ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

Том 58 2022 Вып. 1

УДК 621.391 : 519.174 : 519.179.1

© 2022 г. **А.С. Семенов[1], Д.А. Шабанов[2]**

ОЦЕНКИ ПОРОГОВЫХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ДЛЯ СВОЙСТВ РАСКРАСОК СЛУЧАЙНЫХ ГИПЕРГРАФОВ

Статья посвящена изучению пороговой вероятности для свойства наличия раскраски в r цветов специального вида у случайного k-однородного гиперграфа в биномиальной модели $H(n,k,p)$. Рассматривается параметрическое множество j-хроматических чисел случайного гиперграфа. Раскраска множества вершин гиперграфа называется j-правильной, если в ней каждое ребро содержит не более j вершин каждого цвета. Исследуется вопрос о нахождении точной пороговой вероятности наличия j-правильной раскраски в r цветов у $H(n,k,p)$. С помощью метода второго момента получены весьма точные оценки этой величины при условии, что k и j велики по отношению к r.

Ключевые слова: случайный гиперграф, раскраски гиперграфов, j-хроматическое число, метод второго момента.

DOI: 10.31857/S0555292322010053

§ 1. Введение

В данной статье рассматривается одна из центральных задач в теории случайных графов и гиперграфов о нахождении предельного распределения хроматических чисел случайных гиперграфов. Рассматриваются хроматические числа общего вида, напомним их определения.

1.1. Определения. Пусть $H = (V,E)$ – гиперграф с множеством вершин V и множеством ребер E, а $j \geqslant 1$ – некоторое натуральное число. Подмножество вершин $W \subset V$ называется *j-независимым*, если каждое ребро H имеет не более j общих вершин с W, т.е. $|W \cap A| \leqslant j$ для любого $A \in E$. Отметим, что для k-однородного гиперграфа имеет смысл рассматривать только $j \leqslant k-1$, иначе любое подмножество вершин гиперграфа будет j-независимыми. Экстремальные и вероятностные задачи, касающиеся j-независимых множеств в гиперграфах, изучались, например, в [1–4].

Раскраской вершин гиперграфа $H = (V,E)$ в r цветов является отображение $\tau\colon V \to \{1,\ldots,r\}$. Множества $V_i = \tau^{-1}(i)$, $i = 1,\ldots,r$, принято называть *цветовыми классами* раскраски τ. Если каждый цветовой класс τ является j-независимым множеством в H, то τ называется *j-правильной* раскраской гиперграфа H. Тем самым, каждое ребро в j-правильной раскраске имеет не более j вершин каждого из цветов. Минимальное количество цветов r, необходимое для j-правильной раскраски вершин H, называется *j-хроматическим числом* гиперграфа H и обозначается

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в рамках научного проекта № 18-31-00348.

[2] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в рамках научного проекта № 20-31-70039 и частичной поддержке гранта Президента РФ № МД-1562.2020.1.

через $\chi_j(H)$. В случае k-однородного гиперграфа существует специальная классификация j-хроматических чисел. Для $j \geqslant k/2$ эти числа называются *слабыми*, а для $j < k/2$ – *сильными*. Суть разделения понятна: в случае $j \geqslant k/2$ неправильно раскрашенное ребро содержит лишь одно большое одноцветное подмножество вершин. Наиболее распространен случай $j = k - 1$, который соответствует классическому понятию *хроматического числа гиперграфа* $\chi(H)$.

В данной статье рассматривается проблема нахождения точной пороговой вероятности наличия j-правильной раскраски в заданное число цветов у случайного k-однородного гиперграфа в биномиальной модели $H(n, k, p)$, $n > k \geqslant 2$, $p \in (0, 1)$. Напомним, что случайный гиперграф $H(n, k, p)$ образуется в виде схемы Бернулли на ребрах полного k-однородного гиперграфа $K_n^{(k)}$ на n вершинах: каждое ребро $K_n^{(k)}$ включается в $H(n, k, p)$ в качестве ребра независимо и с вероятностью p. Для $k = 2$ модель $H(n, 2, p)$ очень хорошо известна как $G(n, p)$, биномиальная модель случайного графа, еще называемая моделью Эрдеша–Реньи. Все эти модели являются классическим и центральным объектом изучения в вероятностной комбинаторике. Везде в статье мы предполагаем, что $r \geqslant 2$, $k \geqslant 2$ и $1 \leqslant j \leqslant k - 1$ фиксированы, n стремится к бесконечности и $p = p(n) \in (0, 1)$ – функция от n.

1.2. Известные результаты. Асимптотическое поведение хроматического числа случайного графа $G(n, p)$ изучается еще с 70-х годов прошлого века. Лучшие текущие результаты описаны, например, в [5, 6]. Отметим лишь, что точное предельное распределение можно найти только в *разреженном случае*, когда математическое ожидание числа ребер является линейным по числу вершин n, т.е. $p = p(n) = c/n$ для некоторого фиксированного параметра $c > 0$. В этом случае известно, что хроматическое число имеет фиксированное предельное значение $r = r(c)$ для почти всех значений c, а для оставшихся небольших интервалов значений c существует двухточечная концентрация в двух последовательных натуральных числах. Основные понятия и теоремы относительно сходимости по распределению в теории вероятностей могут быть найдены читателем в главе 3 книги [7].

Гораздо труднее дело обстоит с j-хроматическим числом $H(n, k, p)$. Асимптотическое поведение $\chi_j(H(n, k, p))$ изучалось в работах [8–10], а также [11]. Перечисленные результаты можно кратко описать следующим образом.

1. Если для $p = p(n)$ выполнено $p\binom{n-j-1}{k-j-1}/\ln n \to \infty$, тогда с вероятностью, стремящейся к 1 при $n \to \infty$, j-хроматическое число случайного гиперграфа сравнимо с j-хроматическим числом полного гиперграфа $\chi_j(K_n^{(k)}) = \lceil n/j \rceil$, т.е.
$$\mathbf{P}(\chi_j(H(n, k, p)) = \lceil n/j \rceil) \to 1 \quad \text{при } n \to \infty.$$
Например, это соотношение будет выполнено при любом фиксированном $p \in (0, 1)$ и любом $j < k - 1$. Отметим, что случай $j = k - 1$ является особым. При фиксированном $p \in (0, 1)$ хроматическое число $\chi_{k-1}(H(n, k, p)$ будет иметь порядок $o(n)$ (см., например, [8]).

2. Обозначим через $d = p\binom{n-1}{k-1}$ математическое ожидание степени вершины в $H(n, k, p)$, и пусть $d_j = j\binom{k-1}{j}d$. Если для $d = d(n)$ выполнено $d \to \infty$ и $dn^{-j} \to 0$ при $n \to \infty$ (т.е. $pn^{k-1} \to \infty$ и $pn^{k-1-j} \to 0$), тогда (см. [11]) для $\chi_j(H(n, k, p))$ выполнен закон больших чисел:
$$\chi_j(H(n, k, p)) \left(\frac{d_j}{(j+1)\ln d_j} \right)^{-1/j} \xrightarrow{\mathbf{P}} 1 \quad \text{при } n \to \infty.$$

3. Если d_j фиксировано, но больше некоторой абсолютной константы d_0, то имеет место следующая концентрация для значения j-хроматического числа (см. [11]): с вероятностью, стремящейся к 1 при $n \to \infty$, выполнено

$$\left(\frac{d_j}{(j+1)\ln d_j}\right)^{1/j} \leqslant \chi_j(H(n,k,p)) \leqslant \left(\frac{d_j}{(j+1)\ln d_j}\left(1+\frac{1}{\ln^{0,1} d_j}\right)\right)^{1/j}.$$

Для разреженного случая, т.е. для фиксированного $d = d(n)$, в классическом варианте $j = k-1$ более точные оценки были получены в работах [6,12,13]. Обозначим $u_{r,k} = r^{k-1}\ln r - \frac{1}{2}\ln r$ для $r, k \geqslant 2$, и пусть $p = cn/\binom{n}{k}$, где $c > 0$ – некоторый положительный параметр.

1. Если $c > u_{r,k}$, тогда (см. [12])

$$\mathbf{P}(\chi(H(n,k,p)) > r) \to 1 \quad \text{при } n \to \infty; \tag{1}$$

2. Если $c < u_{r,k} - \frac{r-1}{r} + O(k^2 r^{1-k/3}\ln r)$ и $k \geqslant 4$, тогда (см. [6])

$$\mathbf{P}(\chi(H(n,k,p)) \leqslant r) \to 1 \quad \text{при } n \to \infty; \tag{2}$$

3. Если $r > r_0(k)$ велико относительно $k \geqslant 3$ и $c < u_{r,k} - \ln 2 - 1{,}01\frac{\ln r}{r}$, тогда (см. [13])

$$\mathbf{P}(\chi(H(n,k,p)) \leqslant r) \to 1 \quad \text{при } n \to \infty. \tag{3}$$

Грубо говоря, значение $u_{r,k}$ почти является пороговым значением параметра c для свойства наличия раскраски в r цветов. На интервале $(u_{r,k}, u_{r+1,k})$ хроматическое число сконцентрировано в точке $r+1$ почти везде, кроме небольшого интервала фиксированной величины. В зависимости от отношения r и k длина этого интервала равна либо $\frac{r-1}{r} + o(1)$, либо $\ln 2 + o(1)$.

Особый интерес представляет поиск пороговой вероятности для свойств раскраски в два цвета. Поиску пороговой вероятности для свойства “*хроматическое число не превосходит двух*” у случайного гиперграфа $H(n,k,p)$ посвящены работы [14–16]. Наилучший результат был получен в [17], где авторы показали, что существует такая функция $\varepsilon_k = 2^{-k(1+o_k(1))}$, что при $p = cn/\binom{n}{k}$ и

$$c < 2^{k-1}\ln 2 - \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{4} - \varepsilon_k$$

выполнено $\mathbf{P}(\chi(H(n,k,p)) \leqslant 2) \to 1$ с ростом n, а для

$$c > 2^{k-1}\ln 2 - \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{4} + \varepsilon_k$$

выполнено $\mathbf{P}(\chi(H(n,k,p)) > 2) \to 1$ при $n \to \infty$. Тем самым, пороговое значение параметра c удалось локализовать с точностью до интервала, длина которого стремится к нулю с ростом k. Подобный эффект был также обнаружен в статье [18], где для свойства “*j-хроматическое число $H(n,k,p)$ не превосходит двух*” при $k-j < \sqrt{k}$ были получены такие верхняя и нижняя оценки порогового значения параметра c, что разность между ними стремится к нулю с ростом k.

Однако для раскрасок в большее число цветов похожих результатов в общем случае пока добиться не удалось. Даже для классического хроматического числа остается зазор порядка $O(1)$ для свойства наличия правильной раскраски в $r \geqslant 3$ цветов (см. вышеперечисленные результаты 1–3 из работ [6,12,13]).

1.3. Новый результат. Основной результат данный статьи дополняет ранее известные результаты и дает очень точные оценки пороговой вероятности для свойства наличия j-правильной раскраски в r цветов у случайного гиперграфа $H(n,k,p)$ при $j < k-1$, $j \sim k$ и $r \ll k$. Точная формулировка выглядит следующим образом.

Теорема 1. *Пусть $H(n,k,p)$ – случайный k-однородный гиперграф на n вершинах, где $p = cn/\binom{n}{k}$ и $c = c(k,j,r) > 0$ не зависит от n. Для любого $r > 2$ существуют такие положительные числа $C_\ell = C_\ell(r)$, $C_u = C_u(r)$ и $k_0 = k_0(r)$, что при $k > k_0$ и $1 < k-j < k^{1/4}$ выполнено следующее*:

1) *Если*

$$c > \frac{r^{k-1}\ln r}{\sum\limits_{s=0}^{k-j-1}\binom{k}{s}(r-1)^s} - \frac{\ln r}{2} + C_u\binom{k}{j+1}r^{-j}, \tag{4}$$

то с вероятностью, стремящейся к 1 при $n \to \infty$, $\chi_j\left(H\left(n,k,p\right)\right) > r$;

2) *Если*

$$c < \frac{r^{k-1}\ln r}{\sum\limits_{s=0}^{k-j-1}\binom{k}{s}(r-1)^s} - \frac{\ln r}{2} - C_\ell k^{(j-k+1)/2}, \tag{5}$$

то с вероятностью, стремящейся к 1 при $n \to \infty$, $\chi_j\left(H\left(n,k,p\right)\right) \leqslant r$.

Прокомментируем результаты теоремы.

1. При фиксированном r и $k-j < k^{1/4}$ (а значит, $j \sim k$) разность между полученными оценками порогового значения c стремится к нулю с ростом k. Это замечательный эффект, который, как видно из полученных выражений, не получается в классическом случае $j = k-1$. Данный феномен мы пока можем объяснить лишь техническими особенностями применения метода второго момента, который мы используем для доказательства теоремы 1, хотя вполне может оказаться, что имеет место некоторая особенность множества j-правильных раскрасок случайного гиперграфа при $j < k-1$.
2. Ограничение $k-j < k^{1/4}$, по-видимому, не является оптимальным даже в рамках применяемого метода. Например, как будет видно из доказательства в § 2, оценка (4) верна и при $k - j = o(k/\ln k)$. Однако учитывая техническую сложность вычислений, нам было важно показать, что теорема верна в достаточно широком диапазоне значений параметров.
3. С точки зрения изучения собственно распределения j-хроматического числа $H(n,k,p)$ представляет интерес обратная ситуация, когда $r \gg k$. Здесь были исследованы некоторые частные случаи. Случай $j = 1$, $k = 3$ можно найти в работе [19], а случай $j = k-2$ – в работе [20]. В обеих работах полученные оценки пороговой вероятности имеют зазор, стремящийся к положительной константе при $r \to \infty$.

§ 2. Доказательство верхней оценки

Для доказательства верхней оценки обратимся к другой модели случайного гиперграфа $H'(n,k,m)$, где $m = \lceil cn \rceil$ и выполнено неравенство (4). В этой модели независимо, равномерно и с возвращением набираются m ребер из всевозможных k-подмножеств вершин. Обозначим через Z_n число различных ребер в $H'(n,k,m)$. Нужно отметить, что Z_n может быть меньше m, если некоторые случайные ребра совпадут.

