilon_\nu t - 1)/2 \\ k/2 \end{bmatrix}_{q^2} + \sum\limits_{\substack{k=1 \\ k \text{ нечетно}}}^{\varepsilon_\nu t - 1} q^{\frac{(\varepsilon_\nu t - k)(k+1)}{2}} \begin{bmatrix} (\varepsilon_\nu t - 1)/2 \\ (k-1)/2 \end{bmatrix}_{q^2}$, *если* $\nu \in \mathcal{J}_1$, $\delta \in \{0, *\}$ *и оба числа* $\varepsilon_\nu t, q$ *нечетны*;
- $2 + \sum\limits_{\substack{k=1 \\ k \text{ четно}}}^{\varepsilon_\nu t - 1} q^{\frac{k(\varepsilon_\nu t - k)}{2}} \begin{bmatrix} \varepsilon_\nu t/2 \\ k/2 \end{bmatrix}_{q^2} + \sum\limits_{\substack{k=1 \\ k \text{ нечетно}}}^{\varepsilon_\nu t - 1} q^{\frac{(k\varepsilon_\nu t - k^2 - 1)}{2}} (q^{\frac{\varepsilon_\nu t}{2}} + 1) \begin{bmatrix} (\varepsilon_\nu t - 2)/2 \\ (k-1)/2 \end{bmatrix}_{q^2}$, *если* $\nu \in \mathcal{J}_1$, $\delta \in \{0, *\}$ *и либо* $\varepsilon_\nu t$ *четно и* $q \equiv 1 \pmod 4$, *либо* $\varepsilon_\nu t \equiv 0 \pmod 4$ *и* $q \equiv 3 \pmod 4$;
- $2 + \sum\limits_{\substack{k=1 \\ k \text{ четно}}}^{\varepsilon_\nu t - 1} q^{\frac{k(\varepsilon_\nu t - k)}{2}} \begin{bmatrix} \varepsilon_\nu t/2 \\ k/2 \end{bmatrix}_{q^2} + \sum\limits_{\substack{k=1 \\ k \text{ нечетно}}}^{\varepsilon_\nu t - 1} q^{\frac{(k\varepsilon_\nu t - k^2 - 1)}{2}} (q^{\frac{\varepsilon_\nu t}{2}} - 1) \begin{bmatrix} (\varepsilon_\nu t - 2)/2 \\ (k-1)/2 \end{bmatrix}_{q^2}$, *если* $\nu \in \mathcal{J}_1$, $\delta \in \{0, *\}$, $\varepsilon_\nu t \equiv 2 \pmod 4$ *и* $q \equiv 3 \pmod 4$;
- $2 + \sum\limits_{\substack{k=1 \\ k \text{ четно}}}^{\varepsilon_\nu t - 1} q^{\frac{k(\varepsilon_\nu t - k + 1)}{2}} \begin{bmatrix} (\varepsilon_\nu t - 1)/2 \\ k/2 \end{bmatrix}_{q^2} + \sum\limits_{\substack{k=1 \\ k \text{ нечетно}}}^{\varepsilon_\nu t - 1} q^{\frac{(\varepsilon_\nu t - k)(k+1)}{2}} \begin{bmatrix} (\varepsilon_\nu t - 1)/2 \\ (k-1)/2 \end{bmatrix}_{q^2}$, *если* $\nu \in \mathcal{J}_1$, $\delta = 0$, q *четно и* $\varepsilon_\nu t$ *нечетно*;

- $2+\sum\limits_{\substack{k=1\\ k \text{ четно}}}^{\varepsilon_\nu t-1} q^{\frac{(k\varepsilon_\nu t-k^2-2)}{2}}\left\{(q^k+q-1)\begin{bmatrix}(\varepsilon_\nu t-2)/2\\ k/2\end{bmatrix}_{q^2}+(q^{\varepsilon_\nu t-k+1}-q^{\varepsilon_\nu t-k}+1)\times\right.$ $\left.\times\begin{bmatrix}(\varepsilon_\nu t-2)/2\\ (k-2)/2\end{bmatrix}_{q^2}\right\}+\sum\limits_{\substack{k=1\\ k \text{ нечетно}}}^{\varepsilon_\nu t-1} q^{\frac{(k+1)\varepsilon_\nu t-(k^2+1)}{2}}\begin{bmatrix}(\varepsilon_\nu t-2)/2\\ (k-1)/2\end{bmatrix}_{q^2}$, *если* $\nu\in\mathcal{J}_1$, $\delta=0$ *и оба числа* $\varepsilon_\nu t, q$ *четны*;
- $2+\sum\limits_{k=1}^{\varepsilon_\nu t-1} q^{\frac{k(\varepsilon_\nu t-k)d_\nu}{2}}\prod\limits_{a=0}^{k-1}\left(\dfrac{q^{\frac{(\varepsilon_\nu t-a)d_\nu}{2}}-(-1)^{\varepsilon_\nu t-a}}{q^{\frac{(k-a)d_\nu}{2}}-(-1)^{k-a}}\right)$, *если* $\nu\in\mathcal{J}_2$.

Для доказательства теоремы напомним, что согласно (1) общее число $\mathfrak{D}$ различных аддитивных Ω-МС-кодов длины n над $\mathbb{F}_{q^t}$, имеющих дополнительные δ-двойственные, равно $\mathfrak{D}=\prod\limits_{\nu=1}^{e_1}\mathfrak{D}_\nu\prod\limits_{w=e_1+1}^{e_2}\mathfrak{D}_w\prod\limits_{s=e_2+1}^{e_3}\mathfrak{D}_s$, где

- $\mathfrak{D}_\nu$, $1\leqslant\nu\leqslant e_1$, равно числу различных невырожденных $\mathcal{F}_\nu$-подпространств в $\mathcal{G}_\nu$;
- $\mathfrak{D}_w$, $e_1+1\leqslant w\leqslant e_2$, равно числу различных пар $(\mathcal{C}_w,\mathcal{C}_w^\dagger)$, где $\mathcal{C}_w$ – $\mathcal{F}_w$-подпространство в $\mathcal{G}_w$, а $\mathcal{C}_w^\dagger$ – $\mathcal{F}_w^\dagger$-подпространство в $\mathcal{G}_w^\dagger$, таких что $\mathcal{C}_w\cap\mathcal{C}_w^{\dagger\perp_\delta}=\{0\}$ и $\mathcal{C}_w^\dagger\cap\mathcal{C}_w^{\perp_\delta}=\{0\}$;
- $\mathfrak{D}_s$, $e_2+1\leqslant s\leqslant e_3$, равно числу различных $\mathcal{F}_s$-подпространств в $\mathcal{G}_s$.

Ввиду этого для доказательства теоремы 4 достаточно определить числа $\mathfrak{D}_\nu$ для $1\leqslant\nu\leqslant e_1$, $\mathfrak{D}_w$ для $e_1+1\leqslant w\leqslant e_2$ и $\mathfrak{D}_s$ для $e_2+1\leqslant s\leqslant e_3$. С этой целью введем множества $\mathcal{J}_1=\{\nu:\ 1\leqslant\nu\leqslant e_1,\ d_\nu=1\}$ и $\mathcal{J}_2=\{\nu:\ 1\leqslant\nu\leqslant e_1,\ d_\nu>1\}$. Отметим, что $\{1,2,\ldots,e_1\}=\mathcal{J}_1\cup\mathcal{J}_2$ (несвязное объединение). Теперь приведем лемму 3.4 из работы [16], полезную для определения чисел $\mathfrak{D}_\nu$, $1\leqslant\nu\leqslant e_1$.

Лемма 2 [16]. *Зафиксируем* $\nu\in\mathcal{J}_1\cup\mathcal{J}_2=\{1,2,\ldots,e_1\}$. *Для* $\delta\in\{0,*,\gamma\}$ *обозначим через* $[\cdot,\cdot]_\delta\restriction_{\mathcal{G}_\nu\times\mathcal{G}_\nu}$ *ограничение* $\tau_{1,-1}$*-полуторалинейной формы* $[\cdot,\cdot]_\delta$ *на* $\mathcal{G}_\nu\times\mathcal{G}_\nu$. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

(a) *Для* $\delta\in\{0,*,\gamma\}$ *ограничение* $[\cdot,\cdot]_\delta\restriction_{\mathcal{G}_\nu\times\mathcal{G}_\nu}$ *является рефлексивной невырожденной* $\tau_{1,-1}$*-полуторалинейной формой на* $\mathcal{G}_\nu$;

(b) *Для* $\nu\in\mathcal{J}_1$ *форма* $[\cdot,\cdot]_\delta\restriction_{\mathcal{G}_\nu\times\mathcal{G}_\nu}$ *является симметрической при* $\delta\in\{0,*\}$, *а форма* $[\cdot,\cdot]_\gamma\restriction_{\mathcal{G}_\nu\times\mathcal{G}_\nu}$ *– неопределенная*;

(c) *Для* $\nu\in\mathcal{J}_2$ *форма* $[\cdot,\cdot]_\delta\restriction_{\mathcal{G}_\nu\times\mathcal{G}_\nu}$ *является эрмитовой при* $\delta\in\{0,*\}$, *а форма* $[\cdot,\cdot]_\gamma\restriction_{\mathcal{G}_\nu\times\mathcal{G}_\nu}$ *– антиэрмитова.*

Для доказательства теоремы 4 вначале найдем значения $\mathfrak{D}_\nu$ для $\nu\in\mathcal{J}_1\cup\mathcal{J}_2=\{1,2,\ldots,e_1\}$. Для этого сперва заметим, что если обозначить через $\mathcal{N}_{\nu,k}$ число различных k-мерных невырожденных $\mathcal{F}_\nu$-подпространств в $\mathcal{G}_\nu$ для $0\leqslant k\leqslant\varepsilon_\nu t$, то $\mathfrak{D}_\nu=\sum\limits_{k=0}^{\varepsilon_\nu t}\mathcal{N}_{\nu,k}$. Так как $\tau_{1,-1}$-полуторалинейная форма $[\cdot,\cdot]_\delta\restriction_{\mathcal{G}_\nu\times\mathcal{G}_\nu}$ рефлексивна и невырождена, то $\mathcal{N}_{\nu,0}=\mathcal{N}_{\nu,\varepsilon_\nu t}=1$, откуда получаем

$$\mathfrak{D}_\nu=2+\sum_{k=1}^{\varepsilon_\nu t-1}\mathcal{N}_{\nu,k}\quad\text{для } \nu\in\mathcal{J}_1\cup\mathcal{J}_2=\{1,2,\ldots,e_1\}. \tag{2}$$

4.1. Определение числа $\mathfrak{D}_\nu$ для $\nu\in\mathcal{J}_1$. В этом пункте рассмотрим случай $\nu\in\mathcal{J}_1$ и найдем значения $\mathfrak{D}_\nu$ для $\delta\in\{0,*,\gamma\}$. Здесь $d_\nu=1$, и поэтому $\mathcal{F}_\nu\simeq\mathbb{F}_q$. В следующем предложении вычисляются значения $\mathfrak{D}_\nu$, когда либо $\delta=\gamma$, либо $\delta=*$ и q четно.

П р е д л о ж е н и е 1. *Пусть* $\nu \in \mathcal{J}_1$ *фиксировано. Если либо* $\delta = \gamma$, *либо* $\delta = *$ *и* q *четно, то*

$$\mathfrak{D}_\nu = 2 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ четно}}}^{\varepsilon_\nu t-1} q^{\frac{k(\varepsilon_\nu t-k)}{2}} \begin{bmatrix} \varepsilon_\nu t/2 \\ k/2 \end{bmatrix}_{q^2}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно формуле (2) для доказательства достаточно найти числа $\mathcal{N}_{\nu,k}$ для $1 \leqslant k \leqslant \varepsilon_\nu t - 1$. Для этого заметим, что по утверждениям (a), (b) леммы 2 $(\mathcal{G}_\nu, [\cdot\,,\cdot]_\delta \restriction_{\mathcal{G}_\nu \times \mathcal{G}_\nu})$ является симплектическим пространством над $\mathcal{F}_\nu$, когда $\delta = \gamma$. Кроме того, когда $\delta = *$ и q четно, $[\mathcal{A}_\nu, \mathcal{A}_\nu]_* = 0$ для всех $\mathcal{A}_\nu \in \mathcal{G}_\nu$. Отсюда по лемме 2(a) следует, что $(\mathcal{G}_\nu, [\cdot\,,\cdot]_* \restriction_{\mathcal{G}_\nu \times \mathcal{G}_\nu})$ также является симплектическим пространством над $\mathcal{F}_\nu$, когда q четно. Далее, любое k-мерное невырожденное $\mathcal{F}_\nu$-подпространство W в $\mathcal{G}_\nu$ также является симплектическим пространством. Согласно [18, с. 69] размерность k такого подпространства W должна быть четной. Значит, $\mathcal{N}_{\nu,k} = 0$, если k нечетно.

Пусть k четно. В этом случае k-мерное подпространство W в $\mathcal{G}_\nu$ имеет разложение Витта $W = \langle \mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{B}_\nu^{(1)} \rangle \perp \langle \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \mathcal{B}_\nu^{(2)} \rangle \perp \ldots \perp \langle \mathcal{A}_\nu^{(\frac{k}{2})}, \mathcal{B}_\nu^{(\frac{k}{2})} \rangle$, где $(\mathcal{A}_\nu^{(h)}, \mathcal{B}_\nu^{(h)})$ – гиперболическая пара в $\mathcal{G}_\nu$ для $1 \leqslant h \leqslant \dfrac{k}{2}$; множество $\{\mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{B}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \mathcal{B}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(\frac{k}{2})}, \mathcal{B}_\nu^{(\frac{k}{2})}\}$ называется базисом Витта пространства W над $\mathcal{F}_\nu$ (см. [18, с. 69]). Применяя [17, предложение 2.9] и теорему Витта о сокращении, получаем, что число базисов Витта типа $\{\mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{B}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \mathcal{B}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(\frac{k}{2})}, \mathcal{B}_\nu^{(\frac{k}{2})}\}$ в $\mathcal{G}_\nu$ равно

$$U_{k,\varepsilon_\nu t} = H_{\frac{\varepsilon_\nu t}{2},0} H_{\frac{\varepsilon_\nu t-2}{2},0} \ldots H_{\frac{\varepsilon_\nu t-k+2}{2},0}.$$

Аналогично выводится, что число базисов Витта k-мерного $\mathcal{F}_\nu$-подпространства в $\mathcal{G}_\nu$ равно

$$U_k = H_{\frac{k}{2},0} H_{\frac{k-2}{2},0} \ldots H_{1,0}.$$

Тогда согласно [18, с. 70] получаем

$$\mathcal{N}_{\nu,k} = \frac{U_{k,\varepsilon_\nu t}}{U_k} = q^{\frac{k(\varepsilon_\nu t-k)}{2}} \begin{bmatrix} \varepsilon_\nu t/2 \\ k/2 \end{bmatrix}_{q^2}.$$

Из этого с учетом (2) немедленно вытекает требуемое. ▲

В следующем предложении найдены числа $\mathfrak{D}_\nu$ в случае нечетного q и $\delta \in \{0, *\}$.

П р е д л о ж е н и е 2. *Пусть* $\nu \in \mathcal{J}_1$ *фиксировано. Если* $\delta \in \{0, *\}$, *а нечетное* q *– степень простого числа, то*

$$\mathfrak{D}_\nu = \begin{cases} 2 + \displaystyle\sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ четно}}}^{\varepsilon_\nu t-1} q^{\frac{k(\varepsilon_\nu t-k+1)}{2}} \begin{bmatrix} (\varepsilon_\nu t-1)/2 \\ k/2 \end{bmatrix}_{q^2} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ нечетно}}}^{\varepsilon_\nu t-1} q^{\frac{(\varepsilon_\nu t-k)(k+1)}{2}} \begin{bmatrix} (\varepsilon_\nu t-1)/2 \\ (k-1)/2 \end{bmatrix}_{q^2}, \\ \textit{если } \varepsilon_\nu t \textit{ нечетно}, \\ 2 + \displaystyle\sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ четно}}}^{\varepsilon_\nu t-1} q^{\frac{k(\varepsilon_\nu t-k)}{2}} \begin{bmatrix} \varepsilon_\nu t/2 \\ k/2 \end{bmatrix}_{q^2} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ нечетно}}}^{\varepsilon_\nu t-1} q^{\frac{(\varepsilon_\nu tk-k^2-1)}{2}} (q^{\frac{\varepsilon_\nu t}{2}}+1) \begin{bmatrix} (\varepsilon_\nu t-2)/2 \\ (k-1)/2 \end{bmatrix}_{q^2}, \\ \textit{если либо } \varepsilon_\nu t \textit{ четно и } q \equiv 1 \pmod 4, \\ \textit{либо } \varepsilon_\nu t \equiv 0 \pmod 4 \textit{ и } q \equiv 3 \pmod 4, \\ 2 + \displaystyle\sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ четно}}}^{\varepsilon_\nu t-1} q^{\frac{k(\varepsilon_\nu t-k)}{2}} \begin{bmatrix} \varepsilon_\nu t/2 \\ k/2 \end{bmatrix}_{q^2} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ нечетно}}}^{\varepsilon_\nu t-1} q^{\frac{(\varepsilon_\nu tk-k^2-1)}{2}} (q^{\frac{\varepsilon_\nu t}{2}}-1) \begin{bmatrix} (\varepsilon_\nu t-2)/2 \\ (k-1)/2 \end{bmatrix}_{q^2}, \\ \textit{если } \varepsilon_\nu t \equiv 2 \pmod 4 \textit{ и } q \equiv 3 \pmod 4. \end{cases}$$