Пусть $p' = c'n/\binom{n}{k}$, причем $c' > c$. Тогда покажем, что

$$\mathbf{P}\Big(\chi_j(H'(n,k,m)) > r\Big) \leqslant \mathbf{P}\Big(\chi_j(H(n,k,p')) > r\Big) + o_n(1).$$

Действительно, возьмем случайную перестановку σ ребер полного гиперграфа $K_n^{(k)}$. Далее рассмотрим две независимые с σ случайные величины: ξ_1 с распределением $\mathrm{Bin}\Big(\binom{n}{k}, p'\Big)$ и ξ_2, имеющую то же распределение, что и Z_n. Тогда с точки зрения распределения

- гиперграф H_1, образованный первыми ξ_1 ребрами согласно σ, есть $H\,(n,k,p')$;
- гиперграф H_2, образованный первыми ξ_2 ребрами согласно σ, есть $H'\,(n,k,m)$.

Случайные величины ξ_1 и ξ_2 сильно сконцентрированы вокруг своих средних: $\mathbf{E}\,\xi_1 = c'n$, $\mathbf{E}\,\xi_2 \sim cn$, $\mathbf{D}\,\xi_1 = O(n)$, $\mathbf{D}\,\xi_2 = O(n)$, и значит, из неравенства Чебышева следует, что $\mathbf{P}(\xi_1 > \xi_2) \to 1$ при $n \to \infty$. Следовательно, с вероятностью, стремящейся к 1, гиперграф H_1 содержит H_2, и нам остается показать, что

$$\mathbf{P}\Big(\chi_j(H'(n,k,m)) > r\Big) \to 1, \quad n \to \infty.$$

Пусть τ – произвольная раскраска вершин гиперграфа $H'(n,k,m)$ в r цветов. Обозначим через $v_1, \ldots, v_r$ мощности ее цветовых классов ($\sum\limits_{i=1}^{r} v_i = n$). Тогда вероятность того, что τ является j-правильной раскраской $H'(n,k,m)$, равна

$$\left(1 - \sum_{i=1}^{r}\sum_{s=0}^{k-j-1}\binom{v_i}{k-s}\binom{n-v_i}{s}\Big/\binom{n}{k}\right)^{m}. \tag{6}$$

Поясним выражение (6). В силу условия теоремы $k - j < k^{1/4} < k/2$. Значит, если ребро неправильно покрашено в раскраске τ, то в нем существует единственный блок из хотя бы $j + 1 > k/2$ одинаково покрашенных вершин. Остальные вершины могут быть раскрашены произвольным образом. Следовательно, в раскраске τ есть в точности $\sum\limits_{i=1}^{r}\sum\limits_{s=0}^{k-j-1}\binom{v_i}{k-s}\binom{n-v_i}{s}$ неправильно раскрашенных k-подмножеств, и ни одно из них не должно войти в случайных гиперграф в качестве ребра.

Для оценивания выражения (6) понадобится следующая

Л е м м а 1. *Пусть $k, j, r, v_1, \ldots, v_r \in \mathbb{N}$ таковы, что $r > 2$ и $2 < k - j < k^{1/4}$. Существует $k_0 = k_0(r)$, такое что при $k \geqslant k_0$ и любых $v_1, \ldots, v_r$ с условием $\sum\limits_{i=1}^{r} v_i = n$ выполнено*

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{s=0}^{k-j-1}\binom{v_i}{k-s}\binom{n-v_i}{s} \geqslant r\sum_{s=0}^{k-j-1}\binom{n/r}{k-s}\binom{n-n/r}{s} + o(n^k), \quad n \to \infty. \tag{7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Правую часть неравенства можно оценить следующим образом:

$$r\sum_{s=0}^{k-j-1}\binom{n/r}{k-s}\binom{n-n/r}{s} \leqslant \frac{r}{k!}\sum_{s=0}^{k-j-1}\binom{k}{s}\left(\frac{n}{r}\right)^{k-s}\left(\frac{n(r-1)}{r}\right)^{s}.$$

Оценим левую часть

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{s=0}^{k-j-1}\binom{v_i}{k-s}\binom{n-v_i}{s} = \frac{1}{k!}\sum_{i=1}^{r}\sum_{s=0}^{k-j-1}\binom{k}{s}v_i^{k-s}(n-v_i)^s + o(n^k).$$

Рассмотрим функцию $f(x) = \sum\limits_{s=0}^{k-j-1} \binom{k}{s} x^{k-s}(n-x)^s$. Для нее выполнено

$$f'(x) = kx^{k-1} + \sum_{s=1}^{k-j-1} \binom{k}{s} x^{k-s-1}(n-x)^{s-1}(n(k-s)-kx),$$
$$f''(x) = k(k-1)x^{k-3}((1-k)x + n(k-2)) + \sum_{s=2}^{k-j-1} \binom{k}{s} x^{k-s-2}(n-x)^{s-2} \times$$
$$\times \left[k(k-1)x^2 - 2n(k-1)(k-s)x + n^2(k-s)(k-s-1)\right].$$

Наименьший корень квадратного трехчлена в скобках можно найти явно и оценить следующим образом:

$$x_{\min} = n\frac{(k-1)(k-s) - \sqrt{s(k-1)(k-s)}}{k(k-1)} \geqslant$$

(при $s \leqslant k/2$ минимум данного выражения достигается при $s = k/2$)

$$\geqslant n\frac{k-1-\sqrt{k-1}}{2(k-1)} = \frac{n}{2} - \frac{n}{2\sqrt{k-1}} \geqslant \frac{3n}{8},$$

начиная с $k = 17$. Следовательно, на отрезке $[0, 3n/8]$ функция $f(x)$ возрастает и выпукла вниз. Значит, если все $v_i \in [0, 3n/8]$, то из неравенства Йенсена ($\mathbf{E}\, f(\xi) \geqslant f(\mathbf{E}\, \xi)$ для выпуклой вниз функции $f(x)$ и случайной величины ξ) следует искомое соотношение

$$\frac{1}{k!}\sum_{i=1}^{r}\sum_{s=0}^{k-j-1} \binom{k}{s} v_i^{k-s}(n-v_i)^s \geqslant \frac{r}{k!}\sum_{s=0}^{k-j-1} \binom{k}{s} \left(\frac{n}{r}\right)^{k-s} \left(\frac{n(r-1)}{r}\right)^s.$$

Пусть теперь, например, $v_1 > 3n/8$, тогда левая часть в выражении (7) заведомо больше, чем

$$\sum_{s=0}^{k-j-1} \binom{v_1}{k-s}\binom{n-v_1}{s} \geqslant \frac{(v_1-k)^k}{k!} \geqslant \frac{1}{k!}\left(\frac{n}{r}\right)^k \left(\frac{3r}{8} - \frac{kr}{n}\right)^k,$$

в то время как

$$\frac{r}{k!}\sum_{s=0}^{k-j-1} \binom{k}{s} \left(\frac{n}{r}\right)^{k-s} \left(\frac{n(r-1)}{r}\right)^s = \frac{1}{k!}\left(\frac{n}{r}\right)^k r \sum_{s=0}^{k-j-1} \binom{k}{s}(r-1)^s \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{k!}\left(\frac{n}{r}\right)^k r k^{k-j-1} r^{k-j-1} \sum_{s=0}^{k-j-1} \frac{1}{s!} \leqslant \frac{1}{k!}\left(\frac{n}{r}\right)^k k^{k-j-1} r^{k-j} e.$$

Следовательно, при $r \geqslant 3$ и $k - j < k^{1/4}$, начиная с некоторого $k_0(r)$, неравенство (7) также будет выполнено. ▲

Замечание. Отметим, что доказательство леммы 1 работает и при более слабых ограничениях на разность $k - j$. Например, достаточно потребовать, чтобы $k - j = o(k/\ln k)$.

Из леммы следует, что выражение в скобках в (6) максимально при почти равных значениях $v_1, \ldots, v_r$, а значит, математическое ожидание числа искомых раскрасок

$H'(n,k,m)$ не превосходит

$$r^n \left(1 - \frac{r \sum\limits_{s=0}^{k-j-1} \binom{n/r}{k-s}\binom{n-n/r}{s}}{\binom{n}{k}} + o_n(1)\right)^m \leqslant$$

$$\leqslant r^n \left(1 - r^{1-k} \sum_{s=0}^{k-j-1} \binom{k}{s}(r-1)^s + o_n(1)\right)^{\lceil cn \rceil} =$$

$$= \exp\left(n\left[\ln r + c\ln\left(1 - r^{1-k}\sum_{s=0}^{k-j-1}\binom{k}{s}(r-1)^s\right) + o_n(1)\right]\right).$$

Заметим, что последнее выражение стремится к нулю с ростом n (а значит, то же самое происходит с вероятностью того, что $\chi_j(H'(n,k,m)) \leqslant r$) при $c > \dfrac{-\ln r}{\ln(1-q)}$, где $q = r^{1-k}\sum\limits_{s=0}^{k-j-1}\binom{k}{s}(r-1)^s$. При этом верно, что

$$\frac{-\ln r}{\ln(1-q)} \leqslant \frac{\ln r}{q + q^2/2 + q^3/3} \leqslant \frac{\ln r}{q}(1 - q/2 + q^2/3) =$$
$$= \frac{r^{k-1}\ln r}{\sum\limits_{s=0}^{k-j-1}\binom{k}{s}(r-1)^s} - \frac{\ln r}{2} + \frac{q\ln r}{3}.$$

Учитывая, что $q = O\Bigl(\binom{k}{j+1} r^{-j}\Bigr)$, верхняя оценка (4) доказана.

§ 3. Доказательство нижней оценки

Доказательство нижней оценки основывается на методе второго момента. Доказательство будет проведено в несколько шагов и следует идеям из работы [6].

3.1. Точная пороговая вероятность. Необходимым условием для нашего применения метода второго момента является наличие точной пороговой вероятности для свойства $\chi_j(H) \leqslant r$. Напомним, что наличие точной пороговой вероятности означает, что для любых фиксированных r, j, k существует некоторая функция $\widehat{p} = \widehat{p}(n)$, такая что для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}\bigl(\chi_j(H(n,k,p)) \leqslant r\bigr) \to \begin{cases} 1, & \text{если } p < (1-\varepsilon)\widehat{p}, \\ 0, & \text{если } p > (1+\varepsilon)\widehat{p}. \end{cases}$$

Для обоснования ее существования воспользуемся следующим результатом из [21].

Теорема 2 [21, теорема 5]. *Пусть $k \geqslant 3$. Пусть $F = (V', E')$ – фиксированный связный k-однородный гиперграф, в котором ребрами выступают произвольные упорядоченные наборы из k вершин (т.е. вершины в ребрах могут повторяться) и который не содержит петель (ребер, в котором все вершины совпадают). Тогда свойство наличие гомоморфизма из случайного гиперграфа $H(n,k,p)$ в F имеет точную пороговую вероятность.*

В нашем случае гиперграф $H(n,k,p)$ обладает свойством $\chi_j(H(n,k,p)) \leqslant r$ тогда и только тогда, когда существует гомоморфизм из $H(n,k,p)$ в гиперграф $F =$

$= (V', E')$, где

$$V' = \{1, \ldots, r\}, \quad E' = \big\{(a_1, \ldots, a_k) : \operatorname{maxcount}(a_1, \ldots, a_k) < j+1\big\},$$

а $\operatorname{maxcount}(a_1, \ldots, a_k)$ обозначает максимальное количество одинаковых значений среди $a_1, \ldots, a_k$.

В силу существования точной пороговой вероятности достаточно показать, что вероятность наличия рассматриваемого свойства отделена от нуля. Действительно, если для некоторого $c > 0$ мы покажем, что

$$\liminf_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\chi_j\left(H\left(n, k, cn\Big/\binom{n}{k}\right)\right) \leqslant r\right) > 0, \tag{8}$$

то для любого $c' < c$ вероятность $\mathbf{P}\left(\chi_j\left(H\left(n, k, c'n\Big/\binom{n}{k}\right)\right) \leqslant r\right)$ уже будет стремиться к 1, так как величина $c'n\Big/\binom{n}{k}$ будет заведомо меньше пороговой вероятности.

3.2. Снова равномерная модель. При доказательстве нижних оценок мы также будем использовать другую модель случайного гиперграфа. Рассмотрим случайный гиперграф $H''(n, k, m)$, где $m = \lceil cn \rceil$, состоящий из m независимых случайных k-подмножеств множества вершин, причем и в каждом таком k-подмножестве все k вершин выбираются случайно, независимо и равновероятно. В таком гиперграфе ребра могут не только повторяться, но и иметь размер меньше, чем k, т.е. иметь повторяющиеся вершины. Легко убедиться с помощью неравенства Чебышева, что число полных ребер (из k различных вершин) $H''(n, k, m)$ с вероятностью, стремящейся к 1, будет лежать в $O(n^{1/2} \ln n)$-окрестности числа cn. Действительно, эта случайная величина имеет биномиальное распределение $\operatorname{Bin}(m, 1 + O(1/n))$, а потому сильно сконцентрирована вокруг своего среднего значения, равного $cn + O(1)$. Значит, при $c' < c$, вновь используя обозначение $p' = c'n\Big/\binom{n}{k}$,

$$\mathbf{P}\Big(\chi_j(H(n, k, p')) \leqslant r\Big) \geqslant \mathbf{P}\Big(\chi_j(H''(n, k, m)) \leqslant r\Big) + o_n(1).$$

Следовательно, вместо (8) достаточно показать, что выполнено

$$\liminf_{n\to\infty} \mathbf{P}\big(\chi_j(H''(n, k, m)) \leqslant r\big) > 0. \tag{9}$$

Отметим, что при поиске j-правильной раскраски гиперграфа $H''(n, k, m)$ для его неправильных ребер мы также будем требовать отсутствия одноцветного набора из $j+1$ вершин.