Доказательство. В случае $\delta \in \{0, *\}$ согласно утверждениям (a), (b) леммы 2 $(\mathcal{G}_\nu, [\cdot\,,\cdot]_\delta\restriction_{\mathcal{G}_\nu\times\mathcal{G}_\nu})$ является $(\varepsilon_\nu t)$-мерным ортогональным пространством над $\mathcal{F}_\nu$. Далее, поскольку q нечетно, ортогональное пространство $(\mathcal{G}_\nu, [\cdot\,,\cdot]_\delta\restriction_{\mathcal{G}_\nu\times\mathcal{G}_\nu})$ может рассматриваться как невырожденное квадратичное пространство $(\mathcal{G}_\nu, \mathcal{Q}_\nu)$ относительно квадратичной формы $\mathcal{Q}_\nu\colon \mathcal{G}_\nu \to \mathcal{F}_\nu$, определяемой как $\mathcal{Q}_\nu(\mathcal{A}_\nu) = \dfrac{1}{2}[\mathcal{A}_\nu, \mathcal{A}_\nu]_\delta$ для всех $\mathcal{A}_\nu \in \mathcal{G}_\nu$. Далее, индекс Витта θ для $\mathcal{G}_\nu$ (см. [11, с. 279]) имеет вид

$$\theta = \begin{cases} (\varepsilon_\nu t-1)/2, & \text{если } \varepsilon_\nu t \text{ нечетно,}\\ \varepsilon_\nu t/2, & \text{если } \varepsilon_\nu t \equiv 2 \pmod 4 \text{ и } q \equiv 3 \pmod 4,\\ (\varepsilon_\nu t-2)/2, & \text{если либо } \varepsilon_\nu t \text{ четно и } q \equiv 1 \pmod 4,\\ & \text{либо } \varepsilon_\nu t \equiv 0 \pmod 4 \text{ и } q \equiv 3 \pmod 4. \end{cases} \tag{3}$$

Для вычисления $\mathfrak{D}_\nu$ согласно (2) достаточно определить числа $\mathcal{N}_{\nu,k}$ для $1 \leqslant k \leqslant \varepsilon_\nu t-1$. Поэтому далее будем считать, что $1 \leqslant k \leqslant \varepsilon_\nu t-1$ фиксировано. Из [18, с. 138] известно, что k-мерное невырожденное квадратичное $\mathcal{F}_\nu$-подпространство W в $\mathcal{G}_\nu$ имеет разложение Витта вида $W = \langle \mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{B}_\nu^{(1)}\rangle \perp \langle \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \mathcal{B}_\nu^{(2)}\rangle \perp \ldots \perp \langle \mathcal{A}_\nu^{(\theta_k)}, \mathcal{B}_\nu^{(\theta_k)}\rangle \perp \mathcal{W}_k$, где θ_k – индекс Витта пространства W, $(\mathcal{A}_\nu^{(h)}, \mathcal{B}_\nu^{(h)})$ – гиперболическая пара в $\mathcal{G}_\nu$ для $1 \leqslant h \leqslant \theta_k$, а $\mathcal{W}_k$ – анизотропное $\mathcal{F}_\nu$-подпространство в $\mathcal{G}_\nu$, такое что $\dim_{\mathcal{F}_\nu} \mathcal{W}_k = k - 2\theta_k \leqslant 2$. Рассмотрим отдельно следующие два случая: (i) k нечетно и (ii) k четно.

(i) Вначале пусть k нечетно. Тогда согласно [18, с. 138] имеем $\theta_k = (k-1)/2$, откуда $\dim_{\mathcal{F}_\nu} \mathcal{W}_k = 1$. Из этого, в свою очередь, следует, что k-мерное $\mathcal{F}_\nu$-подпространство W в $\mathcal{G}_\nu$ имеет разложение Витта $W = \langle \mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{B}_\nu^{(1)}\rangle \perp \langle \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \mathcal{B}_\nu^{(2)}\rangle \perp \ldots \perp \langle \mathcal{A}_\nu^{(\frac{k-1}{2})}, \mathcal{B}_\nu^{(\frac{k-1}{2})}\rangle \perp \langle Z_\nu\rangle$, где $(\mathcal{A}_\nu^{(h)}, \mathcal{B}_\nu^{(h)})$ – гиперболическая пара в $\mathcal{G}_\nu$ для $1 \leqslant h \leqslant \dfrac{k-1}{2}$, а Z_ν – несингулярный вектор в $\mathcal{G}_\nu$; множество $\{\mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{B}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \mathcal{B}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(\frac{k-1}{2})}, \mathcal{B}_\nu^{(\frac{k-1}{2})}, Z_\nu\}$ называется базисом Витта пространства W над $\mathcal{F}_\nu$. Применяя [17, предложение 2.9] и теорему Витта о сокращении, получаем, что число базисов Витта типа $\{\mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{B}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \mathcal{B}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(\frac{k-1}{2})}, \mathcal{B}_\nu^{(\frac{k-1}{2})}, Z_\nu\}$ в $\mathcal{G}_\nu$ равно

$$U_{\frac{k-1}{2},\theta} = H_{\theta,\varepsilon_\nu t-2\theta} H_{\theta-1,\varepsilon_\nu t-2\theta} \ldots H_{\theta-\frac{(k-3)}{2},\varepsilon_\nu t-2\theta}\Big(q^{\varepsilon_\nu t-k+1} - 1 - I_{\theta-\frac{(k-1)}{2},\varepsilon_\nu t-2\theta}\Big).$$

Аналогично выводится, что число базисов Витта для k-мерного $\mathcal{F}_\nu$-подпространства в $\mathcal{G}_\nu$ равно

$$U_{\frac{k-1}{2}} = H_{\frac{k-1}{2},1} H_{\frac{k-3}{2},1} \ldots H_{1,1}(q-1).$$

Тогда в силу [18, с. 140–141] имеем

$$\mathcal{N}_{\nu,k} = \frac{U_{\frac{k-1}{2},\theta}}{U_{\frac{k-1}{2}}} = \begin{cases} q^{\frac{(k\varepsilon_\nu t-k^2-1)}{2}}\big(q^{\frac{\varepsilon_\nu t}{2}}-1\big)\begin{bmatrix}(\varepsilon_\nu t-2)/2\\ (k-1)/2\end{bmatrix}_{q^2}, & \text{если } \theta = \varepsilon_\nu t/2,\\ q^{\frac{(\varepsilon_\nu t-k)(k+1)}{2}}\begin{bmatrix}(\varepsilon_\nu t-1)/2\\ (k-1)/2\end{bmatrix}_{q^2}, & \text{если } \theta = (\varepsilon_\nu t-1)/2,\\ q^{\frac{(k\varepsilon_\nu t-k^2-1)}{2}}\big(q^{\frac{\varepsilon_\nu t}{2}}+1\big)\begin{bmatrix}(\varepsilon_\nu t-2)/2\\ (k-1)/2\end{bmatrix}_{q^2}, & \text{если } \theta = (\varepsilon_\nu t-2)/2. \end{cases} \tag{4}$$

(ii) Теперь пусть k четно. Согласно [18, с. 138] имеем либо $\theta_k = k/2$, либо $\theta_k = (k-2)/2$. Обозначим через $R_{\nu,k}$ и $S_{\nu,k}$ число k-мерных невырожденных квадратичных $\mathcal{F}_\nu$-подпространств в $\mathcal{G}_\nu$, имеющих индексы Витта $k/2$ и $(k-2)/2$ соответственно. Отметим, что $\mathcal{N}_{\nu,k} = R_{\nu,k} + S_{\nu,k}$.

Если $\theta_k = k/2$, то $\dim_{\mathcal{F}_\nu} \mathcal{W}_k = 0$. Тогда k-мерное $\mathcal{F}_\nu$-подпространство W в $\mathcal{G}_\nu$ имеет разложение Витта $W = \langle \mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{B}_\nu^{(1)} \rangle \perp \langle \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \mathcal{B}_\nu^{(2)} \rangle \perp \ldots \perp \langle \mathcal{A}_\nu^{(\frac{k}{2})}, \mathcal{B}_\nu^{(\frac{k}{2})} \rangle$, где $(\mathcal{A}_\nu^{(h)}, \mathcal{B}_\nu^{(h)})$ – гиперболическая пара в $\mathcal{G}_\nu$ для $1 \leqslant h \leqslant \dfrac{k}{2}$; множество $\{\mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{B}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \mathcal{B}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(\frac{k}{2})}, \mathcal{B}_\nu^{(\frac{k}{2})}\}$ называется базисом Витта пространства W над $\mathcal{F}_\nu$. Применяя [17, предложение 2.9] и теорему Витта о сокращении, получаем, что число базисов Витта типа $\{\mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{B}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \mathcal{B}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(\frac{k}{2})}, \mathcal{B}_\nu^{(\frac{k}{2})}\}$ в $\mathcal{G}_\nu$ равно

$$U_{\frac{k}{2},\theta} = H_{\theta,\varepsilon_\nu t-2\theta} H_{\theta-1,\varepsilon_\nu t-2\theta} \ldots H_{\theta-\frac{k-2}{2},\varepsilon_\nu t-2\theta},$$

а число базисов Витта k-мерного $\mathcal{F}_\nu$-подпространства в $\mathcal{G}_\nu$, имеющего индекс Витта $\dfrac{k}{2}$, равно $U_{\frac{k}{2}} = H_{\frac{k}{2},0} H_{\frac{k-2}{2},0} \ldots H_{1,0}$. Тогда из [18, с. 140–141] получаем

$$R_{\nu,k} = \frac{U_{\frac{k}{2},\theta}}{U_{\frac{k}{2}}} = \begin{cases} \dfrac{q^{\frac{k(\varepsilon_\nu t-k)}{2}}(q^{\frac{k}{2}}+1)(q^{\frac{\varepsilon_\nu t-k}{2}}+1)}{2(q^{\frac{\varepsilon_\nu t}{2}}+1)} \begin{bmatrix} \varepsilon_\nu t/2 \\ k/2 \end{bmatrix}_{q^2}, & \text{если } \theta = \varepsilon_\nu t/2, \\ \dfrac{q^{\frac{k(\varepsilon_\nu t-k)}{2}}(q^{\frac{k}{2}}+1)}{2} \begin{bmatrix} (\varepsilon_\nu t-1)/2 \\ k/2 \end{bmatrix}_{q^2}, & \text{если } \theta = (\varepsilon_\nu t-1)/2, \\ \dfrac{q^{\frac{k(\varepsilon_\nu t-k)}{2}}(q^{\frac{k}{2}}+1)(q^{\frac{\varepsilon_\nu t-k}{2}}-1)}{2(q^{\frac{\varepsilon_\nu t}{2}}-1)} \begin{bmatrix} \varepsilon_\nu t/2 \\ k/2 \end{bmatrix}_{q^2}, & \text{если } \theta = (\varepsilon_\nu t-2)/2. \end{cases}$$

Если $\theta_k = (k-2)/2$, то $\dim_{\mathcal{F}_\nu} \mathcal{W}_k = 2$. В этом случае, рассуждая так же, как и в [13, леммы 3.2, 3.3], получаем что каждое двумерное анизотропное $\mathcal{F}_\nu$-подпространство в W имеет ортогональный базис и что число различных ортогональных базисов двумерного анизотропного $\mathcal{F}_\nu$-подпространства в W равно

$$X_{k,\theta} = \begin{cases} \dfrac{q^{\varepsilon_\nu t-k}(q-1)^2(q^{\frac{\varepsilon_\nu t-k}{2}}-1)(q^{\frac{\varepsilon_\nu t-k+2}{2}}-1)}{2}, & \text{если } \theta = \varepsilon_\nu t/2, \\ \dfrac{q^{\varepsilon_\nu t-k}(q-1)^2(q^{\varepsilon_\nu t-k+1}-1)}{2}, & \text{если } \theta = (\varepsilon_\nu t-1)/2, \\ \dfrac{q^{\varepsilon_\nu t-k}(q-1)^2(q^{\frac{\varepsilon_\nu t-k}{2}}+1)(q^{\frac{\varepsilon_\nu t-k+2}{2}}+1)}{2}, & \text{если } \theta = (\varepsilon_\nu t-2)/2. \end{cases}$$

Таким образом, k-мерное $\mathcal{F}_\nu$-подпространство W пространства $\mathcal{G}_\nu$ имеет разложение Витта $W = \langle \mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{B}_\nu^{(1)} \rangle \perp \langle \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \mathcal{B}_\nu^{(2)} \rangle \perp \ldots \perp \langle \mathcal{A}_\nu^{(\frac{k-2}{2})}, \mathcal{B}_\nu^{(\frac{k-2}{2})} \rangle \perp \langle Z_\nu^{(1)}, Z_\nu^{(2)} \rangle$, где $(\mathcal{A}_\nu^{(h)}, \mathcal{B}_\nu^{(h)})$ – гиперболическая пара в $\mathcal{G}_\nu$ для $1 \leqslant h \leqslant \dfrac{k-2}{2}$, а $\{Z_\nu^{(1)}, Z_\nu^{(2)}\}$ – ортогональный базис двумерного анизотропного $\mathcal{F}_\nu$-подпространства $\mathcal{W}_k$ пространства W; множество $\{\mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{B}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \mathcal{B}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(\frac{k-2}{2})}, \mathcal{B}_\nu^{(\frac{k-2}{2})}, Z_\nu^{(1)}, Z_\nu^{(2)}\}$ называется базисом Витта пространства W над $\mathcal{F}_\nu$. Применяя [17, предложение 2.9] и теорему Витта о сокращении, получаем, что число базисов Витта типа $\{\mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{B}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \mathcal{B}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(\frac{k-2}{2})}, \mathcal{B}_\nu^{(\frac{k-2}{2})}, Z_\nu^{(1)}, Z_\nu^{(2)}\}$ в $\mathcal{G}_\nu$ равно

$$U_{\frac{k-2}{2},\theta} = H_{\theta,\varepsilon_\nu t-2\theta} H_{\theta-1,\varepsilon_\nu t-2\theta} \ldots H_{\theta-\frac{(k-4)}{2},\varepsilon_\nu t-2\theta} X_{k,\theta}.$$

Аналогично выводится, что число базисов Витта k-мерного $\mathcal{F}_\nu$-подпространства в $\mathcal{G}_\nu$, имеющих индекс Витта $\dfrac{k-2}{2}$, равно

$$U_{\frac{k-2}{2}} = H_{\frac{k-2}{2},2} H_{\frac{k-4}{2},2} \ldots H_{1,2}(q^2-1)(q-1).$$

Тогда согласно [18, с. 140–141] получаем

$$S_{\nu,k}=\frac{U_{\frac{k-2}{2},\theta}}{U_{\frac{k-2}{2}}}=\begin{cases}\dfrac{q^{\frac{k(\varepsilon_\nu t-k)}{2}}(q^{\frac{k}{2}}-1)(q^{\frac{\varepsilon_\nu t-k}{2}}-1)}{2(q^{\frac{\varepsilon_\nu t}{2}}+1)}\begin{bmatrix}\varepsilon_\nu t/2\\ k/2\end{bmatrix}_{q^2}, & \text{если } \theta=\varepsilon_\nu t/2,\\ \dfrac{q^{\frac{k(\varepsilon_\nu t-k)}{2}}(q^{\frac{k}{2}}-1)}{2}\begin{bmatrix}(\varepsilon_\nu t-1)/2\\ k/2\end{bmatrix}_{q^2}, & \text{если } \theta=(\varepsilon_\nu t-1)/2,\\ \dfrac{q^{\frac{k(\varepsilon_\nu t-k)}{2}}(q^{\frac{k}{2}}-1)(q^{\frac{\varepsilon_\nu t-k}{2}}+1)}{2(q^{\frac{\varepsilon_\nu t}{2}}-1)}\begin{bmatrix}\varepsilon_\nu t/2\\ k/2\end{bmatrix}_{q^2}, & \text{если } \theta=(\varepsilon_\nu t-2)/2.\end{cases}$$

Отсюда следует, что

$$\mathcal{N}_{\nu,k}=R_{\nu,k}+S_{\nu,k}=\begin{cases}q^{\frac{k(\varepsilon_\nu t-k)}{2}}\begin{bmatrix}\varepsilon_\nu t/2\\ k/2\end{bmatrix}_{q^2}, & \text{если } \theta=\varepsilon_\nu t/2,\\ q^{\frac{k(\varepsilon_\nu t-k+1)}{2}}\begin{bmatrix}(\varepsilon_\nu t-1)/2\\ k/2\end{bmatrix}_{q^2}, & \text{если } \theta=(\varepsilon_\nu t-1)/2,\\ q^{\frac{k(\varepsilon_\nu t-k)}{2}}\begin{bmatrix}\varepsilon_\nu t/2\\ k/2\end{bmatrix}_{q^2}, & \text{если } \theta=(\varepsilon_\nu t-2)/2.\end{cases}\qquad(5)$$

Наконец, подставляя значения $\mathcal{N}_{\nu,k}$ из (4), (5) в (2), получаем требуемый результат. ▲

В следующем предложении найдены числа $\mathfrak{D}_\nu$ в случае, когда q четно и $\delta=0$.

Предложение 3. *Пусть $\nu\in\mathcal{J}_1$ фиксировано. Если $\delta=0$, а четное q – степень простого числа, то*

$$\mathfrak{D}_\nu=\begin{cases}2+\sum\limits_{\substack{k=1\\ k\text{ четно}}}^{\varepsilon_\nu t-1}q^{\frac{k(\varepsilon_\nu t-k+1)}{2}}\begin{bmatrix}(\varepsilon_\nu t-1)/2\\ k/2\end{bmatrix}_{q^2}+\\ \quad+\sum\limits_{\substack{k=1\\ k\text{ нечетно}}}^{\varepsilon_\nu t-1}q^{\frac{(\varepsilon_\nu t-k)(k+1)}{2}}\begin{bmatrix}(\varepsilon_\nu t-1)/2\\ (k-1)/2\end{bmatrix}_{q^2}, & \textit{если } \varepsilon_\nu t \textit{ нечетно},\\ 2+\sum\limits_{\substack{k=1\\ k\text{ четно}}}^{\varepsilon_\nu t-1}q^{\frac{(k\varepsilon_\nu t-k^2-2)}{2}}\left((q^k+q-1)\begin{bmatrix}(\varepsilon_\nu t-2)/2\\ k/2\end{bmatrix}_{q^2}+\right.\\ \quad\left.+(q^{\varepsilon_\nu t-k+1}-q^{\varepsilon_\nu t-k}+1)\begin{bmatrix}(\varepsilon_\nu t-2)/2\\ (k-2)/2\end{bmatrix}_{q^2}\right)+\\ \quad+\sum\limits_{\substack{k=1\\ k\text{ нечетно}}}^{\varepsilon_\nu t-1}q^{\frac{(k+1)\varepsilon_\nu t-(k^2+1)}{2}}\begin{bmatrix}(\varepsilon_\nu t-2)/2\\ (k-1)/2\end{bmatrix}_{q^2}, & \textit{если } \varepsilon_\nu t \textit{ четно}.\end{cases}$$

Доказательство. Чтобы вычислить $\mathfrak{D}_\nu$, в силу (2) достаточно найти числа $\mathcal{N}_{\nu,k}$ для $1\leqslant k\leqslant\varepsilon_\nu t-1$. Для этого зафиксируем $1\leqslant k\leqslant\varepsilon_\nu t-1$. Заметим, что поскольку q здесь четно, все m_i – нечетные целые числа. Следовательно, m нечетно, откуда, в свою очередь, вытекает, что $\dfrac{m}{m_i}=1$ в $\mathcal{F}_\nu$. Так как $\nu\in\mathcal{J}_1$, то $d_\nu=1$, откуда $a_\nu=\text{НОД}(t,d_\nu)=1$. Поэтому каждый $\mathcal{A}_\nu\in\mathcal{G}_\nu$ можно представить в виде $\mathcal{A}_\nu=\mathcal{A}_{\nu,0}=(\mathcal{A}_{\nu,0}^{(1)},\mathcal{A}_{\nu,0}^{(2)},\dots,\mathcal{A}_{\nu,0}^{(\ell)})$, где $\mathcal{A}_{\nu,0}^{(i)}\in\varepsilon_{\nu,i}\mathcal{F}_{\nu,0}$ для $1\leqslant i\leqslant\ell$. Теперь положим $\mathcal{M}_\nu=\left\{(\mathcal{A}_{\nu,0}^{(1)},\mathcal{A}_{\nu,0}^{(2)},\dots,\mathcal{A}_{\nu,0}^{(\ell)})\in\mathcal{G}_\nu:\sum\limits_{i=1}^{\ell}\varepsilon_{\nu,i}\big(\mathcal{A}_{\nu,0}^{(i)}+\tau_{q,1}(\mathcal{A}_{\nu,0}^{(i)})+\ldots+\tau_{q^{t-1},1}(\mathcal{A}_{\nu,0}^{(i)})\big)=0\right\}$. Заметим, что множество $\mathcal{M}_\nu$ является $(\varepsilon_\nu t-1)$-мерным $\mathcal{F}_\nu$-подпространством в $\mathcal{G}_\nu$. Положим также $\Theta_\nu=(\varepsilon_{\nu,1},\varepsilon_{\nu,2},\dots,\varepsilon_{\nu,\ell})\in\mathcal{G}_\nu$. Легко видеть, что $\Theta_\nu\in\mathcal{M}_\nu$ тогда и только тогда, когда $\varepsilon_\nu t$ четно. Соответственно возникают следующие случаи: (i) $\varepsilon_\nu t$ нечетно и (ii) $\varepsilon_\nu t$ четно.

(i) Пусть $\varepsilon_\nu t$ нечетно. Тогда $\Theta_\nu \notin \mathcal{M}_\nu$ и $\dim_{\mathcal{F}_\nu}\langle\Theta_\nu\rangle = 1$. Кроме того, $[\mathcal{A}_\nu, \Theta_\nu]_0 = 0$ для всех $\mathcal{A}_\nu \in \mathcal{M}_\nu$, и при этом $\mathcal{M}_\nu \cap \langle\Theta_\nu\rangle = \{0\}$. Отсюда следует, что пространство $\mathcal{G}_\nu$ является ортогональной прямой суммой своих $\mathcal{F}_\nu$-подпространств $\mathcal{M}_\nu$ и $\langle\Theta_\nu\rangle$, т.е. $\mathcal{G}_\nu = \mathcal{M}_\nu \perp \langle\Theta_\nu\rangle$. Далее, $(\mathcal{M}_\nu, [\cdot\,,\cdot]_0\restriction_{\mathcal{M}_\nu\times\mathcal{M}_\nu})$ – симплектическое пространство над $\mathcal{F}_\nu$. При этом любое $\mathcal{F}_\nu$-подпространство в $\mathcal{G}_\nu$ либо содержится в $\mathcal{M}_\nu$, либо не содержится в $\mathcal{M}_\nu$.

Для вычисления $\mathcal{N}_{\nu,k}$ вначале определим число различных k-мерных невырожденных $\mathcal{F}_\nu$-подпространств пространства $\mathcal{G}_\nu$, содержащихся в $\mathcal{M}_\nu$. Для этого, рассуждая так же, как и в предложении 1, получаем, что для нечетного k в $\mathcal{M}_\nu$ не существует k-мерных невырожденных $\mathcal{F}_\nu$-подпространств, а для четного k в $\mathcal{M}_\nu$ содержится ровно

$$\mathfrak{N}^{(e)}_{\nu,k} = q^{\frac{k(\varepsilon_\nu t-k-1)}{2}} \begin{bmatrix} (\varepsilon_\nu t-1)/2 \\ k/2 \end{bmatrix}_{q^2}$$

различных k-мерных невырожденных $\mathcal{F}_\nu$-подпространств.

Далее, нетрудно видеть, что любое k-мерное $\mathcal{F}_\nu$-подпространство W в $\mathcal{G}_\nu$, не содержащееся в $\mathcal{M}_\nu$, имеет тип $W = \langle\mathcal{A}^{(1)}_\nu, \mathcal{A}^{(2)}_\nu, \dots, \mathcal{A}^{(k-1)}_\nu, \mathcal{A}^{(k)}_\nu \ +\Theta_\nu\rangle$, где $\mathcal{A}^{(h)}_\nu \in \mathcal{M}_\nu \setminus \{0\}$ для $1 \leqslant h \leqslant k-1$ и $\mathcal{A}^{(k)}_\nu \in \mathcal{M}_\nu$. Теперь отдельно рассмотрим следующие два случая: k нечетно и k четно.

Вначале пусть k нечетно. Тогда, применяя [19, теорема 5.1.1] и [20, гл. 6, упражнение 21], получаем, что $\mathcal{F}_\nu$-подпространство $\langle\mathcal{A}^{(1)}_\nu, \mathcal{A}^{(2)}_\nu, \dots, \mathcal{A}^{(k-1)}_\nu, \mathcal{A}^{(k)}_\nu + \Theta_\nu\rangle$ пространства $\mathcal{G}_\nu$ невырождено тогда и только тогда, когда $\langle\mathcal{A}^{(1)}_\nu, \mathcal{A}^{(2)}_\nu, \dots, \mathcal{A}^{(k-1)}_\nu\rangle$ является $(k-1)$-мерным невырожденным $\mathcal{F}_\nu$-подпространством в $\mathcal{M}_\nu$. Далее заметим, что все $\mathcal{A}^{(k)}_\nu \in \langle\mathcal{A}^{(1)}_\nu, \mathcal{A}^{(2)}_\nu, \dots, \mathcal{A}^{(k-1)}_\nu\rangle^{\perp_0}$ порождают различные k-мерные невырожденные $\mathcal{F}_\nu$-подпространства $\langle\mathcal{A}^{(1)}_\nu, \mathcal{A}^{(2)}_\nu, \dots, \mathcal{A}^{(k-1)}_\nu, \mathcal{A}^{(k)}_\nu + \Theta_\nu\rangle$ в $\mathcal{G}_\nu$ и что есть ровно $q^{\varepsilon_\nu t-k}$ способов выбрать $\mathcal{A}^{(k)}_\nu$. Отсюда, рассуждая так же, как в предложении 1, получаем, что число различных k-мерных невырожденных $\mathcal{F}_\nu$-подпространств типа $\langle\mathcal{A}^{(1)}_\nu, \mathcal{A}^{(2)}_\nu, \dots, \mathcal{A}^{(k-1)}_\nu, \mathcal{A}^{(k)}_\nu + \Theta_\nu\rangle$ в $\mathcal{G}_\nu$ равно

$$\mathfrak{M}^{(o)}_{\nu,k} = q^{\varepsilon_\nu t-k} q^{\frac{(k-1)(\varepsilon_\nu t-k)}{2}} \begin{bmatrix} (\varepsilon_\nu t-1)/2 \\ (k-1)/2 \end{bmatrix}_{q^2}.$$

Теперь пусть k четно. Если $\mathcal{A}^{(k)}_\nu = 0$, то в силу [19, теорема 5.1.1] и [20, гл. 6, упражнение 21] получаем, что $\mathcal{F}_\nu$-подпространство $\langle\mathcal{A}^{(1)}_\nu, \mathcal{A}^{(2)}_\nu, \dots, \mathcal{A}^{(k-1)}_\nu, \Theta_\nu\rangle$ пространства $\mathcal{G}_\nu$ вырождено.

Если $\mathcal{A}^{(k)}_\nu \neq 0$, то снова применяя [19, теорема 5.1.1] и [20, гл. 6, упражнение 21], находим, что $\mathcal{F}_\nu$-подпространство $\langle\mathcal{A}^{(1)}_\nu, \mathcal{A}^{(2)}_\nu, \dots, \mathcal{A}^{(k-1)}_\nu, \mathcal{A}^{(k)}_\nu + \Theta_\nu\rangle$ в $\mathcal{G}_\nu$ невырождено тогда и только тогда, когда $\langle\mathcal{A}^{(1)}_\nu, \mathcal{A}^{(2)}_\nu, \dots, \mathcal{A}^{(k)}_\nu\rangle$ является k-мерным невырожденным $\mathcal{F}_\nu$-подпространством в $\mathcal{M}_\nu$. Далее, каждое k-мерное невырожденное $\mathcal{F}_\nu$-подпространство $\langle\mathcal{A}^{(1)}_\nu, \mathcal{A}^{(2)}_\nu, \dots, \mathcal{A}^{(k)}_\nu\rangle$ в $\mathcal{M}_\nu$ порождает ровно (q^k-1) различных $\mathcal{F}_\nu$-подпространств $\langle\mathcal{A}^{(1)}_\nu, \mathcal{A}^{(2)}_\nu, \dots, \mathcal{A}^{(k-1)}_\nu, \mathcal{A}^{(k)}_\nu + \Theta_\nu\rangle$ в $\mathcal{G}_\nu$. Отсюда, рассуждая так же, как и в предложении 1, заключаем, что число различных k-мерных невырожденных $\mathcal{F}_\nu$-подпространств типа $\langle\mathcal{A}^{(1)}_\nu, \mathcal{A}^{(2)}_\nu, \dots, \mathcal{A}^{(k-1)}_\nu, \mathcal{A}^{(k)}_\nu + \Theta_\nu\rangle$ в $\mathcal{G}_\nu$, где $\mathcal{A}^{(h)}_\nu \in \mathcal{M}_\nu \setminus \{0\}$ для $1 \leqslant h \leqslant k$, равно

$$\mathfrak{M}^{(e)}_{\nu,k} = q^{\frac{k(\varepsilon_\nu t-k-1)}{2}} (q^k-1) \begin{bmatrix} (\varepsilon_\nu t-1)/2 \\ k/2 \end{bmatrix}_{q^2}.$$

Объединяя эти случаи, получаем

$$\mathcal{N}_{\nu,k} = \mathfrak{M}^{(o)}_{\nu,k} = q^{\frac{(k+1)(\varepsilon_\nu t-k)}{2}} \begin{bmatrix} (\varepsilon_\nu t-1)/2 \\ (k-1)/2 \end{bmatrix}_{q^2}, \quad \text{если } k \text{ нечетно,}$$

и

$$\mathcal{N}_{\nu,k} = \mathfrak{N}^{(e)}_{\nu,k} + \mathfrak{M}^{(e)}_{\nu,k} = q^{\frac{k(\varepsilon_\nu t-k+1)}{2}} \begin{bmatrix} (\varepsilon_\nu t-1)/2 \\ k/2 \end{bmatrix}_{q^2}, \quad \text{если } k \text{ четно.}$$

(ii) Пусть $\varepsilon_\nu t$ четно. Тогда $\Theta_\nu \in \mathcal{M}_\nu \cap \mathcal{M}_\nu^{\perp_0}$. Пусть теперь $\widehat{\mathcal{M}_\nu}$ – $(\varepsilon_\nu t-2)$-мерное $\mathcal{F}_\nu$-подпространство в $\mathcal{M}_\nu$, такое что $\Theta_\nu \notin \widehat{\mathcal{M}_\nu}$, так что $\mathcal{M}_\nu = \widehat{\mathcal{M}_\nu} \oplus \langle\Theta_\nu\rangle$. Далее, заметим, что существует $y_\nu \in \widehat{\mathcal{M}}_\nu^{\perp_0} \setminus \mathcal{M}_\nu$, такой что $\mathcal{G}_\nu = \widehat{\mathcal{M}_\nu} \oplus \langle\Theta_\nu\rangle \oplus \langle y_\nu\rangle$. При этом $(\widehat{\mathcal{M}_\nu}, [\cdot\,,\cdot]_0\restriction_{\widehat{\mathcal{M}_\nu}\times\widehat{\mathcal{M}_\nu}})$ является $(\varepsilon_\nu t-2)$-мерным симплектическим $\mathcal{F}_\nu$-подпространством в $\mathcal{G}_\nu$. Далее заметим, что каждое k-мерное $\mathcal{F}_\nu$-подпространство в $\mathcal{G}_\nu$ либо содержится в $\widehat{\mathcal{M}_\nu}$, либо содержится в $\widehat{\mathcal{M}_\nu} \oplus \langle\Theta_\nu\rangle$, но не содержится в $\widehat{\mathcal{M}_\nu}$, либо содержится в $\widehat{\mathcal{M}_\nu} \oplus \langle y_\nu\rangle$, но не содержится в $\widehat{\mathcal{M}_\nu}$, либо содержится в $\mathcal{G}_\nu = \widehat{\mathcal{M}_\nu} \oplus \oplus \langle\Theta_\nu\rangle \oplus \langle y_\nu\rangle$, но не содержится ни в одном из подпространств $\widehat{\mathcal{M}_\nu}$, $\widehat{\mathcal{M}_\nu} \oplus \langle\Theta_\nu\rangle$ и $\widehat{\mathcal{M}_\nu} \oplus \langle y_\nu\rangle$. В соответствии с этим рассмотрим следующие четыре случая по отдельности.

A. Вначале подсчитаем число различных k-мерных невырожденных $\mathcal{F}_\nu$-подпространств в $\widehat{\mathcal{M}_\nu}$. Для этого, рассуждая так же, как и в предложении 1, заметим, что для нечетного k в $\widehat{\mathcal{M}_\nu}$ не существует k-мерных невырожденных $\mathcal{F}_\nu$-подпространств, а для четного k в $\widehat{\mathcal{M}_\nu}$ есть ровно

$$\mathfrak{N}^{(e)}_{\nu,k} = q^{\frac{k(\varepsilon_\nu t-k-2)}{2}\left[\begin{smallmatrix} (\varepsilon_\nu t-2)/2 \\ k/2 \end{smallmatrix}\right]_{q^2}}$$

различных k-мерных невырожденных $\mathcal{F}_\nu$-подпространств.

B. Теперь подсчитаем все различные k-мерные невырожденные $\mathcal{F}_\nu$-подпространства пространства $\mathcal{G}_\nu$, содержащиеся в $\widehat{\mathcal{M}_\nu} \oplus \langle\Theta_\nu\rangle$, но не содержащиеся в $\widehat{\mathcal{M}_\nu}$. Рассуждая, как и в случае (i), получаем, что если k нечетно, то в $\mathcal{G}_\nu$ не существует таких k-мерных невырожденных $\mathcal{F}_\nu$-подпространств, а если k четно, то в $\mathcal{G}_\nu$ есть ровно

$$\mathfrak{S}^{(e)}_{\nu,k} = (q^k-1)q^{\frac{k(\varepsilon_\nu t-k-2)}{2}\left[\begin{smallmatrix} (\varepsilon_\nu t-2)/2 \\ k/2 \end{smallmatrix}\right]_{q^2}}$$

таких k-мерных невырожденных $\mathcal{F}_\nu$-подпространств.

C. Теперь подсчитаем все различные k-мерные невырожденные $\mathcal{F}_\nu$-подпространства пространства $\mathcal{G}_\nu$, содержащиеся в $\widehat{\mathcal{M}_\nu} \oplus \langle y_\nu\rangle$, но не содержащиеся в $\widehat{\mathcal{M}_\nu}$. Снова рассуждая, как в случае (i), получаем, что если k нечетно, то в $\mathcal{G}_\nu$ есть ровно

$$\mathfrak{T}^{(o)}_{\nu,k} = q^{\frac{(k+1)(\varepsilon_\nu t-k-1)}{2}} \begin{bmatrix} (\varepsilon_\nu t-2)/2 \\ (k-1)/2 \end{bmatrix}_{q^2}$$

таких k-мерных невырожденных $\mathcal{F}_\nu$-подпространств, а если k четно, то ровно

$$\mathfrak{T}^{(e)}_{\nu,k} = (q^k-1)q^{\frac{k(\varepsilon_\nu t-k-2)}{2}\left[\begin{smallmatrix} (\varepsilon_\nu t-2)/2 \\ k/2 \end{smallmatrix}\right]_{q^2}}$$

таких k-мерных невырожденных $\mathcal{F}_\nu$-подпространств.

D. Теперь заметим, что любое k-мерное $\mathcal{F}_\nu$-подпространство W пространства $\mathcal{G}_\nu$, содержащееся в $\mathcal{G}_\nu = \widehat{\mathcal{M}_\nu} \oplus \langle\Theta_\nu\rangle \oplus \langle y_\nu\rangle$, но не содержащееся ни в одном из его подпространств $\widehat{\mathcal{M}}_\nu$, $\widehat{\mathcal{M}}_\nu \oplus \langle\Theta_\nu\rangle$ и $\widehat{\mathcal{M}}_\nu \oplus \langle y_\nu\rangle$, относится к одному из следующих двух типов:

I. $W = \langle\mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(k-1)}, \mathcal{A}_\nu^{(k)} + \Theta_\nu + \lambda_\nu y_\nu\rangle$, где $\lambda_\nu \in \mathcal{F}_\nu \setminus \{0\}$, $\mathcal{A}_\nu^{(h)} \in \widehat{\mathcal{M}}_\nu \setminus \{0\}$ для $1 \leqslant h \leqslant k-1$ и $\mathcal{A}_\nu^{(k)} \in \widehat{\mathcal{M}}_\nu$.