3.3. Подсчет числа раскрасок. Заметим, что с вероятностью, стремящейся к 1 при $n \to \infty$, в рассматриваемом гиперграфе будет много изолированных вершин. С помощью этого факта несложно проверить, что достаточно установить (9) только для подпоследовательности n, кратных r (см. [12, лемма 1.4]). С учетом этого для доказательства неравенства (9) рассмотрим так называемые *сбалансированные* раскраски. Раскраска называется сбалансированной, если все ее цветовые классы имеют одинаковую мощность. Пусть X_n – количество j-правильных сбалансированных раскрасок случайного гиперграфа $H''(n, k, m)$ в r цветов, тогда

$$\mathbf{P}\big(\chi_j(H''(n, k, m)) \leqslant r\big) \geqslant \mathbf{P}(X_n > 0),$$

а в силу неравенства Пэли–Зигмунда

$$\mathbf{P}(X_n > 0) \geqslant \frac{(\mathbf{E}\, X_n)^2}{\mathbf{E}\, X_n^2}.$$

Таким образом, остается показать, что

$$\mathbf{E}\,X_n^2 = O_{k,j,r}((\mathbf{E}\,X_n)^2). \tag{10}$$

3.4. Подсчет моментов. Найдем первый момент числа j-правильных сбалансированных раскрасок

$$\mathbf{E}\,X_n = \frac{n!}{((n/r)!)^r}(1-q)^{\lceil cn\rceil} = \Theta_{k,j,r}\big(n^{-(r-1)/2}\exp(n[\ln r + c\ln(1-q)])\big), \tag{11}$$

где величина q означает вероятность того, что при фиксированной сбалансированной раскраске хотя бы $j+1$ вершин случайного ребра будут покрашены в один и тот же цвет. Эту вероятность нетрудно вычислить аналитически. По условию теоремы $k-j<k^{1/4}<k/2$, и значит, подобный одноцветный набор вершин может быть только один. Так как раскраска сбалансированная, то вероятность того, что случайно выбранная вершина окажется окрашенной в какой-либо конкретный цвет, равна $1/r$. Тогда вероятность того, что при случайном независимом равновероятном выборе k вершин ребра ровно s вершин окажутся именно этого цвета, равна $r^{-k}\binom{k}{s}(r-1)^{k-s}$. Учитывая все цвета и суммируя по всем s, не меньшим чем $j+1$, получим

$$q = r^{1-k}\sum_{s=j+1}^{k}\binom{k}{s}(r-1)^{k-s} = r^{1-k}\sum_{s=0}^{k-j-1}\binom{k}{s}(r-1)^{s}.$$

Мы уже вводили это обозначение в конце § 2. Множитель $\dfrac{n!}{((n/r)!)^r}$ соответствует числу всех сбалансированных раскрасок в r цветов. Величина $1-q$ означает вероятность того, что в сбалансированной раскраске никакие $j+1$ вершин случайного ребра не будут покрашены в один цвет. Так как ребра выбираются независимо, то данную величину необходимо возвести в степень, равную количеству ребер, т.е. $\lceil cn\rceil$.

Второй момент вычисляется несколько сложнее. Для краткости будем называть ребро *плохим* в некоторой раскраске, если оно имеет хотя бы $j+1$ вершин одного и того же цвета. Пусть τ_1,τ_2 – две сбалансированные раскраски, а e – случайное ребро гиперграфа $H''(n,k,m)$. Найдем вероятность того, что в обеих раскрасках никакой набор e из $j+1$ вершин не покрашен в один и тот же цвет. Для этого рассмотрим класс $\mathcal{A}$ матриц размера $r\times r$, у которых все элементы являются целыми неотрицательными числами, а сумма в каждой строке и в каждом столбце равна n/r. Матрицы такого вида отлично представляют собой пары r-цветных сбалансированных раскрасок вершин гиперграфа $H''(n,k,m)$. Если $A\in\mathcal{A}$, $A=(a_{iu}, i,u=1,\dots,r)$, то будем считать что a_{iu} – это число вершин, имеющих цвет i в раскраске τ_1 и цвет u в раскраске τ_2. Для раскрасок τ_1,τ_2 вероятность того, что e будет раскрашено плохо хотя бы в одной из них, зависит лишь от матрицы A. Обозначим эту вероятность через $\mathcal{Q}(A)$. Далее, матрица $A\in\mathcal{A}$ представляет

$$\frac{n!}{\prod\limits_{i,u=1}^{r} a_{iu}!}$$

пар сбалансированных раскрасок. Вероятность того, что и τ_1, и τ_2 являются j-правильными раскрасками $H''(n,k,m)$, равна $(1-\mathcal{Q}(A))^{\lceil cn\rceil}$. Стало быть, второй момент случайной величины X_n будет равен

$$\mathbf{E}\,X_n^2 = n!\sum_{A\in\mathcal{A}}\left(\prod_{i,u=1}^{r} a_{iu}!\right)^{-1}(1-\mathcal{Q}(A))^{\lceil cn\rceil}. \tag{12}$$

Осталось найти $\mathcal{Q}(A)$. Напомним, что вероятность того, что случайное ребро является плохим в раскраске τ_i, $i = 1, 2$, равна q. Теперь рассмотрим событие, при котором ребро будет плохим в обеих раскрасках, а именно событие, состоящее в том, что ребро содержит хотя бы $j+1$ вершин цвета i в первой раскраске и хотя бы $j+1$ вершин цвета u во второй раскраске. Пусть s – число вершин ребра, покрашенных в цвет i в первой раскраске, t – число вершин ребра, покрашенных в первой раскраске в цвет i, а во второй – в любой цвет, кроме u, и наконец, h – число вершин ребра, покрашенных во второй раскраске в цвет u, а в первой – в любой цвет, кроме цвета i. Тогда в ребре во второй раскраске будет ровно $h + s - t$ вершин цвета u. Интересующее нас событие имеет место быть, если и только если

$$j + 1 \leqslant s \leqslant k, \quad 0 \leqslant h \leqslant k - s, \quad h + s - t \geqslant j + 1. \tag{13}$$

Последнее вытекает из того, что во второй раскраске должно быть не менее $j+1$ вершин цвета u. Далее, в силу свойств матрицы A

- каждая вершина цвета i в первой раскраске и цвета u во второй может быть выбрана a_{iu} способами, всего таких вершин $s - t$;
- каждая вершина цвета i в первой раскраске и не цвета u во второй может быть выбрана $n/r - a_{iu}$ способами, всего таких вершин t;
- каждая вершина не цвета i в первой раскраске и цвета u во второй может быть выбрана $n/r - a_{iu}$ способами, всего таких вершин h;
- наконец, вершина не цвета i в первой раскраске и не цвета u во второй может быть выбрана по формуле включений и исключений $\dfrac{n(r-2)}{r} + a_{iu}$ способами, всего таких вершин $k - h - s$.

Тогда вероятность искомого события будет равна

$$\sum_{s=j+1}^{k} \binom{k}{s} \sum_{h=0}^{k-s} \sum_{t=0}^{s-j-1+h} \binom{k-s}{h} \binom{s}{t} \times$$
$$\times \left(\frac{\frac{n}{r} - a_{iu}}{n}\right)^{h+t} \left(\frac{a_{iu}}{n}\right)^{s-t} \left(\frac{\frac{n(r-2)}{r} + a_{iu}}{n}\right)^{k-h-s}.$$

Осталось просуммировать по всем i и u. Таким образом, вероятность $\mathcal{Q}(A)$ того, что ребро будет плохим хотя бы в одной из раскрасок, будет равна

$$\mathcal{Q}(A) = 2q - \sum_{i,u=1}^{r} \sum_{s=j+1}^{k} \binom{k}{s} \sum_{h=0}^{k-s} \sum_{t=0}^{s-j-1+h} \binom{k-s}{h} \binom{s}{t} \times$$
$$\times \left(\frac{\frac{n}{r} - a_{iu}}{n}\right)^{h+t} \left(\frac{a_{iu}}{n}\right)^{s-t} \left(\frac{\frac{n(r-2)}{r} + a_{iu}}{n}\right)^{k-h-s}. \tag{14}$$

Теперь, применяя оценки Стирлинга вида $x! = \Theta((x/e)^x \sqrt{x+1})$ к выражению в (12), получим

$$\mathbf{E}\, X_n^2 = \Theta_{k,j,r}\Bigg(n^{1/2} \sum_{A \in \mathcal{A}} \left(\prod_{i,u=1}^{r} \sqrt{a_{iu}+1} \right)^{-1} \times$$
$$\times \exp\left(n \left[- \sum_{i,u=1}^{r} \left(\frac{a_{iu}}{n}\right) \ln \left(\frac{a_{iu}}{n}\right) + c \ln\left(1 - \mathcal{Q}(A)\right) \right] \right) \Bigg). \tag{15}$$

Введем следующие обозначения: для $A \in \mathcal{A}$

$$\mathcal{H}(A) = -\sum_{i,u=1}^{r} \frac{a_{iu}}{n} \ln \frac{ra_{iu}}{n},$$
$$\mathcal{E}(A) = \ln(1 - \mathcal{Q}(A)).$$

Для $c > 0$ обозначим $\mathcal{G}_c(A) = \mathcal{H}(A) + c\mathcal{E}(A)$. Дальнейшая наша цель будет состоять в обосновании того факта, что в условиях теоремы функция $\mathcal{G}_c(A)$ достигает своего максимума при $A = J_r$, где J_r – матрица, все элементы которой равны n/r^2. Для этого сначала вычислим $\mathcal{G}_c(J_r)$.

Утверждение 1. *Для любых $r, k, j \in \mathbb{N}$, таких что $k/2 < j < k$, выполнено*

$$\mathcal{G}_c(J_r) = \ln r + c \ln(1-q)^2.$$

Кроме того, имеет место тождество

$$\sum_{s=j+1}^{k} \binom{k}{s} \sum_{h=0}^{k-s} \sum_{t=0}^{s-j-1+h} \binom{k-s}{h} \binom{s}{t} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r^2}\right)^{h+t} \left(\frac{1}{r^2}\right)^{s-t} \left(\frac{(r-1)^2}{r^2}\right)^{k-h-s} = \frac{q^2}{r^2}.$$

Доказательство утверждения 1 сугубо техническое, мы приведем его в § 6, а пока продолжим рассуждения.

Из (11), (12) и утверждения 1 получаем следующую оценку $\mathbf{E}\, X_n^2$:

$$\mathbf{E}\, X_n^2 = \Theta_{k,j,r}\Bigg((\mathbf{E}\, X_n)^2 n^{r-1/2} \sum_{A \in \mathcal{A}} \Bigg(\prod_{i,u=1}^{r} \sqrt{a_{iu}+1} \Bigg)^{-1} \times$$
$$\times \exp\Bigg(n\Bigg[-\sum_{i,u=1}^{r} \frac{a_{iu}}{n} \ln \frac{a_{iu}}{n} + c\ln(1-\mathcal{Q}(A)) - \ln r^2 - c\ln(1-q)^2 \Bigg] \Bigg) \Bigg) =$$
$$= \exp\Bigg(n\Bigg[-\sum_{i,u=1}^{r} \frac{a_{iu}}{n} \ln \frac{ra_{iu}}{n} + c\ln(1-\mathcal{Q}(A)) - \mathcal{G}_c(J_r) \Bigg] \Bigg) \Bigg) =$$
$$= \Theta_{k,j,r}\Bigg((\mathbf{E}\, X_n)^2 n^{r-1/2} \sum_{A \in \mathcal{A}} \Bigg(\prod_{i,u=1}^{r} \sqrt{a_{iu}+1} \Bigg)^{-1} \exp\Big(n\big[\mathcal{G}_c(A) - \mathcal{G}_c(J_r)\big] \Big) \Bigg).$$

Для завершения доказательства нам понадобится следующая

Лемма 2. *Если выполнено условие* (5), *то существует функция $b = b(k,r) > 0$, такая что для любой матрицы $A = (a_{iu},\ i,u = 1,\dots,r)$ из $\mathcal{A}$ выполнено*

$$\mathcal{G}_c(J_r) - \mathcal{G}_c(A) \geqslant b \sum_{i,u=1}^{r} \left(\frac{a_{iu}}{n} - \frac{1}{r^2} \right)^2. \tag{16}$$

Иными словами, на матрицах класса $\mathcal{A}$ максимальное значение $\mathcal{G}_c$ достигается именно на матрице J_r. Доказательство леммы будет приведено в следующем параграфе, а здесь заметим, что для любого $a_{iu} = 0,\dots,n/r$ выполнено

$$\big(\sqrt{a_{iu}+1}\big)^{-1} e^{-nb\left(\frac{a_{iu}}{n} - \frac{1}{r^2}\right)^2} = O_{k,j,r}\big(n^{-1/2}\big).$$

Применяя эту оценку ко всем парам i, u, таким что $\max(i,u)=r$, а также лемму 2, можно оценить второй момент случайной величины X_n следующим образом:

$$\mathbf{E}\, X_n^2 = O_{k,j,r}\left((\mathbf{E}\, X_n)^2 \sum_{A\in\mathcal{A}} \prod_{i,u=1}^{r-1} \left(\sqrt{a_{iu}+1}\right)^{-1} e^{-nb\left(\frac{a_{iu}}{n}-\frac{1}{r^2}\right)^2} \right).$$

Учитывая, что числа $(a_{iu},\ i,u=1,\dots,r-1)$ однозначно определяют матрицу A, полученная сумма по матрицам не превосходит полной суммы по всем значениям a_{iu}, $i,u=1,\dots,r-1$, от 0 до n/r. Стало быть,

$$\mathbf{E}\, X_n^2 = O_{k,j,r}\left((\mathbf{E}\, X_n)^2 \left(\sum_{a=0}^{n/r} \frac{1}{\sqrt{a+1}} e^{-nb\left(\frac{a}{n}-\frac{1}{r^2}\right)^2} \right)^{(r-1)^2} \right).$$

Следовательно,

$$\mathbf{E}\, X_n^2 \leqslant O_{k,j,r}\left((\mathbf{E}\, X_n)^2 \left(\int\limits_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x+1}} e^{-nb\left(\frac{x}{n}-\frac{1}{r^2}\right)^2} dx \right)^{(r-1)^2} \right) = O_{k,j,r}\left((\mathbf{E}\, X_n)^2\right)$$

в силу того, что $\int\limits_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x+1}} e^{-nb(x/n-1/r^2)^2} dx = O_{k,r}(1)$. Значит, неравенство (10) выполнено и нижняя оценка доказана. Осталось лишь доказать лемму 2, чему и будет посвящен следующий параграф.