II. $W = \langle\mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(k-2)}, \mathcal{A}_\nu^{(k-1)} + \Theta_\nu, \mathcal{A}_\nu^{(k)} + y_\nu\rangle$, где $k \geqslant 2$, $\mathcal{A}_\nu^{(h)} \in \widehat{\mathcal{M}}_\nu \setminus \{0\}$ для $1 \leqslant h \leqslant k-2$ и $\mathcal{A}_\nu^{(k-1)}, \mathcal{A}_\nu^{(k)} \in \widehat{\mathcal{M}}_\nu$.

Чтобы вычислить $\mathcal{N}_{\nu,k}$, вначале определим число различных k-мерных невырожденных $\mathcal{F}_\nu$-подпространств типа $\langle\mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(k-1)}, \mathcal{A}_\nu^{(k)} + \Theta_\nu + \lambda_\nu y_\nu\rangle$ в $\mathcal{G}_\nu$, где $\lambda_\nu \in \mathcal{F}_\nu \setminus \{0\}$, $\mathcal{A}_\nu^{(h)} \in \widehat{\mathcal{M}}_\nu \setminus \{0\}$ для $1 \leqslant h \leqslant k-1$ и $\mathcal{A}_\nu^{(k)} \in \widehat{\mathcal{M}}_\nu$. Для этого рассмотрим следующие два случая: k четно и k нечетно.

Сперва пусть k четно. Если $\mathcal{A}_\nu^{(k)} = 0$, то в силу [19, теорема 5.1.1] и [20, гл. 6, упражнение 21] получаем, что $\mathcal{F}_\nu$-подпространство $\langle\mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(k-1)}, \Theta_\nu + \lambda_\nu y_\nu\rangle$ пространства $\mathcal{G}_\nu$ вырождено.

Если же $\mathcal{A}_\nu^{(k)} \neq 0$, то снова применяя [19, теорема 5.1.1] и [20, гл. 6, упражнение 21], получаем, что $\mathcal{F}_\nu$-подпространство $\langle\mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(k-1)}, \mathcal{A}_\nu^{(k)} + \Theta_\nu + \lambda_\nu y_\nu\rangle$ пространства $\mathcal{G}_\nu$ невырождено тогда и только тогда, когда $\langle\mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(k-1)}, \mathcal{A}_\nu^{(k)}\rangle$ является k-мерным невырожденным $\mathcal{F}_\nu$-подпространством в $\widehat{\mathcal{M}}_\nu$. Далее, каждое k-мерное невырожденное $\mathcal{F}_\nu$-подпространство $\langle\mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(k-1)}, \mathcal{A}_\nu^{(k)}\rangle$ в $\widehat{\mathcal{M}}_\nu$ порождает ровно $(q^k-1)(q-1)$ различных k-мерных невырожденных $\mathcal{F}_\nu$-подпространств $\langle\mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(k-1)}, \mathcal{A}_\nu^{(k)} + \Theta_\nu + \lambda_\nu y_\nu\rangle$ пространства $\mathcal{G}_\nu$.

Отсюда, рассуждая, как в предложении 1, получаем, что число различных k-мерных невырожденных $\mathcal{F}_\nu$-подпространств пространства $\mathcal{G}_\nu$, имеющих тип $\langle\mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(k-1)}, \mathcal{A}_\nu^{(k)} + \Theta_\nu + \lambda_\nu y_\nu\rangle$, равно

$$\mathfrak{U}_{\nu,k}^{(e)} = q^{\frac{k(\varepsilon_\nu t-k-2)}{2}}(q^k-1)(q-1)\begin{bmatrix}(\varepsilon_\nu t-2)/2\\ k/2\end{bmatrix}_{q^2}.$$

Теперь предположим, что k нечетно. Тогда в силу [19, теорема 5.1.1] и [20, гл. 6, упражнение 21] получаем, что подпространство $\langle\mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(k-1)}, \mathcal{A}_\nu^{(k)} + \Theta_\nu + \lambda_\nu y_\nu\rangle$ в $\mathcal{G}_\nu$ невырождено тогда и только тогда, когда $\langle\mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(k-1)}\rangle$ является $(k-1)$-мерным невырожденным $\mathcal{F}_\nu$-подпространством в $\widehat{\mathcal{M}}_\nu$. Далее, заметим, что все элементы $\lambda_\nu \in \mathcal{F}_\nu \setminus \{0\}$ и все элементы $\mathcal{A}_\nu^{(k)} \in \langle\mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(k-1)}\rangle^{\perp_0}$ порождают различные k-мерные невырожденные $\mathcal{F}_\nu$-подпространства $\langle\mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(k-1)}, \mathcal{A}_\nu^{(k)} + \Theta_\nu + \lambda_\nu y_\nu\rangle$ в $\mathcal{G}_\nu$. Отсюда, рассуждая, как в предложении 1, получаем, что число различных k-мерных невырожденных $\mathcal{F}_\nu$-подпространств в $\mathcal{G}_\nu$, имеющих тип $\langle\mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(k-1)}, \mathcal{A}_\nu^{(k)} + \Theta_\nu + \lambda_\nu y_\nu\rangle$, где $\lambda_\nu \in \mathcal{F}_\nu \setminus \{0\}$ и $\mathcal{A}_\nu^{(h)} \in \widehat{\mathcal{M}}_\nu \setminus \{0\}$ для $1 \leqslant h \leqslant k-1$ и $\mathcal{A}_\nu^{(k)} \in \widehat{\mathcal{M}}_\nu$, равно

$$\mathfrak{U}_{\nu,k}^{(o)} = q^{\frac{(k+1)(\varepsilon_\nu t-k-1)}{2}}(q-1)\begin{bmatrix}(\varepsilon_\nu t-2)/2\\ (k-1)/2\end{bmatrix}_{q^2}.$$

Теперь подсчитаем количество различных k-мерных невырожденных $\mathcal{F}_\nu$-подпространств в $\mathcal{G}_\nu$, имеющих тип $\langle\mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(k-2)}, \mathcal{A}_\nu^{(k-1)} + \Theta_\nu, \mathcal{A}_\nu^{(k)} + y_\nu\rangle$, где $k \geqslant 2$, $\mathcal{A}_\nu^{(h)} \in \widehat{\mathcal{M}}_\nu \setminus \{0\}$ для $1 \leqslant h \leqslant k-2$ и $\mathcal{A}_\nu^{(k-1)}, \mathcal{A}_\nu^{(k)} \in \widehat{\mathcal{M}}_\nu$. Для этого снова отдельно рассмотрим два случая: k нечетно и k четно.

Сперва пусть k нечетно. Если $\mathcal{A}_\nu^{(k-1)}=0$, то в силу [19, теорема 5.1.1] и [20, гл. 6, упражнение 21] получаем, что $\mathcal{F}_\nu$-подпространство $\langle \mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(k-2)}, \Theta_\nu, \mathcal{A}_\nu^{(k)} + y_\nu\rangle$ пространства $\mathcal{G}_\nu$ вырождено.

Если $\mathcal{A}_\nu^{(k-1)} \neq 0$, а $\mathcal{A}_\nu^{(k)}=0$, то в силу [19, теорема 5.1.1] и [20, гл. 6, упражнение 21] получаем, что подпространство $\langle \mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(k-2)}, \mathcal{A}_\nu^{(k-1)}+\Theta_\nu, y_\nu\rangle$ в $\mathcal{G}_\nu$ невырождено тогда и только тогда, когда $\langle \mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(k-2)}, \mathcal{A}_\nu^{(k-1)}\rangle$ является $(k-1)$-мерным невырожденным $\mathcal{F}_\nu$-подпространством в $\widehat{\mathcal{M}}_\nu$. Тогда, рассуждая, как и в случае (i), получаем, что число различных k-мерных невырожденных $\mathcal{F}_\nu$-подпространств в $\mathcal{G}_\nu$, имеющих тип $\langle \mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(k-2)}, \mathcal{A}_\nu^{(k-1)}+\Theta_\nu, y_\nu\rangle$, равно

$$\mathfrak{W}_{\nu,k}^{(o_1)} = q^{\frac{(k-1)(\varepsilon_\nu t-k-1)}{2}}(q^{k-1}-1)\begin{bmatrix}(\varepsilon_\nu t-2)/2\\(k-1)/2\end{bmatrix}_{q^2}.$$

Теперь пусть оба вектора $\mathcal{A}_\nu^{(k-1)}$ и $\mathcal{A}_\nu^{(k)}$ ненулевые. Тогда отдельно рассмотрим следующие два случая: $\mathcal{A}_\nu^{(k-1)}, \mathcal{A}_\nu^{(k)}$ линейно зависимы или $\mathcal{A}_\nu^{(k-1)}, \mathcal{A}_\nu^{(k)}$ линейно независимы над $\mathcal{F}_\nu$.

Сперва пусть $\mathcal{A}_\nu^{(k-1)}$ и $\mathcal{A}_\nu^{(k)}$ линейно зависимы над $\mathcal{F}_\nu$. Тогда $\mathcal{A}_\nu^{(k)}=\alpha_\nu\mathcal{A}_\nu^{(k-1)}$ для некоторого $\alpha_\nu\in\mathcal{F}_\nu\setminus\{0\}$. Нетрудно заметить, что $\langle \mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(k-2)}, \mathcal{A}_\nu^{(k-1)}+\Theta_\nu, \mathcal{A}_\nu^{(k)}+y_\nu\rangle = \langle \mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(k-2)}, \mathcal{A}_\nu^{(k-1)}+\Theta_\nu, \lambda_\nu y_\nu+\Theta_\nu\rangle$, где $\lambda_\nu\in\mathcal{F}_\nu\setminus\{0\}$ и $\mathcal{A}_\nu^{(h)}\in\widehat{\mathcal{M}}_\nu\setminus\{0\}$ для $1\leqslant h\leqslant k-1$. Применяя [19, теорема 5.1.1] и [20, гл. 6, упражнение 21], получаем, что подпространство $\langle \mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(k-2)}, \mathcal{A}_\nu^{(k-1)}+\Theta_\nu, \lambda_\nu y_\nu+\Theta_\nu\rangle$ в $\mathcal{G}_\nu$ невырождено тогда и только тогда, когда $(k-1)$-мерное $\mathcal{F}_\nu$-подпространство $\langle \mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(k-1)}\rangle$ пространства $\widehat{\mathcal{M}}_\nu$ невырождено. Снова рассуждая, как в случае (i), получаем, что число различных k-мерных невырожденных $\mathcal{F}_\nu$-подпространств в $\mathcal{G}_\nu$, имеющих тип $\langle \mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(k-2)}, \mathcal{A}_\nu^{(k-1)}+\Theta_\nu, \mathcal{A}_\nu^{(k)}+y_\nu\rangle$, в случае, когда $\mathcal{A}_\nu^{(k-1)}$ и $\mathcal{A}_\nu^{(k)}$ линейно зависимы над $\mathcal{F}_\nu$, равно

$$\mathfrak{W}_{\nu,k}^{(o_2)} = q^{\frac{(k-1)(\varepsilon_\nu t-k-1)}{2}}(q^{k-1}-1)(q-1)\begin{bmatrix}(\varepsilon_\nu t-2)/2\\(k-1)/2\end{bmatrix}_{q^2}.$$

Теперь предположим, что $\mathcal{A}_\nu^{(k-1)}$ и $\mathcal{A}_\nu^{(k)}$ линейно независимы над $\mathcal{F}_\nu$. Тогда, снова применяя [19, теорема 5.1.1] и [20, гл. 6, упражнение 21], получаем, что подпространство $\langle \mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(k-2)}, \mathcal{A}_\nu^{(k-1)}+\Theta_\nu, \mathcal{A}_\nu^{(k)}+y_\nu\rangle$ в $\mathcal{G}_\nu$ невырождено тогда и только тогда, когда $\langle \mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(k-1)}\rangle$ является $(k-1)$-мерным невырожденным $\mathcal{F}_\nu$-подпространством в $\widehat{\mathcal{M}}_\nu$. Далее, заметим, что каждое $(k-1)$-мерное невырожденное $\mathcal{F}_\nu$-подпространство $\langle \mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(k-1)}\rangle$ в $\widehat{\mathcal{M}}_\nu$ порождает ровно $(q^{k-1}-1)$ различных $(k-1)$-мерных невырожденных $\mathcal{F}_\nu$-подпространств $\langle \mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(k-2)}, \mathcal{A}_\nu^{(k-1)}+\Theta_\nu\rangle$ в $\mathcal{G}_\nu$. Кроме того, в силу [17, предложение 2.9] можно представить $\mathcal{A}_\nu^{(k)}\in\widehat{\mathcal{M}}_\nu$ в виде $\mathcal{A}_\nu^{(k)}=\sum_{h=1}^{k-1}\alpha_\nu^{(h)}\mathcal{A}_\nu^{(h)}+\widetilde{\mathcal{W}}_\nu^{(k)}$, где $\alpha_\nu^{(h)}\in\mathcal{F}_\nu$ для $1\leqslant h\leqslant k-1$ и $\widetilde{\mathcal{W}}_\nu^{(k)}\in\langle \mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(k-1)}\rangle^{\perp_0}$. Теперь заметим, что $\langle \mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(k-2)}, \mathcal{A}_\nu^{(k-1)}+\Theta_\nu, \mathcal{A}_\nu^{(k)}+y_\nu\rangle = \langle \mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(k-2)}, \mathcal{A}_\nu^{(k-1)}+\Theta_\nu, \alpha_\nu^{(k-1)}\mathcal{A}_\nu^{(k-1)}+\widetilde{\mathcal{W}}_\nu^{(k)}+y_\nu\rangle$. Нетрудно видеть, что все ненулевые элементы $\mathcal{A}_\nu^{(k)}=\alpha_\nu^{(k-1)}\mathcal{A}_\nu^{(k-1)}+\widetilde{\mathcal{W}}_\nu^{(k)}$ порождают различные k-мерные невырожденные $\mathcal{F}_\nu$-подпространства $\langle \mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(k-2)}, \mathcal{A}_\nu^{(k-1)}+\Theta_\nu, \mathcal{A}_\nu^{(k)}+y_\nu\rangle$ в $\mathcal{G}_\nu$. Отсюда, рассуждая, как в предложении 1, получаем, что число различных k-мерных невырожденных $\mathcal{F}_\nu$-подпространств в $\mathcal{G}_\nu$, имеющих тип

$\langle\mathcal{A}_\nu^{(1)},\mathcal{A}_\nu^{(2)},\ldots,\mathcal{A}_\nu^{(k-2)},\mathcal{A}_\nu^{(k-1)}+\Theta_\nu,\mathcal{A}_\nu^{(k)}+y_\nu\rangle$, в случае, когда $\mathcal{A}_\nu^{(k-1)}$ и $\mathcal{A}_\nu^{(k)}$ линейно независимы над $\mathcal{F}_\nu$, равно

$$\mathfrak{W}_{\nu,k}^{(o_3)}=(q^{\varepsilon_\nu t-k}-q)(q^{k-1}-1)q^{\frac{(k-1)(\varepsilon_\nu t-k-1)}{2}}\begin{bmatrix}(\varepsilon_\nu t-2)/2\\(k-1)/2\end{bmatrix}_{q^2}.$$

Объединяя рассмотренные выше случаи, получаем, что число различных k-мерных невырожденных $\mathcal{F}_\nu$-подпространств в $\mathcal{G}_\nu$, имеющих тип $\langle\mathcal{A}_\nu^{(1)},\mathcal{A}_\nu^{(2)},\ldots,\mathcal{A}_\nu^{(k-2)}$, $\mathcal{A}_\nu^{(k-1)}+\Theta_\nu,\mathcal{A}_\nu^{(k)}+y_\nu\rangle$, где $\mathcal{A}_\nu^{(h)}\in\widehat{\mathcal{M}}_\nu\setminus\{0\}$ для $1\leqslant h\leqslant k-2$ и $\mathcal{A}_\nu^{(k-1)},\mathcal{A}_\nu^{(k)}\in\widehat{\mathcal{M}}_\nu$, равно

$$\mathfrak{W}_{\nu,k}^{(o)}=\mathfrak{W}_{\nu,k}^{(o_1)}+\mathfrak{W}_{\nu,k}^{(o_2)}+\mathfrak{W}_{\nu,k}^{(o_3)}=q^{\frac{k(\varepsilon_\nu t-k)+(\varepsilon_\nu t-2k+1)}{2}}(q^{k-1}-1)\begin{bmatrix}(\varepsilon_\nu t-2)/2\\(k-1)/2\end{bmatrix}_{q^2}.$$

Пусть теперь k четно. Если $\mathcal{A}_\nu^{(k-1)}=\mathcal{A}_\nu^{(k)}=0$, то в силу [19, теорема 5.1.1] и [20, гл. 6, упражнение 21] получаем, что $\mathcal{F}_\nu$-подпространство $\langle\mathcal{A}_\nu^{(1)},\mathcal{A}_\nu^{(2)},\ldots,\mathcal{A}_\nu^{(k-2)}$, $\Theta_\nu,y_\nu\rangle$ в $\mathcal{G}_\nu$ невырождено тогда и только тогда, когда $\langle\mathcal{A}_\nu^{(1)},\mathcal{A}_\nu^{(2)},\ldots,\mathcal{A}_\nu^{(k-2)}\rangle$ является $(k-2)$-мерным невырожденным $\mathcal{F}_\nu$-подпространством в $\widehat{\mathcal{M}}_\nu$. Рассуждая, как и в предложении 1, получаем, что число таких подпространств равно

$$\mathfrak{W}_{\nu,k}^{(e_1)}=q^{\frac{(k-2)(\varepsilon_\nu t-k)}{2}}\begin{bmatrix}(\varepsilon_\nu t-2)/2\\(k-2)/2\end{bmatrix}_{q^2}.$$

Далее, если $\mathcal{A}_\nu^{(k-1)}=0$, а $\mathcal{A}_\nu^{(k)}\neq 0$, то снова применяя [19, теорема 5.1.1] и [20, гл. 6, упражнение 21], получаем, что $\mathcal{F}_\nu$-подпространство $\langle\mathcal{A}_\nu^{(1)},\mathcal{A}_\nu^{(2)},\ldots,\mathcal{A}_\nu^{(k-2)},\Theta_\nu$, $\mathcal{A}_\nu^{(k)}+y_\nu\rangle$ в $\mathcal{G}_\nu$ невырождено тогда и только тогда, когда $(k-2)$-мерное $\mathcal{F}_\nu$-подпространство $\langle\mathcal{A}_\nu^{(1)},\mathcal{A}_\nu^{(2)},\ldots,\mathcal{A}_\nu^{(k-2)}\rangle$ пространства $\widehat{\mathcal{M}}_\nu$ невырождено. Заметим также, что все элементы $\mathcal{A}_\nu^{(k)}\in\langle\mathcal{A}_\nu^{(1)},\mathcal{A}_\nu^{(2)},\ldots,\mathcal{A}_\nu^{(k-2)}\rangle^{\perp_0}\setminus\{0\}$ порождают различные k-мерные невырожденные $\mathcal{F}_\nu$-подпространства $\langle\mathcal{A}_\nu^{(1)},\mathcal{A}_\nu^{(2)},\ldots,\mathcal{A}_\nu^{(k-2)},\Theta_\nu,\mathcal{A}_\nu^{(k)}+y_\nu\rangle$ в $\mathcal{G}_\nu$ и что есть ровно $(q^{\varepsilon_\nu t-k}-1)$ способов выбрать $\mathcal{A}_\nu^{(k)}$. Отсюда, рассуждая, как в предложении 1, получаем, что число различных k-мерных невырожденных $\mathcal{F}_\nu$-подпространств пространства $\mathcal{G}_\nu$, имеющих тип $\langle\mathcal{A}_\nu^{(1)},\mathcal{A}_\nu^{(2)},\ldots,\mathcal{A}_\nu^{(k-2)},\Theta_\nu,\mathcal{A}_\nu^{(k)}+y_\nu\rangle$, равно

$$\mathfrak{W}_{\nu,k}^{(e_2)}=q^{\frac{(k-2)(\varepsilon_\nu t-k)}{2}}(q^{\varepsilon_\nu t-k}-1)\begin{bmatrix}(\varepsilon_\nu t-2)/2\\(k-2)/2\end{bmatrix}_{q^2}.$$

Далее, если $\mathcal{A}_\nu^{(k)}=0$, а $\mathcal{A}_\nu^{(k-1)}\neq 0$, то рассуждая, как и выше, получаем, что число различных k-мерных невырожденных $\mathcal{F}_\nu$-подпространств в $\mathcal{G}_\nu$, имеющих тип $\langle\mathcal{A}_\nu^{(1)},\mathcal{A}_\nu^{(2)},\ldots,\mathcal{A}_\nu^{(k-2)},\mathcal{A}_\nu^{(k-1)}+\Theta_\nu,y_\nu\rangle$, равно

$$\mathfrak{W}_{\nu,k}^{(e_3)}=q^{\frac{(k-2)(\varepsilon_\nu t-k)}{2}}(q^{\varepsilon_\nu t-k}-1)\begin{bmatrix}(\varepsilon_\nu t-2)/2\\(k-2)/2\end{bmatrix}_{q^2}.$$

Наконец, пусть оба вектора $\mathcal{A}_\nu^{(k-1)}$ и $\mathcal{A}_\nu^{(k)}$ ненулевые. Тогда выделяются следующие случаи: $\mathcal{A}_\nu^{(k-1)},\mathcal{A}_\nu^{(k)}$ линейно зависимы или $\mathcal{A}_\nu^{(k-1)},\mathcal{A}_\nu^{(k)}$ линейно независимы над $\mathcal{F}_\nu$.

Сперва пусть $\mathcal{A}_\nu^{(k-1)}$ и $\mathcal{A}_\nu^{(k)}$ линейно зависимы над $\mathcal{F}_\nu$. Тогда $\mathcal{A}_\nu^{(k)}=\beta_\nu\mathcal{A}_\nu^{(k-1)}$ для некоторого $\beta_\nu\in\mathcal{F}_\nu\setminus\{0\}$. Нетрудно видеть, что $\langle\mathcal{A}_\nu^{(1)},\mathcal{A}_\nu^{(2)},\ldots,\mathcal{A}_\nu^{(k-2)},\mathcal{A}_\nu^{(k-1)}+\Theta_\nu$, $\mathcal{A}_\nu^{(k)}+y_\nu\rangle=\langle\mathcal{A}_\nu^{(1)},\mathcal{A}_\nu^{(2)},\ldots,\mathcal{A}_\nu^{(k-1)}+\Theta_\nu,\beta_\nu y_\nu+\Theta_\nu\rangle$, где $\beta_\nu\in\mathcal{F}_\nu\setminus\{0\}$ и $\mathcal{A}_\nu^{(h)}\in\widehat{\mathcal{M}}_\nu\setminus\{0\}$

для $1 \leqslant h \leqslant k-1$. В силу [19, теорема 5.1.1] и [20, гл. 6, упражнение 21] получаем, что $\mathcal{F}_\nu$-подпространство $\langle \mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(k-1)} + \Theta_\nu, \beta_\nu y_\nu + \Theta_\nu\rangle$ в $\mathcal{G}_\nu$ невырождено тогда и только тогда, когда $\langle \mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(k-2)}\rangle$ является $(k-2)$-мерным невырожденным $\mathcal{F}_\nu$-подпространством в $\widehat{\mathcal{M}}_\nu$. Далее, заметим, что все $\beta_\nu \in \mathcal{F}_\nu \setminus \{0\}$ и все $\mathcal{A}_\nu^{(k-1)} \in \langle \mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(k-2)}\rangle^{\perp_0}$ порождают различные k-мерные невырожденные $\mathcal{F}_\nu$-подпространства $\langle \mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(k-1)} + \Theta_\nu, \beta_\nu y_\nu + \Theta_\nu\rangle$ в $\mathcal{G}_\nu$. Отсюда, рассуждая, как в предложении 1, получаем, что число различных k-мерных невырожденных $\mathcal{F}_\nu$-подпространств в $\mathcal{G}_\nu$, имеющих тип $\langle \mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(k-2)}, \mathcal{A}_\nu^{(k-1)} + \Theta_\nu, \mathcal{A}_\nu^{(k)} + y_\nu\rangle$, в случае, когда $\mathcal{A}_\nu^{(k-1)}$ и $\mathcal{A}_\nu^{(k)}$ линейно зависимы над $\mathcal{F}_\nu$, равно

$$\mathfrak{W}_{\nu,k}^{(e_4)} = q^{\frac{(k-2)(\varepsilon_\nu t-k)}{2}}(q^{\varepsilon_\nu t-k}-1)(q-1)\begin{bmatrix}(\varepsilon_\nu t-2)/2\\(k-2)/2\end{bmatrix}_{q^2}.$$

Пусть теперь $\mathcal{A}_\nu^{(k-1)}$ и $\mathcal{A}_\nu^{(k)}$ линейно независимы над $\mathcal{F}_\nu$. Тогда, снова применяя [19, теорема 5.1.1] и [20, гл. 6, упражнение 21], получаем, что $\mathcal{F}_\nu$-подпространство $\langle \mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(k-2)}, \mathcal{A}_\nu^{(k-1)} + \Theta_\nu, \mathcal{A}_\nu^{(k)} + y_\nu\rangle$ пространства $\mathcal{G}_\nu$ невырождено тогда и только тогда, когда либо

($\star$) k-мерное $\mathcal{F}_\nu$-подпространство $\langle \mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(k)}\rangle$ пространства $\widehat{\mathcal{M}}_\nu$ вырождено, а $(k-2)$-мерное $\mathcal{F}_\nu$-подпространство $\langle \mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(k-2)}\rangle$ пространства $\widehat{\mathcal{M}}_\nu$ невырождено, либо

($\diamond$) k-мерное $\mathcal{F}_\nu$-подпространство $\langle \mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(k)}\rangle$ пространства $\widehat{\mathcal{M}}_\nu$ невырождено, а $(k-2)$-мерное $\mathcal{F}_\nu$-подпространство $\langle \mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(k-2)}\rangle$ пространства $\widehat{\mathcal{M}}_\nu$ вырождено, либо

($\ddagger$) оба $\mathcal{F}_\nu$-подпространства $\langle \mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(k)}\rangle$ и $\langle \mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(k-2)}\rangle$ пространства $\widehat{\mathcal{M}}_\nu$ невырождены и $\det\mathfrak{G}(\mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(k)}) \neq \det\mathfrak{G}(\mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(k-2)})$, где $\det\mathfrak{G}(\mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(k)})$ и $\det\mathfrak{G}(\mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(k-2)})$ – определители матриц Грама $\mathcal{F}_\nu$-подпространств $\langle \mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(k)}\rangle$ и $\langle \mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(k-2)}\rangle$ в $\widehat{\mathcal{M}}_\nu$ относительно базисов $\{\mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(k)}\}$ и $\{\mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(k-2)}\}$ соответственно.

Вначале найдем число k-мерных $\mathcal{F}_\nu$-подпространств типа $\langle \mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(k-2)}, \mathcal{A}_\nu^{(k-1)} + \Theta_\nu, \mathcal{A}_\nu^{(k)} + y_\nu\rangle$ в $\mathcal{G}_\nu$, удовлетворяющих условию ($\star$). Для этого заметим, что $\langle \mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(k-2)}\rangle$ – невырожденное $\mathcal{F}_\nu$-подпространство в $\widehat{\mathcal{M}}_\nu$. Следовательно, в силу [17, предложение 2.9] имеем $\widehat{\mathcal{M}}_\nu = \langle \mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(k-2)}\rangle \perp \langle \mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(k-2)}\rangle^{\perp_0}$, где $\langle \mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(k-2)}\rangle^{\perp_0}$ – $(\varepsilon_\nu t-k)$-мерное невырожденное $\mathcal{F}_\nu$-подпространство в $\widehat{\mathcal{M}}_\nu$. Далее, все пары $(\mathcal{A}_\nu^{(k-1)}, \mathcal{A}_\nu^{(k)})$ линейно независимых векторов в $\langle \mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(k-2)}\rangle^{\perp_0}$ порождают различные k-мерные невырожденные $\mathcal{F}_\nu$-подпространства $\langle \mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(k-2)}, \mathcal{A}_\nu^{(k-1)} + \Theta_\nu, \mathcal{A}_\nu^{(k)} + y_\nu\rangle$ в $\mathcal{G}_\nu$. Нетрудно видеть, что $\langle \mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(k)}\rangle = \langle \mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(k-2)}\rangle \perp \langle \mathcal{A}_\nu^{(k-1)}, \mathcal{A}_\nu^{(k)}\rangle$, откуда следует, что $\det\mathfrak{G}(\mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(k)}) = \det\mathfrak{G}(\mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(k-2)})\det\mathfrak{G}(\mathcal{A}_\nu^{(k-1)}, \mathcal{A}_\nu^{(k)})$. Поэтому $\mathcal{F}_\nu$-подпространство $\langle \mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(k)}\rangle$ в $\widehat{\mathcal{M}}_\nu$ вырождено тогда и только тогда, когда $\det\mathfrak{G}(\mathcal{A}_\nu^{(k-1)}, \mathcal{A}_\nu^{(k)}) = 0$, что имеет место тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}_\nu^{(k)} \in \langle \mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(k-1)}\rangle^{\perp_0}$. Кроме того, заметим, что $\mathcal{A}_\nu^{(k-1)} \in \langle \mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(k-2)}\rangle^{\perp_0} \setminus \{0\}$, поэтому его можно выбрать $(q^{\varepsilon_\nu t-k}-1)$ способами. Далее, заметим, что есть $(q^{\varepsilon_\nu t-k}-1)(q^{\varepsilon_\nu t-k-1}-q)$ способов выбрать пару $(\mathcal{A}_\nu^{(k-1)}, \mathcal{A}_\nu^{(k)})$. Отсюда, рассуждая так же, как и в предложении 1, получаем, что число различных k-мерных невырожденных $\mathcal{F}_\nu$-подпространств в $\mathcal{G}_\nu$ типа $\langle \mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(k-2)}, \mathcal{A}_\nu^{(k-1)} + \Theta_\nu$, $\mathcal{A}_\nu^{(k)} + y_\nu\rangle$, удовлетворяющих условию $(\star)$, равно

$$\mathfrak{W}_{\nu,k}^{(e_5)} = q^{\frac{(k-2)(\varepsilon_\nu t-k)}{2}}(q^{\varepsilon_\nu t-k}-1)(q^{\varepsilon_\nu t-k-1}-q)\begin{bmatrix}(\varepsilon_\nu t-2)/2\\(k-2)/2\end{bmatrix}_{q^2}.$$

Теперь подсчитаем количество k-мерных $\mathcal{F}_\nu$-подпространств типа $\langle \mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \ldots$, $\mathcal{A}_\nu^{(k-2)}, \mathcal{A}_\nu^{(k-1)} + \Theta_\nu, \mathcal{A}_\nu^{(k)} + y_\nu\rangle$ в $\mathcal{G}_\nu$, удовлетворяющих условию $(\diamond)$. Рассуждая, как в предложении 1, получаем, что число k-мерных невырожденных $\mathcal{F}_\nu$-подпространств в $\widehat{\mathcal{M}}_\nu$ равно $q^{\frac{k(\varepsilon_\nu t-k-2)}{2}}\begin{bmatrix}(\varepsilon_\nu t-2)/2\\k/2\end{bmatrix}_{q^2}$. Отметим, что каждое k-мерное невырожденное $\mathcal{F}_\nu$-подпространство $\langle \mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(k)}\rangle$ в $\widehat{\mathcal{M}}_\nu$ имеет ровно $q^{k-2}\begin{bmatrix}k/2\\(k-2)/2\end{bmatrix}_{q^2}$ различных $(k-2)$-мерных невырожденных $\mathcal{F}_\nu$-подпространств. Отсюда с учетом леммы 1 получаем, что в $\widehat{\mathcal{M}}_\nu$ есть ровно $\begin{bmatrix}k\\k-2\end{bmatrix}_q - q^{k-2}\begin{bmatrix}k/2\\(k-2)/2\end{bmatrix}_{q^2}$ различных $(k-2)$-мерных вырожденных $\mathcal{F}_\nu$-подпространств $\langle \mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(k)}\rangle$. Пусть $\langle \mathcal{B}_\nu^{(1)}, \mathcal{B}_\nu^{(2)}, \ldots$, $\mathcal{B}_\nu^{(k-2)}\rangle$ – фиксированное $(k-2)$-мерное вырожденное $\mathcal{F}_\nu$-подпространство в $\langle \mathcal{A}_\nu^{(1)}$, $\mathcal{A}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(k)}\rangle$. Выберем два линейно независимых вектора $\mathcal{B}_\nu^{(k-1)}, \mathcal{B}_\nu^{(k)}$, принадлежащих $\mathcal{F}_\nu$-подпространству $\langle \mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(k)}\rangle$ пространства $\widehat{\mathcal{M}}_\nu$, таких что $\langle \mathcal{B}_\nu^{(1)}$, $\mathcal{B}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{B}_\nu^{(k)}\rangle = \langle \mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(k)}\rangle$. Заметим, что пару $(\mathcal{B}_\nu^{(k-1)}, \mathcal{B}_\nu^{(k)})$ можно выбрать $(q^2-1)(q^2-q)$ различными способами. Отсюда, рассуждая так же, как и в предложении 1, получаем, что число различных k-мерных невырожденных $\mathcal{F}_\nu$-подпространств типа $\langle \mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(k-2)}, \mathcal{A}_\nu^{(k-1)} + \Theta_\nu, \mathcal{A}_\nu^{(k)} + y_\nu\rangle$ в $\mathcal{G}_\nu$, удовлетворяющих условию $(\diamond)$, равно

$$\mathfrak{W}_{\nu,k}^{(e_6)} = q^{\frac{k(\varepsilon_\nu t-k-2)}{2}}(q^2-1)(q^2-q)\times$$
$$\times\begin{bmatrix}(\varepsilon_\nu t-2)/2\\k/2\end{bmatrix}_{q^2}\left(\begin{bmatrix}k\\k-2\end{bmatrix}q - q^{k-2}\begin{bmatrix}k/2\\(k-2)/2\end{bmatrix}_{q^2}\right).$$

Наконец, подсчитаем число k-мерных $\mathcal{F}_\nu$-подпространств типа $\langle \mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \ldots$, $\mathcal{A}_\nu^{(k-2)}, \mathcal{A}_\nu^{(k-1)} + \Theta_\nu, \mathcal{A}_\nu^{(k)} + y_\nu\rangle$ в $\mathcal{G}_\nu$, удовлетворяющих условию $(\ddagger)$. Рассуждая, как и в предложении 1, получаем, что в $\widehat{\mathcal{M}}_\nu$ есть ровно $q^{\frac{(k-2)(\varepsilon_\nu t-k)}{2}}\begin{bmatrix}(\varepsilon_\nu t-2)/2\\(k-2)/2\end{bmatrix}_{q^2}$ различных $(k-2)$-мерных невырожденных $\mathcal{F}_\nu$-подпространств. Применяя [17, предложение 2.9], получаем $\widehat{\mathcal{M}}_\nu = \langle \mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(k-2)}\rangle \perp \langle \mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(k-2)}\rangle^{\perp_0}$, где $\langle \mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(k-2)}\rangle^{\perp_0}$ – $(\varepsilon_\nu t-k)$-мерное невырожденное $\mathcal{F}_\nu$-подпространство в $\widehat{\mathcal{M}}_\nu$. Отсюда получаем $\det\mathfrak{G}(\mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(k)}) = \det\mathfrak{G}(\mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(k-2)}) \times$ $\times \det\mathfrak{G}(\mathcal{A}_\nu^{(k-1)}, \mathcal{A}_\nu^{(k)})$, откуда в свою очередь следует, что $\mathcal{F}_\nu$-подпространство $\langle \mathcal{A}_\nu^{(1)}$, $\mathcal{A}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(k)}\rangle$ в $\widehat{\mathcal{M}}_\nu$ невырождено тогда и только тогда, когда $\det\mathfrak{G}(\mathcal{A}_\nu^{(k-1)}, \mathcal{A}_\nu^{(k)}) \neq$ $\neq 0$, т.е. тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}_\nu^{(k)} \notin \langle \mathcal{A}_\nu^{(k-1)}\rangle^{\perp_0}$ и $(\mathcal{A}_\nu^{(k-1)}, \mathcal{A}_\nu^{(k)})$ не является гиперболической парой в $\langle \mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(k-2)}\rangle^{\perp_0}$. Таким образом, есть ровно $q^{\varepsilon_\nu t-k-1}(q-1)(q^{\varepsilon_\nu t-k}-1)$ различных способов выбрать пару $(\mathcal{A}_\nu^{(k-1)}, \mathcal{A}_\nu^{(k)})$ так, чтобы $\mathcal{F}_\nu$-подпространства $\langle \mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(k-2)}\rangle$ и $\langle \mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(k)}\rangle$ в $\widehat{\mathcal{M}}_\nu$ были невырожденными. Далее, согласно [18, с. 69–70] получаем, что индекс Витта пространства $\langle \mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(k-2)}\rangle^{\perp_0}$ равен $(\varepsilon_\nu t-k)/2$, а число гиперболических пар в $\langle \mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(k-2)}\rangle^{\perp_0}$ равно $H_{\frac{\varepsilon_\nu t-k}{2},0} = q^{\varepsilon_\nu t-k-1}(q^{\varepsilon_\nu t-k}-1)$. Итак, есть ровно