§ 4. Доказательство леммы 2

В этом параграфе мы покажем справедливость неравенства (16). Из формулировки видно, что нам будет удобно также пользоваться "заменой" $\varepsilon_{iu} = \dfrac{a_{iu}}{n} - \dfrac{1}{r^2}$, $i,u=1,\dots,r$. В данных обозначениях (16) можно переформулировать следующим образом:

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_c(J_r) - \mathcal{G}_c(A) &= \ln r + c(1-q)^2 + \sum_{i,u=1}^{r} \frac{a_{iu}}{n} \ln \frac{r a_{iu}}{n} - c\ln(1-\mathcal{Q}(A)) = \\
&= \sum_{i,u=1}^{r} \frac{a_{iu}}{n} \ln \frac{r^2 a_{iu}}{n} - c\ln\left(\frac{1-\mathcal{Q}(A)}{(1-q)^2}\right) = \\
&= \sum_{i,u=1}^{r} \left(\frac{1}{r^2}+\varepsilon_{iu}\right) \ln(1+r^2\varepsilon_{iu}) - c\ln\left(1+\frac{-\mathcal{Q}(A)+2q-q^2}{(1-q)^2}\right). \qquad (17)
\end{aligned}$$

В силу (14) величина $\mathcal{Q}(A)-2q+q^2$ будет равна

$$\begin{aligned}
&-\mathcal{Q}(A)+2q-q^2 = \sum_{i,u=1}^{r} \sum_{s=j+1}^{k} \binom{k}{s} \sum_{h=0}^{k-s} \sum_{t=0}^{s-j-1+h} \binom{k-s}{h}\binom{s}{t} \times \\
&\times \left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r^2}-\varepsilon_{iu}\right)^{h+t} \left(\frac{1}{r^2}+\varepsilon_{iu}\right)^{s-t} \left(\frac{(r-1)^2}{r^2}+\varepsilon_{iu}\right)^{k-h-s} - q^2. \qquad (18)
\end{aligned}$$

Введем матрицу $\Upsilon = (\varepsilon_{iu},\ i,u=1,\dots,r)$ и отметим ее свойства: все элементы принадлежат отрезку $[-1/r^2, 1/r-1/r^2]$, а также суммы элементов по всем строкам и столбцам равны нулю, т.е. формально – для любых $i, u = 1, \ldots, r$

$$\varepsilon_{iu} \in \left[-\frac{1}{r^2}, \frac{1}{r} - \frac{1}{r^2}\right], \quad \sum_{i'=1}^{r} \varepsilon_{i'u} = 0, \quad \sum_{u'=1}^{r} \varepsilon_{iu'} = 0. \tag{19}$$

Неравенство (16) можно переформулировать так: существует такая $b = b(k, r)$, что для любой матрицы $\Upsilon = (\varepsilon_{iu},\ i, u = 1, \ldots, r)$ со свойствами (19) выполнено

$$\mathcal{G}_c(J_r) - \mathcal{G}_c(A) \geqslant b \sum_{i,u=1}^{r} \varepsilon_{iu}^2.$$

Рассмотрим следующие функции строк для каждого $i = 1, \ldots, r$:

$$\mathcal{H}_i(\Upsilon) = \sum_{u=1}^{r} \left(\frac{1}{r^2} + \varepsilon_{iu}\right) \ln\left(1 + r^2 \varepsilon_{iu}\right),$$

$$\mathcal{E}_i(\Upsilon) = \frac{1}{(1-q)^2}\left[\sum_{u=1}^{r} \sum_{s=j+1}^{k} \binom{k}{s} \sum_{h=0}^{k-s} \sum_{t=0}^{s-j-1+h} \binom{k-s}{h}\binom{s}{t} \times \right.$$
$$\left. \times \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} - \varepsilon_{iu}\right)^{h+t} \left(\frac{1}{r^2} + \varepsilon_{iu}\right)^{s-t} \left(\frac{(r-1)^2}{r^2} + \varepsilon_{iu}\right)^{k-h-s} - q^2/r\right].$$

Из (17), (18) получаем, что

$$\mathcal{G}_c(J_r) - \mathcal{G}_c(A) = \sum_{i=1}^{r} \mathcal{H}_i(\Upsilon) - c \ln\left(1 + \sum_{i=1}^{r} \mathcal{E}_i(\Upsilon)\right) \geqslant \sum_{i=1}^{r} \bigl(\mathcal{H}_i(\Upsilon) - c\mathcal{E}_i(\Upsilon)\bigr). \tag{20}$$

Далее будем исследовать разность $\mathcal{H}_i(\Upsilon) - c\mathcal{E}_i(\Upsilon)$. Будем классифицировать строки матрицы Υ на центральные, хорошие и плохие в зависимости от максимального значения элементов следующим образом:

- строка с номером i – *центральная*, если

$$0 \leqslant \max_{u=1,\ldots,r} \varepsilon_{iu} < \frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} - \frac{1}{rk^{2/3}};$$

- строка с номером i – *хорошая*, если

$$\max_{u=1,\ldots,r} \varepsilon_{iu} \in \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} - \frac{1}{rk^{2/3}}, \frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} - r^{-2k/3}\right];$$

- строка с номером i – *плохая*, если

$$\max_{u=1,\ldots,r} \varepsilon_{iu} \in \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} - r^{-2k/3}, \frac{1}{r} - \frac{1}{r^2}\right].$$

Начнем с анализа центральных строк.

4.1. Центральные строки.

Утверждение 2. *Для центральной строки с номером i выполнено*

$$\mathcal{H}_i(\Upsilon) - c\mathcal{E}_i(\Upsilon) \geqslant \frac{r^2}{4} \sum_{u:\, \varepsilon_{iu}<0} \varepsilon_{iu}^2 + a(r) \sum_{u:\, \varepsilon_{iu}\geqslant 0} \varepsilon_{iu}^2, \tag{21}$$

где $a(r) > 0$ – некоторая положительная функция от r.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вначале оценим $\mathcal{H}_i(\Upsilon)$. В сумме $\mathcal{H}_i(\Upsilon)$ оценим слагаемые $(1/r^2+\varepsilon_{iu})\ln(1+r^2\varepsilon_{iu})$ по-разному в зависимости от ε_{iu}.

Случай 1. Если $\varepsilon_{iu}<0$, то используем оценки функции $\varphi(x)=(1+x)\ln(1+x)$ при $x>-1$, про которую известно, что

$$\varphi(x)>x+\frac{x^2}{2}\quad \text{для } x<0.$$

Тогда для $x=r^2\varepsilon_{iu}$

$$(1/r^2+\varepsilon_{iu})\ln(1+r^2\varepsilon_{iu})\geqslant\varepsilon_{iu}+\frac{r^2}{2}\varepsilon_{iu}^2. \tag{22}$$

Отметим, что неравенство (22) верно и при $\varepsilon_{iu}=-1/r^2$.

Случай 2. Если $\varepsilon_{iu}>0$, но $\varepsilon_{iu}\leqslant 1/(r\ln r)-1/r^2$, то снова используем оценки функции $\varphi(x)=(1+x)\ln(1+x)$, про которую известно, что

$$\varphi(x)>x+\frac{x^2}{2(1+x/3)}\quad \text{для } x>0.$$

Тогда при $x=r^2\varepsilon_{iu}$

$$(1/r^2+\varepsilon_{iu})\ln(1+r^2\varepsilon_{iu})\geqslant\varepsilon_{iu}+\frac{r^2\varepsilon_{iu}^2}{2(1+r^2\varepsilon_{iu}/3)}\geqslant$$

(оценим знаменатель $1+r^2\varepsilon_{iu}/3<1+r/(3\ln r)-1/3<2r/(3\ln r)$)

$$\geqslant\varepsilon_{iu}+\frac{3r\ln r}{4}\varepsilon_{iu}^2.$$

Случай 3. Наконец, если же $\varepsilon_{iu}>1/(r\ln r)-1/r^2$, то оценим слагаемое следующим образом:

$$(1/r^2+\varepsilon_{iu})\ln(1+r^2\varepsilon_{iu})\geqslant(1/r^2+\varepsilon_{iu})\ln\left(\frac{r}{\ln r}\right)\geqslant$$
$$\geqslant\varepsilon_{iu}+\varepsilon_{iu}(\ln r-\ln\ln r-1)\geqslant$$

(воспользуемся тем, что $1\geqslant r\varepsilon_{iu}\left(1-\frac{1}{r}-\frac{1}{k^{2/3}}\right)^{-1}$)

$$\geqslant\varepsilon_{iu}+r\varepsilon_{iu}^2\left(1-\frac{1}{r}-\frac{1}{k^{2/3}}\right)^{-1}(\ln r-\ln\ln r-1).$$

Тем самым, в силу (19)

$$\mathcal{H}_i(\Upsilon)=\sum_{u=1}^{r}(1/r^2+\varepsilon_{iu})\ln(1+r^2\varepsilon_{iu})\geqslant\sum_{u=1}^{r}\varepsilon_{iu}+\frac{r^2}{2}\sum_{u\colon\varepsilon_{iu}<0}\varepsilon_{iu}^2+$$
$$+\min\left(\frac{3r\ln r}{4},r\left(1-\frac{1}{r}-\frac{1}{k^{2/3}}\right)^{-1}(\ln r-\ln\ln r-1)\right)\sum_{u\colon\varepsilon_{iu}>0}\varepsilon_{iu}^2=$$
$$=\frac{r^2}{2}\sum_{u\colon\varepsilon_{iu}<0}\varepsilon_{iu}^2+\min\left(\frac{3r\ln r}{4},r\left(1-\frac{1}{r}-\frac{1}{k^{2/3}}\right)^{-1}(\ln r-\ln\ln r-1)\right)\sum_{u\colon\varepsilon_{iu}>0}\varepsilon_{iu}^2.$$

Далее оценим $c\mathcal{E}_i(\Upsilon)$ сверху. Данная величина является полиномом относительно ε_{iu}, причем в силу утверждения 1 свободный член в этом многочлене равен нулю.

Заметим также, что данный полином симметричен относительно ε_{iu} по u при фиксированном i в силу инвариантности задачи при переобозначении цветовых классов. Из свойств (19) матрицы Υ следует, что $\sum\limits_{u=1}^{r} \varepsilon_{iu} = 0$, поэтому остается рассматривать лишь коэффициенты при степенях ε_{iu} от второй и выше. Тогда $\mathcal{E}_i(\Upsilon)$ можно оценить следующим образом:

$$\mathcal{E}_i(\Upsilon) \leqslant \frac{1}{(1-q)^2} \sum_{u=1}^{r} \sum_{v=2}^{k} \binom{k}{v} r^{2v} |\varepsilon_{iu}|^v \times$$

$$\times \left[\sum_{s=j+1}^{k} \binom{k}{s} \sum_{h=0}^{k-s} \sum_{t=0}^{s-j-1+h} \binom{k-s}{h} \binom{s}{t} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r^2}\right)^{h+t} \left(\frac{1}{r^2}\right)^{s-t} \left(\frac{(r-1)^2}{r^2}\right)^{k-h-s} \right].$$

Прокомментируем неравенство. Коэффициент $\binom{k}{v}$ получен исходя из того, что из всех множителей вида $\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} - \varepsilon_{iu}\right)$, $\left(\frac{1}{r^2} + \varepsilon_{iu}\right)$ и $\left(\frac{(r-1)^2}{r^2} + \varepsilon_{iu}\right)$ в выражении для $\mathcal{E}_i(\Upsilon)$ ровно в v случаях из k нужно взять ε_{iu} или $-\varepsilon_{iu}$. При этом мы получим коэффициент вида

$$\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r^2}\right)^{h+t-\alpha} \left(\frac{1}{r^2}\right)^{s-t-\beta} \left(\frac{(r-1)^2}{r^2}\right)^{k-h-s-\gamma},$$

где $\alpha + \beta + \gamma = v$. Ясно, что каждый подобный коэффициент не превосходит

$$r^{2v} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r^2}\right)^{h+t} \left(\frac{1}{r^2}\right)^{s-t} \left(\frac{(r-1)^2}{r^2}\right)^{k-h-s}.$$

Так как мы оцениваем сверху, то не берем в расчет знак ε_{iu} и рассматриваем только абсолютное значение $|\varepsilon_{iu}|$. Далее, используя утверждение 1, получаем оценку

$$\mathcal{E}_i(\Upsilon) \leqslant \frac{1}{(1-q)^2} \sum_{u=1}^{r} \sum_{v=2}^{k} \binom{k}{v} r^{2v-2} q^2 |\varepsilon_{iu}|^v.$$

Если $\varepsilon_{iu} < 0$, то его модуль в силу (19) не превосходит $1/r^2$, а в противном случае $\varepsilon_{iu} < \frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} - \frac{1}{rk^{2/3}}$. Следовательно,

$$c\mathcal{E}_i(\Upsilon) \leqslant \frac{c}{(1-q)^2} \left[\sum_{u\colon \varepsilon_{iu}<0} \varepsilon_{iu}^2 \sum_{v=2}^{k} \binom{k}{v} r^2 q^2 + \right.$$

$$\left. + \sum_{u\colon \varepsilon_{iu}>0} \varepsilon_{iu}^2 \sum_{v=2}^{k} \binom{k}{v} r^{2v-2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} - \frac{1}{rk^{2/3}}\right)^{v-2} q^2 \right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{cq^2}{(1-q)^2} \left[\sum_{u\colon \varepsilon_{iu}<0} \varepsilon_{iu}^2 \sum_{v=2}^{k} \binom{k}{v} r^2 + \right.$$

$$\left. + \sum_{u\colon \varepsilon_{iu}>0} \varepsilon_{iu}^2 r^{2k-2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} - \frac{1}{rk^{2/3}}\right)^{-2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{rk^{2/3}}\right)^{k} \right] \leqslant$$

(пользуясь тем, что $c < \ln r/q$ по условию (5))

$$\leqslant \frac{q\ln r}{(1-q)^2}\left[\sum_{u:\,\varepsilon_{iu}<0}\varepsilon_{iu}^2 2^k r^2 + r^k\sum_{u:\,\varepsilon_{iu}>0}\varepsilon_{iu}^2\left(1-\frac{1}{r}-\frac{1}{k^{2/3}}\right)^{-2}\left(1-\frac{1}{k^{2/3}}\right)^{k}\right]\leqslant$$

(так как начиная с некоторого k выполнено $\left(1-\frac{1}{k^{2/3}}\right)^k \leqslant e^{-k^{1/3}}$)

$$\leqslant \frac{qr^2 2^k\ln r}{(1-q)^2}\sum_{u:\,\varepsilon_{iu}<0}\varepsilon_{iu}^2 + \frac{qr^k\ln r\Bigl(1-\frac{1}{r}-\frac{1}{k^{2/3}}\Bigr)^{-2}e^{-k^{1/3}}}{(1-q)^2}\sum_{u:\,\varepsilon_{iu}>0}\varepsilon_{iu}^2.$$

Остается оценить коэффициенты при $\sum\limits_{u:\,\varepsilon_{iu}<0}\varepsilon_{iu}^2$ и $\sum\limits_{u:\,\varepsilon_{iu}>0}\varepsilon_{iu}^2$ с помощью следующего технического утверждения, доказательство которого вынесено в § 6.