$q^{\varepsilon_\nu t-k-1}(q-1)(q^{\varepsilon_\nu t-k}-1)-q^{\varepsilon_\nu t-k-1}(q^{\varepsilon_\nu t-k}-1)=q^{\varepsilon_\nu t-k-1}(q-2)(q^{\varepsilon_\nu t-k}-1)$ способов выбрать пару $(\mathcal{A}_\nu^{(k-1)},\mathcal{A}_\nu^{(k)})$. Отсюда получаем, что число различных k-мерных невырожденных $\mathcal{F}_\nu$-подпространств типа $\langle\mathcal{A}_\nu^{(1)},\mathcal{A}_\nu^{(2)},\ldots,\mathcal{A}_\nu^{(k-2)},\mathcal{A}_\nu^{(k-1)}+\Theta_\nu,\mathcal{A}_\nu^{(k)}+y_\nu\rangle$ в $\mathcal{G}_\nu$, удовлетворяющих условию (‡), равно

$$\mathfrak{W}_{\nu,k}^{(e_7)}=q^{\frac{(k-2)(\varepsilon_\nu t-k)}{2}}q^{\varepsilon_\nu t-k-1}(q-2)(q^{\varepsilon_\nu t-k}-1)\begin{bmatrix}(\varepsilon_\nu t-2)/2\\(k-2)/2\end{bmatrix}_{q^2}.$$

Объединяя эти случаи, получаем, что число различных k-мерных невырожденных $\mathcal{F}_\nu$-подпространств типа $\langle\mathcal{A}_\nu^{(1)},\mathcal{A}_\nu^{(2)},\ldots,\mathcal{A}_\nu^{(k-2)},\mathcal{A}_\nu^{(k-1)}+\Theta_\nu,\mathcal{A}_\nu^{(k)}+y_\nu\rangle$ в $\mathcal{G}_\nu$ в случае, когда $\mathcal{A}_\nu^{(h)}\in\widehat{\mathcal{M}}_\nu\setminus\{0\}$ для $1\leqslant h\leqslant k-2$ и $\mathcal{A}_\nu^{(k-1)},\mathcal{A}_\nu^{(k)}\in\widehat{\mathcal{M}}_\nu$, равно

$$\mathfrak{W}_{\nu,k}^{(e)}=\mathfrak{W}_{\nu,k}^{(e_1)}+\mathfrak{W}_{\nu,k}^{(e_2)}+\mathfrak{W}_{\nu,k}^{(e_3)}+\mathfrak{W}_{\nu,k}^{(e_4)}+\mathfrak{W}_{\nu,k}^{(e_5)}+\mathfrak{W}_{\nu,k}^{(e_6)}+\mathfrak{W}_{\nu,k}^{(e_7)}=$$
$$=q^{\frac{k\varepsilon_\nu t-k^2-2}{2}}(q^{\varepsilon_\nu t-k+1}-q^{\varepsilon_\nu t-k}+1)\begin{bmatrix}(\varepsilon_\nu t-2)/2\\(k-2)/2\end{bmatrix}_{q^2}+$$
$$+q^{\frac{k(\varepsilon_\nu t-k-2)}{2}}(q^{k+1}-q)(q^{k-2}-1)\begin{bmatrix}(\varepsilon_\nu t-2)/2\\k/2\end{bmatrix}_{q^2}.$$

Объединяя все рассмотренные случаи, получаем

$$\mathcal{N}_{\nu,k}=\mathfrak{T}_{\nu,k}^{(o)}+\mathfrak{U}_{\nu,k}^{(o)}+\mathfrak{W}_{\nu,k}^{(o)}=q^{\frac{(k+1)\varepsilon_\nu t-(k^2+1)}{2}}\begin{bmatrix}(\varepsilon_\nu t-2)/2\\(k-1)/2\end{bmatrix}_{q^2},\quad \text{если } k \text{ нечетно,}$$

и

$$\mathcal{N}_{\nu,k}=\mathfrak{R}_{\nu,k}^{(e)}+\mathfrak{S}_{\nu,k}^{(e)}+\mathfrak{T}_{\nu,k}^{(e)}+\mathfrak{U}_{\nu,k}^{(e)}+\mathfrak{W}_{\nu,k}^{(e)}=q^{\frac{k\varepsilon_\nu t-k^2-2}{2}}\Bigg((q^k+q-1)\times$$
$$\times\begin{bmatrix}(\varepsilon_\nu t-2)/2\\k/2\end{bmatrix}_{q^2}+(q^{\varepsilon_\nu t-k+1}-q^{\varepsilon_\nu t-k}+1)\begin{bmatrix}(\varepsilon_\nu t-2)/2\\(k-2)/2\end{bmatrix}_{q^2}\Bigg),\quad \text{если } k \text{ четно.}$$

Наконец, подставляя найденные значения $\mathcal{N}_{\nu,k}$ в уравнение (2) в соответствующих случаях, получаем требуемый результат. ▲

4.2. Определение числа $\mathfrak{D}_\nu$ для $\nu\in\mathcal{J}_2$. В следующем предложении определяется число $\mathfrak{D}_\nu$ в случае, когда $\nu\in\mathcal{J}_2$ и $\delta\in\{0,*,\gamma\}$.

Предложение 4. *Пусть $\nu\in\mathcal{J}_2$ фиксировано. Для $\delta\in\{0,*,\gamma\}$ имеем*

$$\mathfrak{D}_\nu=2+\sum_{k=1}^{\varepsilon_\nu t-1}q^{\frac{k(\varepsilon_\nu t-k)d_\nu}{2}}\prod_{a=0}^{k-1}\left(\frac{q^{\frac{(\varepsilon_\nu t-a)d_\nu}{2}}-(-1)^{\varepsilon_\nu t-a}}{q^{\frac{(k-a)d_\nu}{2}}-(-1)^{k-a}}\right).$$

Доказательство. Чтобы вычислить $\mathfrak{D}_\nu$, в силу (2) достаточно найти числа $\mathcal{N}_{\nu,k}$ для $1\leqslant k\leqslant\varepsilon_\nu t-1$. Для этого рассмотрим следующие два случая: I. $\delta\in\{0,*\}$ и II. $\delta=\gamma$.

I. Пусть $\delta\in\{0,*\}$. Тогда в силу утверждений (a), (c) леммы 2 $(\mathcal{G}_\nu,[\cdot,\cdot]_\delta\restriction_{\mathcal{G}_\nu\times\mathcal{G}_\nu})$ является унитарным пространством над $\mathcal{F}_\nu$. Тогда всякое k-мерное невырожденное $\mathcal{F}_\nu$-подпространство пространства $\mathcal{G}_\nu$ также является унитарным пространством. Рассмотрим отдельно следующие случаи: (i) k нечетно и (ii) k четно.

(i) Вначале пусть k нечетно. Тогда k-мерное $\mathcal{F}_\nu$-подпространство W в $\mathcal{G}_\nu$ имеет разложение Витта $W=\langle\mathcal{A}_\nu^{(1)},\mathcal{B}_\nu^{(1)}\rangle\perp\langle\mathcal{A}_\nu^{(2)},\mathcal{B}_\nu^{(2)}\rangle\perp\ldots\perp\langle\mathcal{A}_\nu^{(\frac{k-1}{2})},\mathcal{B}_\nu^{(\frac{k-1}{2})}\rangle\perp\langle Z_\nu\rangle$, где

$(\mathcal{A}_\nu^{(h)}, \mathcal{B}_\nu^{(h)})$ – гиперболическая пара в $\mathcal{G}_\nu$ для $1 \leqslant h \leqslant \dfrac{k-1}{2}$, а Z_ν – анизотропный вектор в $\mathcal{G}_\nu$; множество $\{\mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{B}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \mathcal{B}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(\frac{k-1}{2})}, \mathcal{B}_\nu^{(\frac{k-1}{2})}, Z_\nu\}$ называется базисом Витта пространства W над $\mathcal{F}_\nu$ (см. [18, с. 116]). Через ϑ_h обозначим индекс Витта пространства $\langle \mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{B}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \mathcal{B}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(h-1)}, \mathcal{B}_\nu^{(h-1)}\rangle^{\perp_\delta} \subseteq \mathcal{G}_\nu$ для $1 \leqslant h \leqslant \dfrac{k+1}{2}$. Применяя [17, предложение 2.9] и теорему Витта о сокращении, получаем, что число базисов Витта типа $\{\mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{B}_\nu^{(1)}, \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \mathcal{B}_\nu^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}_\nu^{(\frac{k-1}{2})}, \mathcal{B}_\nu^{(\frac{k-1}{2})}, Z_\nu\}$ в $\mathcal{G}_\nu$ равно

$$U_{k,\varepsilon_\nu t} = H_{\vartheta_1, \varepsilon_\nu t - 2\vartheta_1} H_{\vartheta_2, \varepsilon_\nu t - 2 - 2\vartheta_2} \ldots H_{\vartheta_{\frac{k-1}{2}}, \varepsilon_\nu t - k + 3 - 2\vartheta_{\frac{k-1}{2}}} \times$$
$$\times \left(q^{(\varepsilon_\nu t - k + 1)d_\nu} - 1 - I_{\vartheta_{\frac{k+1}{2}}, \varepsilon_\nu t - k + 1 - 2\vartheta_{\frac{k+1}{2}}}\right).$$

Аналогичными рассуждениями получаем, что число базисов Витта k-мерного унитарного $\mathcal{F}_\nu$-подпространства в $\mathcal{G}_\nu$ равно

$$U_k = H_{\frac{k-1}{2},1} H_{\frac{k-3}{2},1} \ldots H_{1,1}(q^{d_\nu} - 1).$$

Применяя теперь [18, лемма 10.4 и следствие 10.6], получаем

$$\mathcal{N}_{\nu,k} = \frac{U_{k,\varepsilon_\nu t}}{U_k} = q^{\frac{k(\varepsilon_\nu t - k)d_\nu}{2}} \prod_{a=0}^{k-1} \left(\frac{q^{\frac{(\varepsilon_\nu t - a)d_\nu}{2}} - (-1)^{\varepsilon_\nu t - a}}{q^{\frac{(k-a)d_\nu}{2}} - (-1)^{k-a}} \right), \quad 1 \leqslant k \leqslant \varepsilon_\nu t - 1.$$

(ii) Пусть теперь k четно. Тогда получаем, что k-мерное $\mathcal{F}_\nu$-подпространство W в $\mathcal{G}_\nu$ имеет разложение Витта $W = \langle \mathcal{A}_\nu^{(1)}, \mathcal{B}_\nu^{(1)}\rangle \perp \langle \mathcal{A}_\nu^{(2)}, \mathcal{B}_\nu^{(2)}\rangle \perp \ldots \perp \langle \mathcal{A}_\nu^{(\frac{k}{2})}, \mathcal{B}_\nu^{(\frac{k}{2})}\rangle$, где $(\mathcal{A}_\nu^{(h)}, \mathcal{B}_\nu^{(h)})$ – гиперболическая пара в $\mathcal{G}_\nu$ для $1 \leqslant h \leqslant \dfrac{k}{2}$. Рассуждая так же, как в случае (i), и снова применяя [18, лемма 10.4 и следствие 10.6], получаем

$$\mathcal{N}_{\nu,k} = q^{\frac{k(\varepsilon_\nu t - k)d_\nu}{2}} \prod_{a=0}^{k-1} \left(\frac{q^{\frac{(\varepsilon_\nu t - a)d_\nu}{2}} - (-1)^{\varepsilon_\nu t - a}}{q^{\frac{(k-a)d_\nu}{2}} - (-1)^{k-a}} \right), \quad 1 \leqslant k \leqslant \varepsilon_\nu t - 1.$$

II. Пусть $\delta = \gamma$. В этом случае согласно утверждениям (a) и (c) леммы 2 получаем, что $[\cdot\,,\cdot]_\gamma \restriction_{\mathcal{G}_\nu \times \mathcal{G}_\nu}$ является рефлексивной невырожденной антиэрмитовой $\tau_{1,-1}$-полуторалинейной формой. Вначале приведем антиэрмитову форму $[\cdot\,,\cdot]_\gamma \restriction_{\mathcal{G}_\nu \times \mathcal{G}_\nu}$ к сохраняющей ортогональность эрмитовой $\tau_{1,-1}$-полуторалинейной форме $[\cdot\,,\cdot]_{\gamma^{(H)}} \restriction_{\mathcal{G}_\nu \times \mathcal{G}_\nu}$. Для этого, применяя [16, лемма 3.1(b)], заметим, что $\tau_{1,-1}$ – автоморфизм $\mathcal{F}_\nu$ порядка два. Поэтому существует элемент $\xi_\nu \in \mathcal{F}_\nu$, такой что $\tau_{1,-1}(\xi_\nu) \neq \xi_\nu$. Теперь возьмем $\zeta_\nu = \xi_\nu - \tau_{1,-1}(\xi_\nu) (\neq 0) \in \mathcal{F}_\nu$. Отметим, что $\tau_{1,-1}(\zeta_\nu) = -\zeta_\nu$. Теперь определим отображение $[\cdot\,,\cdot]_{\gamma^{(H)}} \colon \mathcal{G}_\nu \times \mathcal{G}_\nu \to \mathcal{F}_\nu$ как $[\mathcal{A}_\nu, \mathcal{B}_\nu]_{\gamma^{(H)}} = \zeta_\nu [\mathcal{A}_\nu, \mathcal{B}_\nu]_\gamma$ для всех $\mathcal{A}_\nu, \mathcal{B}_\nu \in \mathcal{G}_\nu$. Заметим, что отображение $[\cdot\,,\cdot]_{\gamma^{(H)}}$ является невырожденной эрмитовой $\tau_{1,-1}$-полуторалинейной формой на $\mathcal{G}_\nu$, так что $(\mathcal{G}_\nu, [\cdot\,,\cdot]_{\gamma^{(H)}} \restriction_{\mathcal{G}_\nu \times \mathcal{G}_\nu})$ – унитарное пространство размерности $\varepsilon_\nu t$ над $\mathcal{F}_\nu \simeq \mathbb{F}_{q^{d_\nu}}$. Поскольку $\zeta_\nu \in \mathcal{F}_\nu \setminus \{0\}$, получаем, что число k-мерных невырожденных $\mathcal{F}_\nu$-подпространств в $\mathcal{G}_\nu$ относительно $[\cdot\,,\cdot]_\gamma$ равно числу k-мерных невырожденных $\mathcal{F}_\nu$-подпространств в $\mathcal{G}_\nu$ относительно $[\cdot\,,\cdot]_{\gamma^{(H)}}$. Рассуждая далее, как в случае I, получаем

$$\mathcal{N}_{\nu,k} = q^{\frac{k(\varepsilon_\nu t - k)d_\nu}{2}} \prod_{a=0}^{k-1} \left(\frac{q^{\frac{(\varepsilon_\nu t - a)d_\nu}{2}} - (-1)^{\varepsilon_\nu t - a}}{q^{\frac{(k-a)d_\nu}{2}} - (-1)^{k-a}} \right), \quad 1 \leqslant k \leqslant \varepsilon_\nu t - 1.$$

От сюда с учетом (2) немедленно вытекает требуемый результат. ▲

4.3. Определение числа $\mathfrak{D}_w$ для $e_1+1 \leqslant w \leqslant e_2$. В этом пункте определим число $\mathfrak{D}_w$ различных пар $(\mathcal{C}_w, \mathcal{C}_w^\dagger)$, где $\mathcal{C}_w$ – $\mathcal{F}_w$-подпространство в $\mathcal{G}_w$, а $\mathcal{C}_w^\dagger$ – $\mathcal{F}_w^\dagger$-подпространство в $\mathcal{G}_w^\dagger$, такие что $\mathcal{C}_w \cap \mathcal{C}_w^{\dagger\perp_\delta} = \{0\}$ и $\mathcal{C}_w^\dagger \cap \mathcal{C}_w^{\perp_\delta} = \{0\}$ для $e_1+1 \leqslant w \leqslant e_2$, где $\delta \in \{0, *, \gamma\}$. С этой целью зафиксируем $e_1+1 \leqslant w \leqslant e_2$. Напомним, что $\mathcal{I}_w = \{i:\ 1 \leqslant i \leqslant \ell,\ \varepsilon_{w,i} = \varepsilon_{w,i}^\dagger\}$ и $\mathcal{I}_w' = \{i:\ 1 \leqslant i \leqslant \ell,\ \varepsilon_{w,i} \neq \varepsilon_{w,i}^\dagger\}$, а также что $\{1,2,\ldots,\ell\} = \mathcal{I}_w \cup \mathcal{I}_w'$ (несвязное объединение). Кроме того, напомним, что $\eta_w = \sum\limits_{i\in\mathcal{I}_w} \varepsilon_{w,i}$, $\varrho_w = \sum\limits_{i\in\mathcal{I}_w'} \varepsilon_{w,i}$ и $\tau_w = \sum\limits_{i\in\mathcal{I}_w'} \varepsilon_{w,i}^\dagger$.