Утверждение 3. *Для любого $r>3$ существует такое $k_0=k_0(r)$, что для всех $k,j\in\mathbb{N}$, таких что $k-j<k^{1/4}$ и $k>k_0$, выполнены следующие неравенства*:

$$\frac{qr^2 2^k\ln r}{(1-q)^2}\leqslant\frac{r^2}{4},\qquad \frac{qr^k\ln r\Bigl(1-\frac{1}{r}-\frac{1}{k^{2/3}}\Bigr)^{-2}e^{-k^{1/3}}}{(1-q)^2}<e^{-10}r\ln r.$$

Из вышеприведенного утверждения следует, что коэффициент при $\sum\limits_{u:\,\varepsilon_{iu}>0}\varepsilon_{iu}^2$ не превосходит $e^{-10}r\ln r$, что сильно меньше $\frac{3r\ln r}{8}$. Кроме того, выполнено

$$e^{-10}r\ln r<\frac{1}{2}r(\ln r-\ln\ln r-1).$$

В итоге из оценок $\mathcal{H}_i(\Upsilon)$ и $c\mathcal{E}_i(\Upsilon)$ следует, что при достаточно большом k

$$\mathcal{H}_i(\Upsilon)-c\mathcal{E}_i(\Upsilon)\geqslant\frac{r^2}{4}\sum_{u:\,\varepsilon_{iu}<0}\varepsilon_{iu}^2+$$
$$+\min\biggl(\frac{3r\ln r}{8},\frac{1}{2}r\left(1-\frac{1}{r}-\frac{1}{k^{2/3}}\right)^{-1}(\ln r-\ln\ln r-1)\biggr)\sum_{u:\,\varepsilon_{iu}>0}\varepsilon_{iu}^2.$$

4.2. Хорошие строки. Строку с номером i мы называем хорошей, если нашелся такой u_0, что

$$\varepsilon_{iu_0}=\max_{u=1,\dots,r}\varepsilon_{iu}\in\left[\frac{1}{r}-\frac{1}{r^2}-\frac{1}{rk^{2/3}},\frac{1}{r}-\frac{1}{r^2}-r^{-2k/3}\right].$$

Для простоты будем считать, что $u_0=1$. Введем параметр $\delta_i=\frac{1}{r}-\frac{1}{r^2}-\varepsilon_{i1}$. Тогда $\delta_i\in[r^{-2k/3},\frac{1}{rk^{2/3}}]$. Далее, обозначим $\delta_{iu}=\frac{1}{r^2}+\varepsilon_{iu}$, $u>1$. Отметим, что $\delta_{iu}\geqslant 0$ и $\sum\limits_{u=2}^{r}\delta_{iu}=\delta_i$ в силу (19).

Рассмотрим $\mathcal{H}_i(\Upsilon)$ и $\mathcal{E}_i(\Upsilon)$ как функции от δ_i,δ_{iu}. Нам достаточно показать, что $\mathcal{H}_i(\Upsilon)$ и $c\mathcal{E}_i(\Upsilon)$ отличаются на некоторую величину $a=a(k,r)>0$. Имеем

$$\mathcal{H}_i(A)=(1/r-\delta_i)\ln(r-r^2\delta_i)+\sum_{u=2}^{r}\delta_{iu}\ln(r^2\delta_{iu})=$$
$$=\frac{\ln r}{r}-\delta_i\ln r+(1/r-\delta_i)\ln(1-r\delta_i)+2\sum_{u=2}^{r}\delta_{iu}\ln r+\sum_{u=2}^{r}\delta_{iu}\ln\delta_{iu}\geqslant$$

(вспомним, что $\sum\limits_{u=2}^{r} \delta_{iu} = \delta_i$, поэтому последняя сумма в силу неравенства Йенсена для функции $f(x) = x \ln x$ не меньше $-\ln(r-1)\delta_i + \delta_i \ln \delta_i$)

$$\geqslant \frac{\ln r}{r} + \delta_i \ln r + (1/r - \delta_i)\ln(1 - r\delta_i) - \delta_i \ln(r-1) + \delta_i \ln \delta_i \geqslant$$

(воспользуемся тем, что $\ln(1 - r\delta_i) > (-r\delta_i)/(1 - r\delta_i)$)

$$\geqslant \frac{\ln r}{r} + \delta_i \ln \delta_i + \delta_i \ln\left(\frac{r}{r-1}\right) - \delta_i. \tag{23}$$

Оценим величину $c\mathcal{E}_i(\Upsilon)$ сверху. Выпишем сперва ее как функцию от величин δ_{iu}, $u = 1, \ldots, r$:

$$\begin{aligned} c\mathcal{E}_i(\Upsilon) &= \frac{c}{(1-q)^2}\Bigg[\sum_{u=1}^{r}\sum_{s=j+1}^{k}\binom{k}{s}\sum_{h=0}^{k-s}\sum_{t=0}^{s-j-1+h} k - sh\binom{s}{t} \times \\ &\times \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} - \varepsilon_{iu}\right)^{h+t}\left(\frac{1}{r^2} + \varepsilon_{iu}\right)^{s-t}\left(\frac{(r-1)^2}{r^2} + \varepsilon_{iu}\right)^{k-h-s} - q^2/r\Bigg] = \\ &= \frac{c}{(1-q)^2}\Bigg[\sum_{s=j+1}^{k}\binom{k}{s}\sum_{h=0}^{k-s}\sum_{t=0}^{s-j-1+h}\binom{k-s}{h}\binom{s}{t}\delta_i^{h+t}\left(\frac{1}{r} - \delta_i\right)^{s-t} \times \\ &\times \left(\frac{r-1}{r} - \delta_i\right)^{k-h-s} + \sum_{u=2}^{r}\sum_{s=j+1}^{k}\binom{k}{s}\sum_{h=0}^{k-s}\sum_{t=0}^{s-j-1+h}\binom{k-s}{h}\binom{s}{t} \times \\ &\times \left(\frac{1}{r} - \delta_{iu}\right)^{h+t}\delta_{iu}^{s-t}\left(\frac{r-2}{r} + \delta_{iu}\right)^{k-h-s} - q^2/r\Bigg]. \end{aligned} \tag{24}$$

Выражение в правой части (24) содержит две группы вложенных сумм. Их можно оценить следующим образом. Сразу отметим, что приведенные оценки пригодятся и для случая плохих строк.

Утверждение 4. *Если $r, k, j \in \mathbb{N}$ таковы, что $1 < k - j < k^{1/4}$, $r > 2$ и k достаточно велико по отношению к r, то для любой хорошей или плохой строки с номером i выполнено следующее неравенство*:

$$\begin{aligned} &\sum_{s=j+1}^{k}\binom{k}{s}\sum_{h=0}^{k-s}\sum_{t=0}^{s-j-1+h}\binom{k-s}{h}\binom{s}{t}\delta_i^{h+t}\left(\frac{1}{r} - \delta_i\right)^{s-t}\left(\frac{r-1}{r} - \delta_i\right)^{k-h-s} \leqslant \\ &\leqslant q(1 - r\delta_i)^{2j+2-k}\big(1 + \delta_i O(k^{7/12})\big)/r. \end{aligned}$$

Утверждение 5. *Если $r, k, j \in \mathbb{N}$ таковы, что $1 < k - j < k^{1/4}$, $r > 2$ и k достаточно велико по отношению к r, то для любой хорошей или плохой строки с номером i выполнено следующее неравенство*:

$$\begin{aligned} &\sum_{u=2}^{r}\sum_{s=j+1}^{k}\binom{k}{s}\sum_{h=0}^{k-s}\sum_{t=0}^{s-j-1+h}\binom{k-s}{h}\binom{s}{t}\left(\frac{1}{r} - \delta_{iu}\right)^{h+t}\delta_{iu}^{s-t}\left(\frac{r-2}{r} + \delta_{iu}\right)^{k-h-s} \leqslant \\ &\leqslant q(r\delta_i)^{2j+2-k}k^{9(k-j-1)/4}(1 + 2/k)^2/r. \end{aligned}$$

Доказательства утверждений 4 и 5 мы приведем в § 6. А сейчас воспользуемся ими и продолжим анализ хороших строк.

С помощью утверждений 4 и 5, а также неравенства $c < \ln r/q$ (см. условие (5)) получаем из (24) следующую оценку величины $c\mathcal{E}_i(\Upsilon)$:

$$c\mathcal{E}_i(\Upsilon) \leqslant \frac{\ln r}{r(1-q)^2}\Big[(1-r\delta_i)^{2j+2-k}\big(1+\delta_i O(k^{7/12})\big) + \\ + (r\delta_i)^{2j+2-k}k^{9(k-j-1)/4}(1+2/k)^2\Big]. \qquad (25)$$

Теперь оценим разность $\mathcal{H}_i(\Upsilon) - c\mathcal{E}_i(\Upsilon)$.

Случай 1. Пусть сначала $r\delta_i > \dfrac{1}{3k}$. Так как $\delta_i = O\Big(\dfrac{1}{rk^{2/3}}\Big)$, то $\delta_i \ln \delta_i = O\Big(\dfrac{\ln k}{rk^{2/3}}\Big)$. Значит, в силу (23) при достаточно большом k выполнено $\mathcal{H}_i(\Upsilon) \geqslant 0{,}85\dfrac{\ln r}{r}$.

Далее, раз $r\delta_i \leqslant k^{-2/3}$, то для всех достаточно больших k выполнено $r\delta_i < \dfrac{1}{40}$. Оценим сразу остаточные члены в (25):

$$\delta_i k^{7/12} \leqslant k^{-1/12},$$
$$(r\delta_i)^{2j+2-k}k^{9(k-j-1)/4}(1+2/k)^2 = O\big(k^{-2/3(2j+2-k)}k^{9(k-j-1)/4}\big) = \\ = k^{-4/3k+O(k^{1/4})} < 0{,}0001$$

для всех достаточно больших k. Следовательно, верна следующая оценка:

$$c\mathcal{E}_i(\Upsilon) \leqslant \frac{\ln r}{r(1-q)^2}\Big[(1-r\delta_i)^{2j+2-k}(1+O(k^{-1/12})) + 0{,}0001\Big].$$

Далее, заметим, что $(1-r\delta_i)^{2j+2-k} \leqslant (1-1/(3k))^{2j+2-k} \leqslant e^{-(1/3)(2j+2-k)/k}$. С учетом того, что $(2j+2-k)/k = 1+O(k^{-3/4})$, для всех достаточно больших k можно считать, что $(1-r\delta_i)^{2j+2-k} \leqslant 1{,}05e^{-1/3}$. Наконец, для всех достаточно больших k выполнено $(1-q)^2 < 0{,}9$. В итоге получаем, что

$$c\mathcal{E}_i(\Upsilon) \leqslant \frac{10\ln r}{9r}\big[1{,}05e^{-1/3} + 0{,}0001\big] \leqslant 0{,}84\frac{\ln r}{r}.$$

Итак, верна оценка

$$\mathcal{H}_i(\Upsilon) - c\mathcal{E}_i(\Upsilon) \geqslant \frac{\ln r}{100r}. \qquad (26)$$

Случай 2. Пусть теперь $r\delta_i \leqslant \dfrac{1}{3k}$. Опять начнем с оценивания $\mathcal{H}_i(\Upsilon)$. С учетом неравенства $\delta_i \geqslant r^{-2k/3}$ и (23) выполнено

$$\mathcal{H}_i(\Upsilon) \geqslant \frac{\ln r}{r} - \left(\frac{2k}{3}\ln r - \ln\Big(\frac{r}{r-1}\Big) + 1\right)\delta_i.$$

Теперь оценим $c\mathcal{E}_i(\Upsilon)$. Воспользуемся тем, что для $m \in \mathbb{N}$ и $x \in [0, \frac{1}{3m}]$ выполнено неравенство

$$(1-x)^m \leqslant 1 - \frac{mx}{1+mx} \leqslant 1 - \frac{3}{4}mx.$$

Тогда

$$(1-r\delta_i)^{2j+2-k} \leqslant 1 - \frac{3}{4}(2j+2-k)r\delta_i.$$

Далее, $2j+1-k > 9(k-j-1)/4 > 2$, и мы знаем, что $r\delta_i \leqslant 1/(3k)$. Значит,

$$(r\delta_i)^{2j+2-k} k^{9(k-j-1)/4} \leqslant r\delta_i (r\delta_i k)^{2j+1-k} \leqslant r\delta_i (1/3)^{9(k-j-1)/4} < \frac{1}{2} r\delta_i. \tag{27}$$

Кроме того, для всех достаточно больших k выполнено $(1+2/k)^2 \leqslant 2$. Стало быть, в силу (25)

$$c\mathcal{E}_i(\Upsilon) \leqslant \frac{\ln r}{r(1-q)^2} \left[\left(1 - \frac{3}{4}(2j+2-k) r\delta_i\right) \left(1 + \delta_i O(k^{7/12})\right) + r\delta_i \right].$$

Остается оценить величину q, участвующую в знаменателе. По определению имеем

$$\begin{aligned} q = r^{1-k} \sum_{s=j+1}^{k} \binom{k}{s} (r-1)^{k-s} \leqslant 2 \binom{k}{j+1} r^{1-k} (r-1)^{k-j+1} \leqslant \\ \leqslant 2 \binom{k}{j+1} r^{2-j} \leqslant 2k^{k-j-1} r^{2-j} \leqslant k^{k^{1/4}} r^{2-k+k^{1/4}} \leqslant r^{-k/6} r\delta_i. \end{aligned} \tag{28}$$

Здесь мы воспользовались доминированием слагаемого при $s = j+1$ в сумме, а также тем, что $k - j < k^{1/4}$, а $\delta_i \geqslant r^{-3k/4}$. Следовательно,

$$(1-q)^{-2} \leqslant 1 + 8q \leqslant 1 + 8r^{-k/6} r\delta_i,$$

и значит,

$$\begin{aligned} c\mathcal{E}_i(\Upsilon) &\leqslant \frac{\ln r}{r} \left[\left(1 - \frac{3}{4}(2j+2-k) r\delta_i\right) \left(1 + \delta_i O(k^{7/12})\right) + r\delta_i \right] (1 + 8r^{-k/6} r\delta_i) = \\ &= \frac{\ln r}{r} \left[1 - \frac{3}{4}(2j+2-k) r\delta_i + r\delta_i + 8r^{-k/6} r\delta_i + \delta_i O(k^{7/12}) \right] = \\ &= \frac{\ln r}{r} - \left[\frac{3}{4}(2j+2-k) \ln r - \ln r - 8r^{-k/6} \ln r + O(k^{7/12}) \ln r / r \right] \delta_i. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_i(\Upsilon) - c\mathcal{E}_i(\Upsilon) &\geqslant \frac{\ln r}{r} - \left(\frac{2k}{3} \ln r - \ln\left(\frac{r}{r-1}\right) + 1 \right) \delta_i - \\ &- \frac{\ln r}{r} + \left[\frac{3}{4}(2j+2-k) \ln r - \ln r - 8r^{-k/6} \ln r + O(k^{7/12}) \ln r / r \right] \delta_i = \\ &= \left(\frac{3}{4}(2j+2-k) \ln r + O(k^{7/12}) \ln r / r - \frac{2k}{3} \ln r \right) \delta_i. \end{aligned}$$

В силу того, что $k - j < k^{1/4}$ и k достаточно велико, выполнено соотношение

$$\frac{3}{4}(2j+2-k) \ln r + O(k^{7/12}) \ln r / r - \frac{2k}{3} \ln r = \frac{1}{12} k \ln r + O(k^{7/12}) \frac{\ln r}{r} > \frac{1}{20} k \ln r.$$

В итоге для каждой хорошей строки получаем

$$\mathcal{H}_i(\Upsilon) - c\mathcal{E}_i(\Upsilon) \geqslant \frac{1}{20} k (\ln r) \delta_i \geqslant \frac{1}{20} k (\ln r) r^{-2k/3}. \tag{29}$$

Отметим, что данная оценка также верна и для предыдущего случая, когда выполнено $r\delta_i > 1/(3k)$.

4.3. Плохие строки. Будем называть строку с номером i плохой, если нашелся u_0 с условием $\varepsilon_{iu_0} > \dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{r^2} - r^{-2k/3}$ и это максимальный элемент среди ε_{iu}. Вновь для простоты будем считать, что $u_0 = 1$. Тогда, пользуясь уже введенными обозначениями δ_i, δ_{iu}, получаем, что $\delta_i < r^{-2k/3}$. Значит, можно считать, что $kr\delta_i < 1/3$.

Оценим $\mathcal{H}_i$ снизу так же, как и для хороших строк; полученная оценка (23) верна всегда:

$$\mathcal{H}_i(\Upsilon) \geqslant \frac{\ln r}{r} + \delta_i \ln \delta_i + \ln\Bigl(\frac{r}{r-1}\Bigr)\delta_i - \delta_i.$$

Оценим $c\mathcal{E}_i(A)$ сверху. Пользуясь (25), имеем

$$c\mathcal{E}_i(A) \leqslant \frac{\ln r}{r(1-q)^2}\Bigl[(1-r\delta_i)^{2j+2-k}\bigl(1+\delta_i O(k^{7/12})\bigr) + {} \\ + (r\delta_i)^{2j+2-k}k^{9(k-j-1)/4}(1+2/k)^3\Bigr] =$$

(пользуемся тем, что $(1-r\delta_i)^{2j+2-k} = 1 - r(2j+2-k)\delta_i + O(k^2r^2\delta_i^2)$, а также (27) для оценки последнего слагаемого)

$$= \frac{\ln r}{r(1-q)^2}\Bigl[1 - r(2j+2-k)\delta_i + O(k^{7/12}\delta_i)\Bigr] =$$

(используем оценки $\delta_i < r^{-2k/3}$ и $(1-q)^{-2} = (1+O(q))$, а также $q = O(k^{7/12}r^{-2k/3})$ в силу (28))

$$= \frac{\ln r}{r}\Bigl[1 - r(2j+2-k)\delta_i + O(k^{7/12}r^{-2k/3})\Bigr](1+O(q)) = \\ = \frac{\ln r}{r} - (2j+2-k)(\ln r)\delta_i + O(k^{7/12}r^{-2k/3}).$$

Получим

$$\mathcal{H}_i(\Upsilon) - c\mathcal{E}_i(\Upsilon) \geqslant \delta_i \ln \delta_i + \ln\Bigl(\frac{r}{r-1}\Bigr)\delta_i - \delta_i + (2j+2-k)(\ln r)\delta_i + O(k^{7/12}r^{-2k/3}).$$

Минимум данного выражения достигается при $\delta_i = \dfrac{r-1}{r^{2j-k+3}}$, а само выражение при таком δ_i равно

$$-\frac{r-1}{r^{2j-k+3}} + O(k^{7/12}r^{-2k/3}).$$

Значит, либо $\mathcal{H}_i(\Upsilon) - c\mathcal{E}_i(\Upsilon) \geqslant 0$, либо $|\mathcal{H}_i(\Upsilon) - c\mathcal{E}_i(\Upsilon)| = O(k^{7/12}r^{-2k/3})$.

§ 5. Перебор случаев

Мы уже показали в (21), (29), что если плохих строк нет, то найдется такая функция $b = b(k,r)$, что выполняется искомое неравенство:

$$\mathcal{G}_c(J_r) - \mathcal{G}_c(A) \geqslant \sum_{i=1}^{r} \mathcal{H}_i(\Upsilon) - c\sum_{i=1}^{r} \mathcal{E}_i(\Upsilon) \geqslant b\|\varepsilon\|^2.$$

5.1. Не только плохие строки. Пусть теперь имеется некоторое количество плохих строк, но есть дополнительно либо хорошие, либо центральные. Предположим для удобства, что при $i = 1, \ldots, s$ у нас получились плохие строки, а остальные не являются плохими. Пусть также максимальные элементы плохих строк лежат по диагонали, они обязаны находиться в разных столбцах в силу свойств матрицы A. Тогда согласно результатам предыдущего параграфа

$$\sum_{i=1}^{s} \mathcal{H}_i(A) \geqslant c \sum_{i=1}^{s} \mathcal{E}_i(A) - O(sk^{7/12} r^{-2k/3}).$$

Случай 1. Пусть имеется центральная строка с номером $i_0 > s$. Тогда все элементы нормированной матрицы A/n в первых s столбцах будут меньше $r^{-2k/3} \leqslant r^{-2} 3^{-2/3}$, ведь они лежат в одном столбце с $1/r - \delta_u$, $u = 1, \ldots, s$. Но эти элементы равны $\frac{1}{r^2} + \varepsilon_{i_0 u}$, $u = 1, \ldots, s$. Значит, $\varepsilon_{i_0 u}$ отрицательны и, более того, $\varepsilon_{i_0 u} < (3^{-2/3} - 1) r^{-2}$. Но тогда согласно (21)

$$\mathcal{H}_{i_0}(\Upsilon) - c\mathcal{E}_{i_0}(\Upsilon) \geqslant \frac{r^2}{4} \sum_{u \colon \varepsilon_{i_0 u} < 0} \varepsilon_{i_0 u}^2 \geqslant \frac{r^2}{4} s (3^{-2/3} - 1)^2 r^{-4} \geqslant \frac{s}{16} r^{-2}.$$

Полученная оценка значительно больше, чем $O(sk^{7/12} r^{-2k/3})$, при достаточно большом k. Значит, при наличии центральной строки имеем $\mathcal{G}_c(A) - \mathcal{G}_c(J_r) \geqslant \frac{1}{32} r^{-2}$, и этого более чем достаточно в наших условиях.

Случай 2. Если же центральных строк нет, но среди оставшихся есть хорошая с номером i_0, то запаса разницы между $\mathcal{H}_{i_0}(A)$ и $c\mathcal{E}_{i_0}(A)$ снова более чем достаточно, чтобы компенсировать плохие строки. Согласно (29) данная разность не меньше $\frac{1}{20} k (\ln r) r^{-2k/3}$, что при $k \geqslant k_0(r)$ значительно больше, чем $O(sk^{7/12} r^{-2k/3}) = O(rk^{7/12} r^{-2k/3})$.

Тем самым, остается только один неразобранный случай, а именно случай, когда все строки матрицы A являются плохими.

5.2. Только плохие строки. Наконец, пусть в каждой строке нормированной матрицы A/n имеется элемент, лежащий в пределах $[1/r - r^{-2k/3}, 1/r]$. Подобные элементы обязаны лежать в разных столбцах. Будем считать, что они лежат по диагонали. Обозначим их, как и раньше, через $1/r - \delta_i$, $i = 1, \ldots, r$. Тогда для $\sum_{i=1}^{r} \mathcal{H}_i(\Upsilon)$ снова используем оценку (23). А вот величину $c \ln\Bigl(1 + \sum_{i=1}^{r} \mathcal{E}_i(\Upsilon)\Bigr)$ в (20) будем оценивать целиком, чтобы получить более точные оценки. Обозначим

$$\psi = (1 - q)^2 \sum_{i=1}^{r} \mathcal{E}_i(\Upsilon).$$

Из (24) имеем

$$\psi = \sum_{i=1}^{r} \Biggl[\sum_{s=j+1}^{k} \binom{k}{s} \sum_{h=0}^{k-s} \sum_{t=0}^{s-j-1+h} \binom{k-s}{h} \binom{s}{t} \delta_i^{h+t} \left(\frac{1}{r} - \delta_i\right)^{s-t} \times$$
$$\times \left(\frac{r-1}{r} - \delta_i\right)^{k-h-s} + \sum_{u \neq i} \sum_{s=j+1}^{k} \binom{k}{s} \sum_{h=0}^{k-s} \sum_{t=0}^{s-j-1+h} \binom{k-s}{h} \binom{s}{t} \times$$
$$\times \left(\frac{1}{r} - \delta_{iu}\right)^{h+t} \delta_{iu}^{s-t} \left(\frac{r-2}{r} + \delta_{iu}\right)^{k-h-s} - q^2/r \Biggr].$$

Будем рассматривать коэффициенты при степенях δ_i и δ_{iu} до второй. Сразу отметим, что минимальная степень при δ_{iu} равна $2j+2-k$, а это сильно больше двух. Свободный член (коэффициент при нулевой степени δ_i) равен

$$\sum_{i=1}^{r}\left(\sum_{s=j+1}^{k}\binom{k}{s}\left(\frac{1}{r}\right)^{s}\left(\frac{r-1}{r}\right)^{k-s}-q^2/r\right)=$$
$$=\sum_{i=1}^{r}\left(r^{-k}\sum_{s=j+1}^{k}\binom{k}{s}(r-1)^s-q^2/r\right)=\sum_{i=1}^{r}(q/r-q^2/r)=q-q^2.$$

Коэффициент при первой степени равен

$$\frac{1}{r^{k-1}}\sum_{i=1}^{r}\Bigg[-\sum_{s=j+1}^{k}\binom{k}{s}\left(s(r-1)^{k-s}+(k-s)(r-1)^{k-s-1}\right)+$$
$$+\sum_{s=j+2}^{k}\binom{k}{s}s(r-1)^{k-s}+\sum_{s=j+1}^{k-1}\binom{k}{s}(k-s)(r-1)^{k-1-s}\Bigg]\delta_i=$$
$$=-r^{1-k}\binom{k}{j+1}(j+1)(r-1)^{k-j-1}\sum_{i=1}^{r}\delta_i.$$

С учетом ограничений на $\delta_i\in[0,r^{-2k/3}]$ степени по δ_i и δ_{iu} выше первой (с учетом коэффициентов) будут составлять $O(qk^2\delta_i^2)=O(qk^2r^{-4k/3})$ (см. утверждения 4 и 5), а значит, будет выполнено соотношение

$$\psi=q-r^{1-k}\binom{k}{j+1}(j+1)(r-1)^{k-j-1}\sum_{i=1}^{r}\delta_i-q^2+O(qk^2r^{-4k/3}).$$

Доминирующим слагаемым здесь будет $q=O(k^{k-j-1}r^{2-j})$ (см. (28)). Отсюда получаем, что

$$c\ln\left(1+\sum_{i=1}^{r}\mathcal{E}(\Upsilon)\right)=c\ln\left(1+\frac{\psi}{(1-q)^2}\right)=$$
$$=c\left(\frac{\psi}{(1-q)^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{\psi}{(1-q)^2}\right)^2+O(q^3)\right).$$

Далее, заметим, что

$$\psi(1-q)^{-2}=\psi(1+2q+O(q^2))=$$
$$=q-r^{1-k}\binom{k}{j+1}(j+1)(r-1)^{k-j-1}\sum_{i=1}^{r}\delta_i+q^2+O(qk^2r^{-4k/3}).$$

В свою очередь,

$$\psi^2(1-q)^{-4}=q^2+O\left(qr^{1-k}\binom{k}{j+1}(j+1)(r-1)^{k-j-1}\sum_{i=1}^{r}\delta_i\right)=$$
$$=q^2+O(qk^{k-j}r^{1-j-2k/3}).$$

Стало быть,

$$c\ln\biggl(\sum_{i=1}^{r}\mathcal{E}_i(\Upsilon)\biggr) =$$

$$= c\biggl(q - r^{1-k}\binom{k}{j+1}(j+1)(r-1)^{k-j-1}\sum_{i=1}^{r}\delta_i + q^2/2 + O(qk^2r^{-4k/3})\biggr).$$

С учетом нижней оценки (23) для $\sum\limits_{i=1}^{r}\mathcal{H}_i(\Upsilon)$ нам достаточно взять такое c, что

$$c < \frac{\ln r}{q}\min_{\delta_i\in[0,r^{-2k/3}]}\Biggl[\biggl(1 - r^{1-k}\binom{k}{j+1}(j+1)(r-1)^{k-j-1}\sum_{i=1}^{r}\delta_i/q + \frac{q}{2} +$$

$$+ O(k^2r^{-4k/3})\biggr)^{-1}\biggl(1 + \sum_{i=1}^{r}\Bigl[\delta_i\log_r\delta_i + \log_r\Bigl(\frac{r}{r-1}\Bigr)\delta_i - \frac{\delta_i}{\ln r}\Bigr]\biggr)\Biggr].$$

Нам важен порядок этого минимума с точностью до $o(q/\ln r)$. Снова используя оценки на δ_i, получаем, что

$$\biggl(1 - r^{1-k}\binom{k}{j+1}(j+1)(r-1)^{k-j-1}\sum_{i=1}^{r}\delta_i/q + \frac{q}{2} + O(k^2r^{-4k/3})\biggr)^{-1}\times$$

$$\times\biggl(1 + \sum_{i=1}^{r}\Bigl[\delta_i\log_r\delta_i + \log_r\Bigl(\frac{r}{r-1}\Bigr)\delta_i - \frac{\delta_i}{\ln r}\Bigr]\biggr) =$$