Без ограничения общности можно считать, что существует целое h, удовлетворяющее $1 \leqslant h \leqslant \ell$, такое что $\varepsilon_{w,i} = \varepsilon_{w,i}^\dagger$ для $1 \leqslant i \leqslant h$ и $\varepsilon_{w,i} \neq \varepsilon_{w,i}^\dagger$ для $h+1 \leqslant i \leqslant \ell$, т.е. $\mathcal{I}_w = \{1,2,\ldots,h\}$ и $\mathcal{I}_w' = \{h+1,h+2,\ldots,\ell\}$. Тогда $\eta_w = \sum\limits_{i=1}^{h} \varepsilon_{w,i}$, $\varrho_w = \sum\limits_{i=h+1}^{\ell} \varepsilon_{w,i}$ и $\tau_w = \sum\limits_{i=h+1}^{\ell} \varepsilon_{w,i}^\dagger$. Поэтому можно записать $\mathcal{G}_w = \mathcal{K}_w \oplus \mathcal{K}_w'$ и $\mathcal{G}_w^\dagger = \mathcal{K}_w^\dagger \oplus \mathcal{K}_w^{\dagger\prime}$, где

$$\mathcal{K}_w = \bigoplus_{j=0}^{a_w-1} \Big(\underbrace{\varepsilon_{w,1}\mathcal{F}_{w,j}, \varepsilon_{w,2}\mathcal{F}_{w,j}, \ldots, \varepsilon_{w,h}\mathcal{F}_{w,j}, 0, \ldots, 0}_{\mathcal{K}_{w,j}}\Big),$$

$$\mathcal{K}_w' = \bigoplus_{j=0}^{a_w-1} \Big(\underbrace{0, \ldots, 0, \varepsilon_{w,h+1}\mathcal{F}_{w,j}, \varepsilon_{w,h+2}\mathcal{F}_{w,j}, \ldots, \varepsilon_{w,\ell}\mathcal{F}_{w,j}}_{\mathcal{K}_{w,j}'}\Big),$$

$$\mathcal{K}_w^\dagger = \bigoplus_{j=0}^{a_w-1} \Big(\underbrace{\varepsilon_{w,1}\mathcal{F}_{w,j}^\dagger, \varepsilon_{w,2}\mathcal{F}_{w,j}^\dagger, \ldots, \varepsilon_{w,h}\mathcal{F}_{w,j}^\dagger, 0, \ldots, 0}_{\mathcal{K}_{w,j}^\dagger}\Big),$$

$$\mathcal{K}_w^{\dagger\prime} = \bigoplus_{j=0}^{a_w-1} \Big(\underbrace{0, \ldots, 0, \varepsilon_{w,h+1}^\dagger\mathcal{F}_{w,j}^\dagger, \varepsilon_{w,h+2}^\dagger\mathcal{F}_{w,j}^\dagger, \ldots, \varepsilon_{w,\ell}^\dagger\mathcal{F}_{w,j}^\dagger}_{\mathcal{K}_{w,j}^{\dagger\prime}}\Big).$$

Тогда каждое $\mathcal{F}_w$-подпространство $\mathcal{C}_w$ в $\mathcal{G}_w$ и каждое $\mathcal{F}_w^\dagger$-подпространство $\mathcal{C}_w^\dagger$ в $\mathcal{G}_w^\dagger$ можно единственным образом представить в виде $\mathcal{C}_w = \mathcal{D}_w \oplus \mathcal{D}_w'$ и $\mathcal{C}_w^\dagger = \mathcal{D}_w^\dagger \oplus \mathcal{D}_w^{\dagger\prime}$, где $\mathcal{D}_w$ и $\mathcal{D}_w'$ (соответственно, $\mathcal{D}_w^\dagger$ и $\mathcal{D}_w^{\dagger\prime}$) – подпространства пространств $\mathcal{K}_w$ и $\mathcal{K}_w'$ (соответственно, $\mathcal{K}_w^\dagger$ и $\mathcal{K}_w^{\dagger\prime}$) над $\mathcal{F}_w$ (соответственно, над $\mathcal{F}_w^\dagger$) соответственно. Теперь заметим, что $\mathcal{K}_w$ (соответственно, $\mathcal{K}_w^\dagger$) – $(\eta_w t)$-мерное векторное пространство над $\mathcal{F}_w$ (соответственно, над $\mathcal{F}_w^\dagger$). Кроме того, заметим, что $\mathcal{K}_w'$ и $\mathcal{K}_w^{\dagger\prime}$ – $(\varrho_w t)$-мерное и $(\tau_w t)$-мерное пространства над $\mathcal{F}_w$ и $\mathcal{F}_w^\dagger$ соответственно.

Всюду далее в этом пункте элементы прямой суммы $\mathcal{K}_w \oplus \mathcal{K}_w^\dagger$ будем представлять в виде $\mathcal{A}_w + \mathcal{A}_w^\dagger$, где $\mathcal{A}_w \in \mathcal{K}_w$, а $\mathcal{A}_w^\dagger \in \mathcal{K}_w^\dagger$. Аналогично будем представлять элементы прямой суммы $\mathcal{F}_w \oplus \mathcal{F}_w^\dagger$ в виде $\alpha_w + \alpha_w^\dagger$, где $\alpha_w \in \mathcal{F}_w$, а $\alpha_w^\dagger \in \mathcal{F}_w^\dagger$. При этом множество $\mathcal{K}_w \oplus \mathcal{K}_w^\dagger$ будем рассматривать как $\big(\mathcal{F}_w \oplus \mathcal{F}_w^\dagger\big)$-модуль относительно следующих операций:

$$(\mathcal{A}_w + \mathcal{A}_w^\dagger) + (\mathcal{B}_w + \mathcal{B}_w^\dagger) = (\mathcal{A}_w + \mathcal{B}_w) + (\mathcal{A}_w^\dagger + \mathcal{B}_w^\dagger) \qquad \text{(сложение)} \quad (6)$$

$$(\alpha_w + \alpha_w^\dagger)(\mathcal{A}_w + \mathcal{A}_w^\dagger) = \alpha_w\mathcal{A}_w + \alpha_w^\dagger\mathcal{A}_w^\dagger \qquad \text{(умножение на скаляры)} \quad (7)$$

для любых $\mathcal{A}_w + \mathcal{A}_w^\dagger,\ \mathcal{B}_w + \mathcal{B}_w^\dagger \in \mathcal{K}_w \oplus \mathcal{K}_w^\dagger$ и $\alpha_w + \alpha_w^\dagger \in \mathcal{F}_w \oplus \mathcal{F}_w^\dagger$. Далее, для $\delta \in \{0, *, \gamma\}$ заметим, что $[\mathcal{A}_w + \mathcal{A}_w^\dagger, \mathcal{B}_w + \mathcal{B}_w^\dagger]_\delta = [\mathcal{A}_w, \mathcal{B}_w^\dagger]_\delta + [\mathcal{A}_w^\dagger, \mathcal{B}_w]_\delta \in \mathcal{F}_w \oplus \mathcal{F}_w^\dagger$ для любых $\mathcal{A}_w + \mathcal{A}_w^\dagger, \mathcal{B}_w + \mathcal{B}_w^\dagger \in \mathcal{K}_w \oplus \mathcal{K}_w^\dagger$. Теперь для $\delta \in \{0, *, \gamma\}$ обозначим через $[\cdot\,,\cdot]_\delta\restriction_{(\mathcal{K}_w\oplus\mathcal{K}_w^\dagger)\times(\mathcal{K}_w\oplus\mathcal{K}_w^\dagger)}$ ограничение полуторалинейной формы $[\cdot\,,\cdot]_\delta$ на $\big(\mathcal{K}_w \oplus \mathcal{K}_w^\dagger\big) \times \big(\mathcal{K}_w \oplus \mathcal{K}_w^\dagger\big)$. Тогда имеет место следующая

Лемма 3. *Пусть $e_1+1 \leqslant w \leqslant e_2$ фиксировано. Для $\delta \in \{0,*,\gamma\}$ справедливы следующие утверждения*:

(a) $\mathcal{K}_w \oplus \mathcal{K}_w^\dagger$ *является свободным* $\big(\mathcal{F}_w \oplus \mathcal{F}_w^\dagger\big)$*-модулем ранга* $\eta_w t$;

(b) *Форма* $[\cdot\,,\cdot]_\delta\!\restriction_{(\mathcal{K}_w\oplus\mathcal{K}_w^\dagger)\times(\mathcal{K}_w\oplus\mathcal{K}_w^\dagger)}$ *рефлексивна и невырождена*;

(c) *Форма* $[\cdot\,,\cdot]_\delta\!\restriction_{(\mathcal{K}_w\oplus\mathcal{K}_w^\dagger)\times(\mathcal{K}_w\oplus\mathcal{K}_w^\dagger)}$ *эрмитова при* $\delta \in \{0,*\}$ *и антиэрмитова при* $\delta=\gamma$.

Если $\mathcal{L}_w$ – $\mathcal{F}_w$-подпространство в $\mathcal{K}_w$, а $\mathcal{L}_w^\dagger$ – $\mathcal{F}_w^\dagger$-подпространство в $\mathcal{K}_w^\dagger$, то их прямая сумма $\mathcal{L}_w\oplus\mathcal{L}_w^\dagger$ является $\big(\mathcal{F}_w\oplus\mathcal{F}_w^\dagger\big)$-подмодулем модуля $\mathcal{K}_w\oplus\mathcal{K}_w^\dagger$ относительно операций (6), (7). Для $\delta \in \{0,*,\gamma\}$ ортогональное дополнение к $\mathcal{L}_w\oplus\mathcal{L}_w^\dagger$ относительно формы $[\cdot\,,\cdot]_\delta\!\restriction_{(\mathcal{K}_w\oplus\mathcal{K}_w^\dagger)\times(\mathcal{K}_w\oplus\mathcal{K}_w^\dagger)}$ определяется как

$$\big(\mathcal{L}_w\oplus\mathcal{L}_w^\dagger\big)^{\perp_\delta} = \big\{\mathcal{A}_w+\mathcal{A}_w^\dagger \in \mathcal{K}_w\oplus\mathcal{K}_w^\dagger :\ [\mathcal{A}_w+\mathcal{A}_w^\dagger, \mathcal{B}_w+\mathcal{B}_w^\dagger]_\delta = 0 \\ \text{для всех } \mathcal{B}_w+\mathcal{B}_w^\dagger \in \mathcal{L}_w\oplus\mathcal{L}_w^\dagger\big\}.$$

Легко видеть, что $\big(\mathcal{L}_w\oplus\mathcal{L}_w^\dagger\big)^{\perp_\delta}$ является $\big(\mathcal{F}_w\oplus\mathcal{F}_w^\dagger\big)$-подмодулем $\mathcal{K}_w\oplus\mathcal{K}_w^\dagger$ и что $\big(\mathcal{L}_w\oplus\mathcal{L}_w^\dagger\big)^{\perp_\delta} = \mathcal{L}_w^{\dagger\perp_\delta}\oplus\mathcal{L}_w^{\perp_\delta}$. Для $\delta \in \{0,*,\gamma\}$ говорят, что $\big(\mathcal{F}_w\oplus\mathcal{F}_w^\dagger\big)$-подмодуль $\mathcal{L}_w\oplus\mathcal{L}_w^\dagger$ модуля $\mathcal{K}_w\oplus\mathcal{K}_w^\dagger$ невырожден, если он удовлетворяет условию $\big(\mathcal{L}_w\oplus\mathcal{L}_w^\dagger\big)\cap \cap\big(\mathcal{L}_w\oplus\mathcal{L}_w^\dagger\big)^{\perp_\delta}=\{0\}$, т.е. $\big(\mathcal{L}_w\oplus\mathcal{L}_w^\dagger\big)\cap\big(\mathcal{L}_w^{\dagger\perp_\delta}\oplus\mathcal{L}_w^{\perp_\delta}\big)=\{0\}$.

Из леммы 3(c) получаем, что $[\cdot\,,\cdot]_\gamma\!\restriction_{(\mathcal{K}_w\oplus\mathcal{K}_w^\dagger)\times(\mathcal{K}_w\oplus\mathcal{K}_w^\dagger)}$ является антиэрмитовой формой. Вначале приведем ее к эрмитовой форме $[\cdot\,,\cdot]_{\gamma^{(H)}}\!\restriction_{(\mathcal{K}_w\oplus\mathcal{K}_w^\dagger)\times(\mathcal{K}_w\oplus\mathcal{K}_w^\dagger)}$. С этой целью заметим для $e_1+1\leqslant w\leqslant e_2$, что $\tau_{1,-1}$ является автоморфизмом $\mathcal{F}_w$ порядка два, так что существует элемент $\varkappa_w(\neq 0)\in\mathcal{F}_w$, такой что $\varkappa_w\neq\tau_{1,-1}(\varkappa_w)$. Тогда $\zeta_w=\varkappa_w-\tau_{1,-1}(\varkappa_w)(\neq 0)\in\mathcal{F}_w\oplus\mathcal{F}_w^\dagger$ удовлетворяет соотношению $\tau_{1,-1}(\zeta_w)=-\zeta_w$. Теперь определим отображение $[\cdot\,,\cdot]_{\gamma^{(H)}}\colon \big(\mathcal{K}_w\oplus\mathcal{K}_w^\dagger\big)\times\big(\mathcal{K}_w\oplus\mathcal{K}_w^\dagger\big)\to\mathcal{F}_w\oplus\mathcal{F}_w^\dagger$ как $[\mathcal{A}_w+\mathcal{A}_w^\dagger,\mathcal{B}_w+\mathcal{B}_w^\dagger]_{\gamma^{(H)}}=\zeta_w[\mathcal{A}_w+\mathcal{A}_w^\dagger,\mathcal{B}_w+\mathcal{B}_w^\dagger]_\gamma$ для всех $\mathcal{A}_w+\mathcal{A}_w^\dagger,\mathcal{B}_w+\mathcal{B}_w^\dagger\in\mathcal{K}_w\oplus\mathcal{K}_w^\dagger$. Легко видеть, что отображение $[\cdot\,,\cdot]_{\gamma^{(H)}}$ является невырожденной эрмитовой формой на $\big(\mathcal{K}_w\oplus\mathcal{K}_w^\dagger\big)\times\big(\mathcal{K}_w\oplus\mathcal{K}_w^\dagger\big)$. Далее, заметим, что $\big(\mathcal{F}_w\oplus\mathcal{F}_w^\dagger\big)$-подмодуль модуля $\mathcal{K}_w\oplus\mathcal{K}_w^\dagger$ невырожден относительно формы $[\cdot\,,\cdot]_{\gamma^{(H)}}\!\restriction_{(\mathcal{K}_w\oplus\mathcal{K}_w^\dagger)\times(\mathcal{K}_w\oplus\mathcal{K}_w^\dagger)}$ тогда и только тогда, когда он невырожден относительно формы $[\cdot\,,\cdot]_\gamma\!\restriction_{(\mathcal{K}_w\oplus\mathcal{K}_w^\dagger)\times(\mathcal{K}_w\oplus\mathcal{K}_w^\dagger)}$. Поэтому всюду далее вместо антиэрмитовой невырожденной формы $[\cdot\,,\cdot]_\gamma\!\restriction_{(\mathcal{K}_w\oplus\mathcal{K}_w^\dagger)\times(\mathcal{K}_w\oplus\mathcal{K}_w^\dagger)}$ будем рассматривать эрмитову невырожденную форму $[\cdot\,,\cdot]_{\gamma^{(H)}}\!\restriction_{(\mathcal{K}_w\oplus\mathcal{K}_w^\dagger)\times(\mathcal{K}_w\oplus\mathcal{K}_w^\dagger)}$.

В следующем предложении определяется число $\mathfrak{D}_w$ в случае, когда $e_1+1\leqslant w\leqslant \leqslant e_2$, а $\delta\in\{0,*,\gamma^{(H)}\}$, и тем самым, $\delta\in\{0,*,\gamma\}$.

Предложение 5. *Пусть $e_1+1\leqslant w\leqslant e_2$ фиксировано. Для $\delta\in\{0,*,\gamma^{(H)}\}$ имеем*

$$\mathfrak{D}_w=\sum_{k=0}^{\eta_w t}\sum_{k_1=0}^{\varrho_w t}\sum_{k_2=0}^{\tau_w t} q^{kd_w(\eta_w t-k)}\begin{bmatrix}\eta_w t\\ k\end{bmatrix}_{q^{d_w}}\begin{bmatrix}\varrho_w t\\ k_1\end{bmatrix}_{q^{d_w}}\begin{bmatrix}\tau_w t\\ k_2\end{bmatrix}_{q^{d_w}}.$$

Доказательство. Заметим, что согласно теореме 3 число $\mathfrak{D}_w$ равно числу различных пар $(\mathcal{C}_w,\mathcal{C}_w^\dagger)$, где $\mathcal{C}_w$ – $\mathcal{F}_w$-подпространство в $\mathcal{G}_w$, а $\mathcal{C}_w^\dagger$ – $\mathcal{F}_w^\dagger$-подпространство в $\mathcal{G}_w^\dagger$, такие что $\mathcal{C}_w\cap\mathcal{C}_w^{\dagger\perp_\delta}=\{0\}$ и $\mathcal{C}_w^\dagger\cap\mathcal{C}_w^{\perp_\delta}=\{0\}$. Далее, заметим, что каждое $\mathcal{F}_w$-подпространство $\mathcal{C}_w$ в $\mathcal{G}_w$ и каждое $\mathcal{F}_w^\dagger$-подпространство $\mathcal{C}_w^\dagger$ в $\mathcal{G}_w^\dagger$ можно единственным образом представить в виде $\mathcal{C}_w=\mathcal{D}_w\oplus\mathcal{D}'_w$ и $\mathcal{C}_w^\dagger=\mathcal{D}_w^\dagger\oplus\mathcal{D}_w^{\dagger\prime}$, где $\mathcal{D}_w$ и $\mathcal{D}'_w$ (соответственно, $\mathcal{D}_w^\dagger$ и $\mathcal{D}_w^{\dagger\prime}$) – подпространства пространств $\mathcal{K}_w$ и $\mathcal{K}'_w$ (соответственно, $\mathcal{K}_w^\dagger$ и $\mathcal{K}_w^{\dagger\prime}$) над $\mathcal{F}_w$ (соответственно, над $\mathcal{F}_w^\dagger$) соответственно. Теперь для каждой пары $(\mathcal{D}'_w,\mathcal{D}_w^{\dagger\prime})$ заметим, что $\big(\mathcal{C}_w\oplus\mathcal{C}_w^\dagger\big)\cap\big(\mathcal{C}_w^{\dagger\perp_\delta}\oplus\mathcal{C}_w^{\perp_\delta}\big)=\{0\}$ тогда и только тогда, когда $\big(\mathcal{D}_w\oplus\mathcal{D}_w^\dagger\big)\cap\big(\mathcal{D}_w^{\dagger\perp_\delta}\oplus\mathcal{D}_w^{\perp_\delta}\big)=\{0\}$. Кроме того, заметим, что $\big(\mathcal{D}_w\oplus\mathcal{D}_w^\dagger\big)\cap\big(\mathcal{D}_w^{\dagger\perp_\delta}\oplus\mathcal{D}_w^{\perp_\delta}\big)=$

$= \{0\}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{D}_w \cap \mathcal{D}_w^{\dagger\perp_\delta} = \{0\}$ и $\mathcal{D}_w^{\dagger} \cap \mathcal{D}_w^{\perp_\delta} = \{0\}$. Из леммы 1 получаем, что есть ровно

$$\mathfrak{E}_w = \sum_{k_1=0}^{\varrho_w t} \sum_{k_2=0}^{\tau_w t} \begin{bmatrix} \varrho_w t \\ k_1 \end{bmatrix}_{q^{d_w}} \begin{bmatrix} \tau_w t \\ k_2 \end{bmatrix}_{q^{d_w}}$$

различных способов выбрать пару $(\mathcal{D}'_w, \mathcal{D}^{\dagger\prime}_w)$. Таким образом, чтобы вычислить $\mathfrak{D}_w$, достаточно определить число $\mathfrak{F}_w$ различных способов выбрать пару $(\mathcal{D}_w, \mathcal{D}_w^{\dagger})$, где $\mathcal{D}_w$ – $\mathcal{F}_w$-подпространство в $\mathcal{K}_w$, а $\mathcal{D}_w^{\dagger}$ – $\mathcal{F}_w^{\dagger}$-подпространство в $\mathcal{K}_w^{\dagger}$, такие что $\mathcal{D}_w \cap$ $\cap \mathcal{D}_w^{\dagger\perp_\delta} = \{0\}$ и $\mathcal{D}_w^{\dagger} \cap \mathcal{D}_w^{\perp_\delta} = \{0\}$. Из этих рассуждений заключаем, что $\mathfrak{F}_w$ равно числу различных невырожденных $(\mathcal{F}_w \oplus \mathcal{F}_w^{\dagger})$-подмодулей $\mathcal{D}_w \oplus \mathcal{D}_w^{\dagger}$ модуля $\mathcal{K}_w \oplus \mathcal{K}_w^{\dagger}$, где $\mathcal{D}_w$ – $\mathcal{F}_w$-подпространство в $\mathcal{K}_w$, а $\mathcal{D}_w^{\dagger}$ – $\mathcal{F}_w^{\dagger}$-подпространство в $\mathcal{K}_w^{\dagger}$. Тогда, рассуждая, как в [13, предложение 3.5], получаем

$$\mathfrak{F}_w = 2 + \sum_{k=1}^{\eta_w t-1} q^{k(\eta_w t-k)d_w} \begin{bmatrix} \eta_w t \\ k \end{bmatrix}_{q^{d_w}}.$$

Отсюда

$$\mathfrak{D}_w = \mathfrak{E}_w \mathfrak{F}_w = \sum_{k=0}^{\eta_w t} \sum_{k_1=0}^{\varrho_w t} \sum_{k_2=0}^{\tau_w t} q^{kd_w(\eta_w t-k)} \begin{bmatrix} \eta_w t \\ k \end{bmatrix}_{q^{d_w}} \begin{bmatrix} \varrho_w t \\ k_1 \end{bmatrix}_{q^{d_w}} \begin{bmatrix} \tau_w t \\ k_2 \end{bmatrix}_{q^{d_w}}. \quad \blacktriangle$$

4.4. Определение числа $\mathfrak{D}_s$ для $e_2 + 1 \leqslant s \leqslant e_3$. В следующем предложении определяется число $\mathfrak{D}_s$ в случае $e_2 + 1 \leqslant s \leqslant e_3$ и $\delta \in \{0, *, \gamma\}$.

П р е д л о ж е н и е 6. *Пусть $e_2 + 1 \leqslant s \leqslant e_3$ фиксировано. Для $\delta \in \{0, *, \gamma\}$ имеем*

$$\mathfrak{D}_s = \sum_{a=0}^{\varepsilon_s t} \begin{bmatrix} \varepsilon_s t \\ a \end{bmatrix}_{q^{d_s}}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из теоремы 3 получаем, что число $\mathfrak{D}_s$ равно числу различных $\mathcal{F}_s$-подпространств в $\mathcal{G}_s$ для $e_2 + 1 \leqslant s \leqslant e_3$. Так как $\dim_{\mathcal{F}_s} \mathcal{G}_s = \varepsilon_s t$, то применяя лемму 1, получаем $\mathfrak{D}_s = \sum\limits_{a=0}^{\varepsilon_s t} \begin{bmatrix} \varepsilon_s t \\ a \end{bmatrix}_{q^{d_s}}$. $\blacktriangle$

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 4. Подставляя значения $\mathfrak{D}_\nu$ $(1 \leqslant \nu \leqslant e_1)$ из предложений 1–4, значения $\mathfrak{D}_w$ $(e_1 + 1 \leqslant w \leqslant e_2)$ из предложения 5 и значения $\mathfrak{D}_s$ $(e_2 + 1 \leqslant s \leqslant e_3)$ из предложения 6 в формулу (1), получаем требуемый результат. $\blacktriangle$

Следующие примеры иллюстрируют теорему 4.

П р и м е р 1. Пусть $q = 5$, $t = 2$, $m_1 = m_2 = 3$, $\omega_1 = 1$ и $\omega_2 = 2$, так что $n =$ $= m_1 + m_2 = 6$ и $\Omega = (\omega_1, \omega_2) = (1, 2)$. Тогда $x^{m_1} - \omega_1 = x^3 - 1 = (x+4)(x^2+x+1)$ и $x^{m_2} - \omega_2 = x^3 - 2 = (x+2)(x^2+3x+4)$ – неприводимые разложения многочленов $x^{m_1} - \omega_1$ и $x^{m_2} - \omega_2$ над $\mathbb{F}_5$ соответственно. Возьмем $g_1(x) = x + 4$, $g_2(x) = x^2 + x + 1$, $g_3(x) = x + 2$ и $g_4(x) = x^2 + 3x + 4$. Тогда получаем, что $g_u^{\dagger}(x) = g_u(x)$ для $1 \leqslant u \leqslant 2$, $g_3^{\dagger}(x) \neq g_3(x)$, $g_4^{\dagger}(x) \neq g_4(x)$ и $g_3^{\dagger}(x) \neq g_4(x)$, откуда $d_1 = d_3 = 1$, $d_2 = d_4 = 2$, $\varepsilon_{1,1} = \varepsilon_{2,1} = \varepsilon_{3,2} = \varepsilon_{4,2} = 1$ и $\varepsilon_{1,2} = \varepsilon_{2,2} = \varepsilon_{3,1} = \varepsilon_{4,1} = 0$. Отсюда вытекает, что $\varepsilon_1 =$ $= \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 1$. Вычисления с помощью системы компьютерной алгебры Magma показывают, что существует ровно 39424 различных аддитивных Ω-MC-кодов длины 6 над $\mathbb{F}_{5^2}$, имеющих дополнительные 0-двойственные, что согласуется с теоремой 4.

П р и м е р 2. Пусть $q = 5$, $t = 2$, $m_1 = 2$, $m_2 = 4$, $\omega_1 = 3$ и $\omega_2 = 4$, так что $n = m_1 + m_2 = 6$ и $\Omega = (\omega_1, \omega_2) = (3, 4)$. Тогда $x^{m_1} - \omega_1 = x^2 - 3 = x^2 + 2$ и $x^{m_2} - \omega_2 =$

$= x^4-4 = (x^2+2)(x^2+3)$ – неприводимые разложения многочленов $x^{m_1}-\omega_1$ и $x^{m_2}-\omega_2$ над $\mathbb{F}_5$ соответственно. Возьмем $g_1(x) = x^2+2$ и $g_2(x) = x^2+3$. Тогда получаем, что $g_1^\dagger(x) = g_2(x)$, откуда $d_1 = d_2 = 2$, $\varepsilon_{1,1} = \varepsilon_{1,2} = \varepsilon_{1,2}^\dagger = 1$, $\varepsilon_{1,1}^\dagger = 0$, $\mathcal{I}_1 = \{2\}$ и $\mathcal{I}_1' = \{1\}$. Отсюда вытекает, что $\eta_1 = \varrho_1 = 1$ и $\tau_1 = 0$. Вычисления с помощью системы компьютерной алгебры Magma показывают, что существует ровно 18256 различных аддитивных Ω-МС-кодов длины 6 над $\mathbb{F}_{5^2}$, имеющих дополнительные $*$-двойственные, что согласуется с теоремой 4.

Пример 3. Пусть $q = 7$, $t = 2$, $m_1 = 2$, $m_2 = 4$, $m_3 = 6$, $\omega_1 = 5$, $\omega_2 = 2$ и $\omega_3 = 6$, так что $n = m_1+m_2+m_3 = 12$ и $\Omega = (\omega_1,\omega_2,\omega_3) = (5,2,6)$. Тогда $x^{m_1}-\omega_1 = x^2-5 = x^2+2$, $x^{m_2}-\omega_2 = x^4-2 = (x+2)(x+5)(x^2+4)$ и $x^{m_3}-\omega_3 = x^6-6 = (x^2+1)(x^2+2)(x^2+4)$ – неприводимые разложения многочленов $x^{m_1}-\omega_1$, $x^{m_2}-\omega_2$ и $x^{m_3}-\omega_3$ над $\mathbb{F}_7$ соответственно. Возьмем $g_1(x) = x^2+1$, $g_2(x) = x^2+2$, $g_3(x) = x^2+4$, $g_4(x) = x+2$ и $g_5(x) = x+5$. Тогда получаем, что $g_1^\dagger(x) = g_1(x)$, $g_2^\dagger(x) = g_3(x)$, $g_4^\dagger(x) \neq g_4(x)$, $g_5^\dagger(x) \neq g_5(x)$ и $g_4^\dagger(x) \neq g_5(x)$, откуда $d_1 = d_2 = d_3 = 2$, $d_4 = d_5 = 1$, $\varepsilon_{1,3} = \varepsilon_{2,1} = \varepsilon_{2,3} = \varepsilon_{4,2} = \varepsilon_{5,2} = \varepsilon_{2,2}^\dagger = \varepsilon_{2,3}^\dagger = 1$, $\varepsilon_{1,1} = \varepsilon_{1,2} = \varepsilon_{2,2} = \varepsilon_{4,1} = \varepsilon_{4,3} = \varepsilon_{5,1} = \varepsilon_{5,3} = \varepsilon_{2,1}^\dagger = 0$, $\mathcal{I}_2 = \{3\}$ и $\mathcal{I}_2' = \{1,2\}$. Отсюда вытекает, что $\varepsilon_1 = \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \eta_2 = \varrho_2 = \tau_2 = 1$ и $\varepsilon_2 = 2$.

Вычисления с помощью системы компьютерной алгебры Magma показывают, что существует ровно 29172915200 различных аддитивных Ω-МС-кодов длины 12 над $\mathbb{F}_{7^2}$, имеющих дополнительные γ-двойственные, что согласуется с теоремой 4.

Замечание 1. Заметим, что теорема 3.1 работы [13] вытекает из теоремы 4 при выборе $\ell = 1$ и $\omega_1 = 1$, а теорема 5.6 работы [15] – при выборе $\ell = 1$ и $\omega_1 = -1$.

§ 5. Заключение и направления дальнейшей работы

В статье исследованы аддитивные МС-коды с дополнительными двойственными над конечными полями относительно обычной билинейной, эрмитовой и $*$-формы следа. Выведено необходимое и достаточное условие, при котором аддитивный МС-код имеет дополнительный двойственный. Также получены явные формулы для числа аддитивных МС-кодов с дополнительными двойственными. Эти формулы полезны для классификации аддитивных МС-кодов с дополнительными двойственными над конечными полями с точностью до эквивалентности. Результаты, полученные в [13, 15], вытекают из наших результатов как частные случаи (см. замечание 1). В последующей работе мы покажем, что класс аддитивных МС-кодов с дополнительными двойственными над конечными полями является асимптотически хорошим. Было бы интересно получить классификацию аддитивных МС-кодов с дополнительными двойственными над конечными полями с точностью до эквивалентности с помощью полученных формул.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов в отношении содержания настоящей статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Massey, J.L.* Linear Codes with Complementary Duals // Discrete Math. 1992. V. 106–107. P. 337–342. `https://doi.org/10.1016/0012-365X(92)90563-U`
2. *Yang X., Massey J.L.* The Condition for a Cyclic Code to Have a Complementary Dual // Discrete Math. 1994. V. 126. № 1–3. P. 391–393. `https://doi.org/10.1016/0012-365X(94)90283-6`
3. *Sendrier N.* Linear Codes with Complementary Duals Meet the Gilbert–Varshamov Bound // Discrete Math. 2004. V. 285. № 1–3. P. 345–347. `https://doi.org/10.1016/j.disc.2004.05.005`

4. *Dougherty S.T., Kim J.L., Özkaya B., Sok L., Solé P.* The Combinatorics of LCD Codes: Linear Programming Bound and Orthogonal Matrices // Int. J. Inform. Coding Theory. 2017. V. 4. № 2–3. P. 116–128. `https://doi.org/10.1504/IJICOT.2017.083827`
5. *Carlet C., Guilley S.* Complementary Dual Codes for Counter-measures to Side-Channel Attacks // Adv. Math. Commun. 2016. V. 10. № 1. P. 131–150. `http://dx.doi.org/10.3934/amc.2016.10.131`
6. *Calderbank A.R., Rains E.M., Shor P.W., Sloane N.J.A.* Quantum Error Correction via Codes over GF(4) // IEEE Trans. Inform. Theory. 1998. V. 44. № 4. P. 1369–1387. `https://doi.org/10.1109/18.681315`
7. *Bierbrauer J., Edel Y.* Quantum Twisted Codes // J. Combin. Des. 2000. V. 8. № 3. P. 174–188. `https://doi.org/10.1002/(SICI)1520-6610(2000)8:3<174::AID-JCD3>3.0.CO;2-T`
8. *Rains E.M.* Nonbinary Quantum Codes // IEEE Trans. Inform. Theory. 1999. V. 45. № 6. P. 1827–1832. `https://doi.org/10.1109/18.782103`
9. *Huffman W.C.* Additive Cyclic Codes over $\mathbb{F}_4$ // Adv. Math. Commun. 2007. V. 1. № 4. P. 427–459. `http://doi.org/10.3934/amc.2007.1.427`
10. *Huffman W.C.* Additive Cyclic Codes over $\mathbb{F}_4$ of Even Length // Adv. Math. Commun. 2008. V. 2. № 3. P. 309–343. `http://doi.org/10.3934/amc.2008.2.309`
11. *Huffman W.C.* Cyclic $\mathbb{F}_q$-Linear $\mathbb{F}_{q^t}$-Codes // Int. J. Inf. Coding Theory. 2010. V. 1. № 3. P. 249–284. `http://doi.org/10.1504/IJICOT.2010.032543`
12. *Sharma A., Kaur T.* On Cyclic $\mathbb{F}_q$-Linear $\mathbb{F}_{q^t}$-Codes // Int. J. Inform. Coding Theory. 2017. V. 4. № 1. P. 19–46. `https://doi.org/10.1504/IJICOT.2017.081457`
13. *Sharma A., Kaur T.* Enumeration of Complementary-Dual Cyclic $\mathbb{F}_q$-Linear $\mathbb{F}_{q^t}$-Codes // Discrete Math. 2018. V. 341. № 4. P. 965–980. `https://doi.org/10.1016/j.disc.2017.12.006`
14. *Cao Y., Chang X., Cao Y.* Constacyclic $\mathbb{F}_q$-Linear $\mathbb{F}_{q^\ell}$-Codes // Appl. Algebra Engrg. Comm. Comput. 2015. V. 26. № 4. P. 369–388. `https://doi.org/10.1007/s00200-015-0257-4`
15. *Kaur T., Sharma A.* Constacyclic Additive Codes over Finite Fields // Discrete Math. Algorithms Appl. 2017. V. 9. № 3. Article no. 1750037 (35 pp.). `https://doi.org/10.1142/S1793830917500379`
16. *Sharma S., Sharma A.* Multi-twisted Additive Codes over Finite Fields // Beitr. Algebra Geom. 2021. Online First article (34 pp.). `https://doi.org/10.1007/s13366-021-00576-1`
17. *Grove L.C.* Classical Groups and Geometric Algebra. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2002.
18. *Taylor D.E.* The Geometry of the Classical Groups. Berlin: Heldermann, 1992.
19. *Szymiczek K.* Bilinear Algebra: An Introduction to the Algebraic Theory of Quadratic Forms. Amsterdam: Gordon & Breach, 1997.
20. *Brualdi R.A.* Introductory Combinatorics. Upper Saddle River, NJ: Pearson/Prentice Hall, 2010.

Шарма Сандип
Шарма Анурадха✉
Отделение математики, Институт информационных технологий Индрапрастха (IIIT-Delhi), Нью-Дели, Индия
✉`anuradha@iiitd.ac.in`

Поступила в редакцию
05.08.2021
После доработки
05.08.2021
Принята к публикации
23.01.2022