(пользуемся тем, что $|\delta_i\log_r\delta_i| = O(kr^{-2k/3})$)

$$= 1 + \sum_{i=1}^{r}\Biggl[(j+1)\frac{r^{1-k}\binom{k}{j+1}(r-1)^{k-j-1}}{q}\delta_i + \delta_i\log_r\delta_i + \log_r\Bigl(\frac{r}{r-1}\Bigr)\delta_i - \frac{\delta_i}{\ln r}\Biggr] -$$

$$- \frac{q}{2} + O(k^2r^{-4k/3}).$$

Обозначим через $f(x)$ следующую функцию:

$$f(x) = (j+1)\frac{r^{1-k}\binom{k}{j+1}(r-1)^{k-j-1}}{q}x + x\log_r x + \log_r\Bigl(\frac{r}{r-1}\Bigr)x - \frac{x}{\ln r}.$$

Минимум значения $f(x)$ достигается при $x = x_0 = \dfrac{r-1}{r^{t+1}}$, где

$$t = (j+1)\frac{r^{1-k}\binom{k}{j+1}(r-1)^{k-j-1}}{q}.$$

Подставляя его, получаем значение $f(x_0) = -\dfrac{r-1}{r^{t+1}\ln r}$. В итоге нам достаточно взять

$$c < \frac{\ln r}{q} - \frac{\ln r}{2} - \frac{r-1}{r^{t+1}q} + O\bigl(q^{-1}(\ln r)k^2r^{-4k/3}\bigr).$$

Осталось заметить, что

$$q = r^{1-k}\binom{k}{j+1}(r-1)^{k-j-1}\biggl(1 + O\Bigl(\frac{k-j}{k(r-1)}\Bigr)\biggr).$$

Откуда следует, что

$$t = (j+1)\frac{r^{1-k}\binom{k}{j+1}(r-1)^{k-j-1}}{q} = (j+1)\left(1 + O\left(\frac{k-j}{k(r-1)}\right)\right) =$$
$$= j + 1 + O((k-j)/r),$$

а также что

$$\frac{1}{q} = O\left(r^{k-1}(r-1)^{j+1-k}\frac{1}{\binom{k}{j+1}}\right) = O\left(r^{k-1}\left(\frac{k-j}{(r-1)k}\right)^{k-j-1}\right).$$

Значит, величину $\frac{r-1}{r^t q}$ можно оценить сверху следующим образом: при всех достаточно больших $k > k_0(r)$ выполнено

$$\frac{r-1}{r^{t+1}q} = O\left(r^{k-1}\left(\frac{k-j}{(r-1)k}\right)^{k-j-1}\right)\frac{r-1}{r^{t+1}} =$$
$$= O\left(r^{k-1}\left(\frac{k-j}{(r-1)k}\right)^{k-j-1}\right)\frac{r-1}{r^{j+1+O((k-j)/r)}} =$$
$$= O\left(\left(\frac{(k-j)r^{1+O(1/r)}}{(r-1)k}\right)^{k-j-1}\right) =$$
$$= O\left(\left(\frac{r^{1+O(1/r)}}{k^{3/4}}\right)^{k-j-1}\right) = k^{\frac{3}{4}(j-k+1)(1+o(1))} \leqslant k^{(j-k+1)/2}.$$

Тем самым, лемма 2 полностью доказана.

§ 6. Доказательства вспомогательных утверждений

В данном параграфе приводятся доказательства вспомогательных утверждений, использованных в статье.

6.1. Доказательство утверждения 1. Рассмотрим по определению

$$\mathcal{G}_c(J_r) = \mathcal{H}(J_r) + c\mathcal{E}(J_r) = -r^2\frac{1}{r^2}\ln\frac{1}{r} + c\ln(1 - \mathcal{Q}(J_r)) = \ln r + c\ln(1 - \mathcal{Q}(J_r)).$$

Теперь вычислим $\mathcal{Q}(J_r)$. В силу (14)

$$\mathcal{Q}(J_r) = 2q - \sum_{i,u=1}^{r}\sum_{s=j+1}^{k}\binom{k}{s}\sum_{h=0}^{k-s}\sum_{t=0}^{s-j-1+h}\binom{k-s}{h}\binom{s}{t}\times$$
$$\times\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r^2}\right)^{h+t}\left(\frac{1}{r^2}\right)^{s-t}\left(\frac{r-2}{r} + \frac{1}{r^2}\right)^{k-h-s}.$$

Проверим, что кратная сумма в правой части равна q^2. Действительно, простыми преобразованиями получаем

$$\sum_{s=j+1}^{k}\binom{k}{s}\sum_{h=0}^{k-s}\sum_{t=0}^{s-j-1+h}\binom{k-s}{h}\binom{s}{t}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r^2}\right)^{h+t}\left(\frac{1}{r^2}\right)^{s-t}\left(\frac{(r-1)^2}{r^2}\right)^{k-h-s} =$$

$$= r^{-2k} \sum_{s=j+1}^{k} \binom{k}{s} (r-1)^{k-s} \sum_{h=0}^{k-s} \sum_{t=0}^{s-j-1+h} \binom{k-s}{h} \binom{s}{t} (r-1)^{k-s-h+t} =$$

(сделаем замену $s' = s + h - t$ вместо t)

$$= r^{-2k} \sum_{s=j+1}^{k} \binom{k}{s} (r-1)^{k-s} \sum_{h=0}^{k-s} \sum_{s'=j+1}^{s+h} \binom{k-s}{h} \binom{s}{s'-h} (r-1)^{k-s'} =$$

$$= r^{-2k} \sum_{s=j+1}^{k} \binom{k}{s} (r-1)^{k-s} \sum_{s'=j+1}^{k} (r-1)^{k-s'} \sum_{h=\max(0,s'-s)}^{k-s} \binom{k-s}{h} \binom{s}{s'-h} =$$

$$= r^{-2k} \sum_{s=j+1}^{k} \binom{k}{s} (r-1)^{k-s} \sum_{s'=j+1}^{k} \binom{k}{s'} (r-1)^{k-s'} = \frac{q^2}{r^2}.$$

Суммирование по i, u дает недостающий множитель r^2. В итоге $\mathcal{Q}(J_r) = 2q - q^2$ и $\mathcal{G}_c(J_r) = \ln r + c \ln(1-q)^2$. Утверждение 1 доказано.

6.2. Доказательство утверждения 3. Сначала оценим величину q. Напомним, что $q = r^{1-k} \sum\limits_{s=j+1}^{k} \binom{k}{s} (r-1)^{k-s}$. В силу условия $s \geqslant j+1 > k/2$ максимальное слагаемое соответствует значению $s = j+1$, поэтому

$$q \leqslant r^{1-k} k \binom{k}{k-j-1} (r-1)^{k-j-1} \leqslant r^{1-k} k (kr)^{k-j-1} =$$
$$= r^{-k} (kr)^{k-j} \leqslant r^{-k} e^{k^{1/4}(\ln k + \ln r)}. \tag{30}$$

Видно, что при всех достаточно больших k данная величина очень мала. В частности, можно считать, что $q < 1/2$.

Докажем первое неравенство. В силу вышеприведенной оценки q получаем

$$\frac{qr^2 2^k \ln r}{(1-q)^2} \leqslant 4qr^2 2^k \ln r \leqslant 4r^2 2^k \ln r r^{-k} e^{k^{1/4}(\ln k + \ln r)} \leqslant$$

(пользуемся тем, что $r > 2$)

$$\leqslant 4r^2 2^k \ln r 3^{-k} e^{k^{1/4}(\ln k + \ln r)} = r^2 (2/3)^{k + O(k^{1/4} \ln k)} < \frac{r^2}{4}.$$

Последнее неравенство верно при всех достаточно больших k по отношению к r.

Докажем второе неравенство. Пользуясь оценкой (30), имеем

$$\frac{qr^k \ln r \left(1 - \frac{1}{r} - \frac{1}{k^{2/3}}\right)^{-2} e^{-k^{1/3}}}{(1-q)^2} \leqslant 4qr^k \ln r \left(1 - \frac{1}{r} - \frac{1}{k^{2/3}}\right)^{-2} e^{-k^{1/3}} \leqslant$$

$$\leqslant 4e^{k^{1/4}(\ln k + \ln r)} \ln r \left(1 - \frac{1}{r} - \frac{1}{k^{2/3}}\right)^{-2} e^{-k^{1/3}} = e^{-k^{1/3} + O(k^{1/4} \ln k)} \ln r < e^{-10} r \ln r$$

для всех k, достаточно больших по отношению к r. Утверждение 3 доказано.

6.3. Доказательство утверждения 4. Рассмотрим цепочку преобразований

$$\sum_{s=j+1}^{k} \binom{k}{s} \sum_{h=0}^{k-s} \sum_{t=0}^{s-j-1+h} \binom{k-s}{h} \binom{s}{t} \delta_i^{h+t} \left(\frac{1}{r} - \delta_i\right)^{s-t} \left(\frac{r-1}{r} - \delta_i\right)^{k-h-s} =$$

$$= r^{-k} \sum_{s=j+1}^{k} \binom{k}{s} \sum_{h=0}^{k-s} \sum_{t=0}^{s-j-1+h} \binom{k-s}{h} \binom{s}{t} (r\delta_i)^{h+t} (1-r\delta_i)^{s-t} (r-1-r\delta_i)^{k-h-s} \leqslant$$

(выделим отдельно члены суммы при $t = h = 0$ и $t > h = 0$ и оценим грубо множитель $(1-r\delta_i)^{s-t}$, учитывая, что $s - t \geqslant 2j + 2 - k$ в силу (13))

$$\leqslant r^{-k}(1-r\delta_i)^{2j+2-k} \Bigg[\sum_{s=j+1}^{k} \binom{k}{s} (r-1-r\delta_i)^{k-s} +$$

$$+ \sum_{s=j+2}^{k} \binom{k}{s} \sum_{t=1}^{s-j-1} \binom{s}{t} (r\delta_i)^t (r-1-r\delta_i)^{k-s} +$$

$$+ \sum_{s=j+1}^{k} \binom{k}{s} \sum_{h=1}^{k-s} \sum_{t=0}^{s-j-1+h} \binom{k-s}{h} \binom{s}{t} (r\delta_i)^{h+t} (r-1-r\delta_i)^{k-h-s} \Bigg]. \tag{31}$$

Во всех суммах множитель вида $(r-1-r\delta_i)^{\alpha}$ оценим сверху выражением $(r-1)^{\alpha}$. Тогда первая сумма оценится величиной $\sum\limits_{s=j+1}^{k} \binom{k}{s} (r-1)^{k-s} = r^{k-1}q$. Далее, во второй и третьей суммах $\binom{s}{t}$ оценим сверху через k^t, а $\binom{k-s}{h} \leqslant (k-s)^h \leqslant k^{h/4}$. В итоге выражение (31) не превосходит

$$r^{-k}(1-r\delta_i)^{2j+2-k} \Bigg[r^{k-1}q + \sum_{s=j+2}^{k} \binom{k}{s} \sum_{t=1}^{s-j-1} k^t (r\delta_i)^t (r-1)^{k-s} +$$

$$+ \sum_{s=j+1}^{k} \binom{k}{s} \sum_{h=1}^{k-s} \sum_{t=0}^{s-j-1+h} k^{t+h/4} (r\delta_i)^{h+t} (r-1)^{k-h-s} \Bigg]. \tag{32}$$

Далее мы рассмотрим два случая в зависимости от того, насколько велико значение $kr\delta_i$.

Случай 1. Пусть $kr\delta_i > 2$. Оценим сначала первую сумму в скобках в (32). В ней воспользуемся тем, что $\sum\limits_{t=1}^{s-j-1} k^t (r\delta_i)^t \leqslant 2(kr\delta_i)^{s-j-1}$. Тогда

$$\sum_{s=j+2}^{k} \binom{k}{s} \sum_{t=1}^{s-j-1} k^t (r\delta_i)^t (r-1)^{k-s} \leqslant 2 \sum_{s=j+2}^{k} \binom{k}{s} (r-1)^{k-s} (kr\delta_i)^{s-j-1} =$$

$$= 2kr\delta_i \sum_{s=j+2}^{k} \binom{k}{s} (r-1)^{k-s} (kr\delta_i)^{s-j-2} \leqslant$$

(воспользуемся тем, что для хорошей или плохой строки выполнено $r\delta_i \leqslant k^{-2/3}$)

$$\leqslant 2kr\delta_i \sum_{s=j+2}^{k} \binom{k}{s} (r-1)^{k-s} k^{(s-j-2)/3}.$$

Оценим отношение последовательных слагаемых в получившейся сумме:

$$\frac{\binom{k}{s}(r-1)^{k-s} k^{(s-j-2)/3}}{\binom{k}{s-1}(r-1)^{k-s+1} k^{(s-j-3)/3}} = \frac{k^{1/3}(k-s+1)}{s(r-1)} \leqslant \frac{k^{7/12}}{(k-k^{1/4})(r-1)} \leqslant k^{-5/12},$$

начиная с некоторого k. Здесь мы воспользовались тем, что $s \geqslant j+1 > k-k^{1/4}$ и $r > 2$. В итоге, сворачивая геометрическую прогрессию и пользуясь неравенством $(1-x)^{-1} \leqslant 1+2x$ при $x = k^{-5/12}$, получаем, что первая сумма в скобках (32) не превосходит

$$2kr\delta_i(r-1)^{k-j-2}\binom{k}{j+2}(1+2k^{-5/12}) =$$

$$= 2kr\delta_i(r-1)^{-1}\frac{\binom{k}{j+2}}{\binom{k}{j+1}}\binom{k}{j+1}(r-1)^{k-j-1}(1+2k^{-5/12}) =$$

$$= 2kr\delta_i(r-1)^{-1}\frac{k-j-1}{j+2}\binom{k}{j+1}(r-1)^{k-j-1}(1+2k^{-5/12}) \leqslant$$

(воспользуемся тем, что $\binom{k}{j+1}(r-1)^{k-j-1} < qr^{k-1}$)

$$\leqslant 2qr^k\delta_i\frac{(k-j)k}{(j+2)(r-1)}(1+2k^{-5/12})(1+2k^{-5/12}) = O(qr^k\delta_i k^{1/4}r^{-1}) \tag{33}$$

в силу условия $j \sim k$ и $k-j < k^{1/4}$.

Аналогично оценим вторую сумму в скобках в (32). Сумму $\sum\limits_{t=0}^{s-j-1+h}(kr\delta_i)^t$ по t оценим как удвоенное максимальное слагаемое, т.е. как $2(kr\delta_i)^{s-j-1+h}$. В итоге искомая сумма не превосходит

$$\sum_{s=j+1}^{k}\binom{k}{s}\sum_{h=1}^{k-s}k^{h/4}(r\delta_i)^h(r-1)^{k-h-s}2(kr\delta_i)^{s-j-1+h} =$$

$$= 2\sum_{s=j+1}^{k}\binom{k}{s}(r-1)^{k-s}(kr\delta_i)^{s-j-1}\sum_{h=1}^{k-s}(k^{5/4}r^2\delta_i^2(r-1)^{-1})^h.$$

Заметим, что $k^{5/4}r^2\delta_i^2(r-1)^{-1} < k^{5/4-4/3} = k^{-1/12}$, а потому сумма по h оценивается сверху своим максимальным слагаемым (при $h=1$), умноженным на $1+2k^{-1/12}$. Стало быть, получаем оценку

$$2\sum_{s=j+1}^{k}\binom{k}{s}k^{s-j-1+5/4}(r\delta_i)^{s-j+1}(r-1)^{k-s-1}(1+2k^{-1/12}).$$

Снова рассмотрим отношение соседних слагаемых в оставшейся сумме по s:

$$\frac{\binom{k}{s}k^{s-j-1+5/4}(r\delta_i)^{s-j+1}(r-1)^{k-s-1}}{\binom{k}{s-1}k^{s-j-2+5/4}(r\delta_i)^{s-j}(r-1)^{k-s}} = \frac{(k-s+1)kr\delta_i}{s(r-1)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{k^{1/4+1-2/3}}{(k-k^{1/4})(r-1)} \leqslant k^{-5/12}.$$

Следовательно, сумма по s оценивается сверху своим максимальным слагаемым (при $s=j+1$), умноженным на $1+2k^{-5/12}$. В итоге получаем оценку

$$2(r\delta_i)^2\binom{k}{j+1}k^{5/4}(r-1)^{k-j-2}(1+2k^{-1/12})(1+2k^{-5/12}) \leqslant$$

(снова воспользуемся тем, что $r\delta_i \leqslant k^{-2/3}$)

$$\leqslant 2r\delta_i \binom{k}{j+1} k^{7/12}(r-1)^{k-j-2}(1+2k^{-1/12})(1+2k^{-5/12}) \leqslant$$

(применим очевидное неравенство $\binom{k}{j+1}(r-1)^{k-j-1} < qr^{k-1}$)

$$\leqslant 2r^k q\delta_i k^{7/12}(r-1)^{-1}(1+2k^{-1/12})(1+2k^{-5/12}) = O(r^k q\delta_i k^{7/12} r^{-1}). \tag{34}$$

В итоге из (33) и (34) получаем, что в рассматриваемом случае выражение (32) не превосходит

$$r^{-k}(1-r\delta_i)^{2j+2-k}\left[r^{k-1}q + O(r^{k-1}q\delta_i k^{1/4}) + O(r^{k-1}q\delta_i k^{7/12})\right] =$$
$$= q(1-r\delta_i)^{2j+2-k}r^{-1}\left(1+O(\delta_i k^{7/12})\right).$$

Случай 2. Пусть теперь $kr\delta_i \leqslant 2$. Вновь отдельно оценим суммы, входящие в (32). Начнем с первой. Внутреннюю сумму по t оценим тривиальным образом, пользуясь ограничением второго случая: $\sum\limits_{t=1}^{s-j-1}(kr\delta_i)^t \leqslant kr\delta_i 2^{s-j-1}$. Стало быть,

$$\sum_{s=j+2}^{k}\binom{k}{s}\sum_{t=1}^{s-j-1}(kr\delta_i)^t(r-1)^{k-s} \leqslant kr\delta_i \sum_{s=j+2}^{k}\binom{k}{s}(r-1)^{k-s}2^{s-j-1}.$$

Покажем, что в получившейся сумме максимальному слагаемому отвечает $s=j+2$. Рассмотрим отношение последовательных слагаемых в сумме:

$$\frac{\binom{k}{s}(r-1)^{k-s}2^{s-j-1}}{\binom{k}{s-1}(r-1)^{k-s+1}2^{s-j-2}} = \frac{2(k-s+1)}{s(r-1)} \leqslant \frac{2k^{1/4}}{(r-1)(k-k^{1/4})} \leqslant 2k^{-3/4},$$

начиная с некоторого k, где переход в неравенстве выполнен с учетом убывания выражения по s и ограничения $k-s<k^{1/4}$. Значит, вся сумма оценивается своим максимальным слагаемым, умноженным на $1+4k^{-3/4}$:

$$kr\delta_i\sum_{s=j+2}^{k}\binom{k}{s}(r-1)^{k-s}2^{s-j-1} \leqslant 2\binom{k}{j+2}kr\delta_i(r-1)^{k-j-2}(1+4k^{-3/4}) =$$

$$= 2kr\delta_i(r-1)^{-1}(1+4k^{-3/4})\frac{\binom{k}{j+2}}{\binom{k}{j+1}}\binom{k}{j+1}(r-1)^{k-j-1} \leqslant$$

(пользуемся тем, что $\binom{k}{j+1}(r-1)^{k-j-1} \leqslant qr^{k-1}$)

$$\leqslant 2qr^k\delta_i(1+4k^{-3/4})\frac{(k-j-1)k}{(j+2)(r-1)} = O\left(qr^{k-1}\delta_i k^{1/4}\right). \tag{35}$$

Здесь мы снова пользовались тем, что $j \sim k$ и $k-j<k^{1/4}$.

Остается оценить вторую сумму в (32). Здесь все полностью аналогично. Внутренняя сумма по t оценивается с помощью ограничения $kr\delta_i \leqslant 2$:

$$\sum_{t=0}^{s-j-1+h}(kr\delta_i)^t \leqslant 2^{s-j+h}.$$

Следовательно,

$$\sum_{s=j+1}^{k}\binom{k}{s}\sum_{h=1}^{k-s}\sum_{t=0}^{s-j-1+h}k^{t+h/4}(r\delta_i)^{h+t}(r-1)^{k-h-s}\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{s=j+1}^{k}\binom{k}{s}\sum_{h=1}^{k-s}k^{h/4}(r\delta_i)^{h}(r-1)^{k-h-s}2^{s-j+h}=$$
$$=\sum_{s=j+1}^{k}\binom{k}{s}(r-1)^{k-s}2^{s-j}\sum_{h=1}^{k-s}\left(\frac{2k^{1/4}r\delta_i}{r-1}\right)^{h}.$$

Сумма по h – это снова геометрическая прогрессия, причем ее знаменатель мал: из условия $r\delta_i\leqslant k^{-1}$ получаем, что

$$\frac{2k^{1/4}r\delta_i}{r-1}\leqslant k^{-3/4}.$$

Значит, вся сумма оценивается сверху своим первым слагаемым, умноженным на $1+2k^{-3/4}$. В итоге имеем оценку

$$\frac{2k^{1/4}r}{r-1}\delta_i(1+2k^{-3/4})\sum_{s=j+1}^{k}\binom{k}{s}2^{s-j}(r-1)^{k-s-1}.$$

Проверим, что в оставшейся сумме максимальному слагаемому отвечает $s=j+1$. Вновь выпишем отношение последовательных членов суммы:

$$\frac{\binom{k}{s}2^{s-j}(r-1)^{k-s-1}}{\binom{k}{s-1}2^{s-j-1}(r-1)^{k-s}}=\frac{2(k-s+1)}{s(r-1)}\leqslant 2k^{-3/4},$$

тогда вся сумма оценивается своим максимальным слагаемым, умноженным на $1+4k^{-3/4}$. Получаем итоговую оценку:

$$\frac{2k^{1/4}r}{r-1}\delta_i(1+2k^{-3/4})\sum_{s=j+1}^{k}\binom{k}{s}2^{s-j}(r-1)^{k-s-1}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{2k^{1/4}r}{r-1}\delta_i(1+2k^{-3/4})\binom{k}{j+1}2(r-1)^{k-j-2}(1+4k^{-3/4})\leqslant$$

(пользуемся тем, что $\binom{k}{j+1}(r-1)^{k-j-1}\leqslant qr^{k-1}$)

$$\leqslant 4k^{1/4}qr^{k}(r-1)^{-2}\delta_i(1+2k^{-3/4})(1+4k^{-3/4})=O(qr^{k}k^{1/4}r^{-2}\delta_i).\qquad(36)$$

В итоге, из (35) и (36) получаем, что выражение (32) не превосходит

$$r^{-k}(1-r\delta_i)^{2j+2-k}\Big[r^{k-1}q+O(qr^{k-1}\delta_ik^{1/4})+O(qr^{k}k^{1/4}r^{-2}\delta_i)\Big]=$$
$$=q(1-r\delta_i)^{2j+2-k}r^{-1}\big(1+O(k^{1/4}\delta_i)\big).$$

Утверждение 4 доказано.

6.4. Доказательство утверждения 5. Преобразуем оцениваемое выражение:

$$\sum_{u=2}^{r}\sum_{s=j+1}^{k}\binom{k}{s}\sum_{h=0}^{k-s}\sum_{t=0}^{s-j-1+h}\binom{k-s}{h}\binom{s}{t}\left(\frac{1}{r}-\delta_{iu}\right)^{h+t}\delta_{iu}^{s-t}\left(\frac{r-2}{r}+\delta_{iu}\right)^{k-h-s}=$$

$$=r^{-k}\sum_{u=2}^{r}\sum_{s=j+1}^{k}\binom{k}{s}\sum_{h=0}^{k-s}\sum_{t=0}^{s-j-1+h}\binom{k-s}{h}\binom{s}{t}\times$$

$$\times\left(1-r\delta_{iu}\right)^{h+t}\left(r\delta_{iu}\right)^{s-t}\left(r-2+r\delta_{iu}\right)^{k-h-s}.$$

Здесь достаточно совсем грубых оценок. Оценим биномиальные коэффициенты следующим образом:

$$\binom{s}{t}\leqslant k^t,\quad \binom{k-s}{h}\leqslant (k-s)^h\leqslant (k^{1/4})^h.$$

В последнем неравенстве мы пользуемся тем, что $k-s<k-j<k^{1/4}$. Отметим также, что раз $r\delta_i<k^{-2/3}<1$, то $r-2+r\delta_{iu}<r-1$. Далее, в силу (13) выполнено $s-t\geqslant 2j+2-k$, а потому $(r\delta_{iu})^{s-t}\leqslant(r\delta_{iu})^{2j+2-k}$. Стало быть, искомое выражение не превосходит величины

$$r^{-k}\sum_{u=2}^{r}(r\delta_{iu})^{2j+2-k}\sum_{s=j+1}^{k}\binom{k}{s}\sum_{h=0}^{k-s}(r-1)^{k-h-s}\sum_{t=0}^{s-j-1+h}k^{k-s+t+h/4}.$$

Внутренняя сумма по t – это геометрическая прогрессия с растущим знаменателем k, потому она не превосходит своего последнего слагаемого, умноженного на $1+2/k$. Получаем оценку

$$r^{-k}\sum_{u=2}^{r}(r\delta_{iu})^{2j+2-k}\sum_{s=j+1}^{k}\binom{k}{s}\sum_{h=0}^{k-s}(r-1)^{k-h-s}k^{k-j-1+5h/4}(1+2/k)\leqslant$$

$$\leqslant r^{-k}k^{k-j-1}\sum_{u=2}^{r}(r\delta_{iu})^{2j+2-k}\sum_{s=j+1}^{k}\binom{k}{s}(r-1)^{k-s}\sum_{h=0}^{k-s}k^{5h/4}(1+2/k)\leqslant$$

$$\leqslant r^{-k}k^{k-j-1}\sum_{u=2}^{r}(r\delta_{iu})^{2j+2-k}\sum_{s=j+1}^{k}\binom{k}{s}(r-1)^{k-s}k^{5(k-s)/4}(1+2/k)^2.$$

Здесь мы снова воспользовались оценкой геометрической прогрессии. Применим оценку $k^{5(k-s)/4}\leqslant k^{5(k-j-1)/4}$, тогда оставшаяся сумма по s станет равна qr^{k-1}. В итоге получаем оценку

$$qr^{-1}k^{9(k-j-1)/4}(1+2/k)^2\sum_{u=2}^{r}(r\delta_{iu})^{2j+2-k}.$$

Осталось заметить, что в силу условий $\delta_{iu}\geqslant 0$ и $\sum\limits_{u=2}^{r}\delta_{iu}=\delta_i$ выполнено простое неравенство для норм:

$$\sum_{u=2}^{r}\delta_{iu}^{2j+2-k}\leqslant\left(\sum_{u=2}^{r}\delta_{iu}\right)^{2j+2-k}=\delta_i^{2j+2-k}.$$

Утверждение 5 доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Cutler J., Radcliffe A.J.* Hypergraph Independent Sets // Combin. Probab. Comput. 2013. V. 22. № 1. P. 9–20. https://doi.org/10.1017/S0963548312000454
2. *Ordentlich E., Roth R.M.* Independent Sets in Regular Hypergraphs and Multidimensional Runlength-Limited Constraints // SIAM J. Discrete Math. 2004. V. 17. № 4. P. 615–623. https://doi.org/10.1137/S0895480102419767
3. *Балобанов А.Е., Шабанов Д.А.* О числе независимых множеств в простых гиперграфах // Матем. заметки. 2018. Т. 103. № 1. С. 38–48 https://doi.org/10.4213/mzm11508
4. *Семенов А.С., Шабанов Д.А.* Независимые множества общего вида в случайных сильно разреженных гиперграфах // Пробл. передачи информ. 2018. Т. 54. № 1. С. 63–77. http://mi.mathnet.ru/ppi2260
5. *Heckel A.* The Chromatic Number of Dense Random Graphs // Random Structures Algorithms. 2018. V. 53. № 1. P. 140–182. https://doi.org/10.1002/rsa.20757
6. *Shabanov D.A.* Estimating the r-Colorability Threshold for a Random Hypergraph // Discrete Appl. Math. 2020. V. 282. P. 168–183. https://doi.org/10.1016/j.dam.2019.10.031
7. *Ширяев А.Н.* Вероятность. В 2-х кн., 6-е изд. испр. М: МЦНМО, 2017.
8. *Schmidt-Pruzan J., Shamir E., Upfal E.* Random Hypergraph Coloring Algorithms and the Weak Chromatic Number // J. Graph Theory. 1985. V. 9. № 3. P. 347–362. https://doi.org/10.1002/jgt.3190090307
9. *Schmidt J.P.* Probabilistic Analysis of Strong Hypergraph Coloring Algorithms and the Strong Chromatic Number // Discrete Math. 1987. V. 66. № 3. P. 259–277. https://doi.org/10.1016/0012-365X(87)90101-4
10. *Shamir E.* Chromatic Number of Random Hypergraphs and Associated Graphs // Randomness and Computation. Adv. Comput. Res. V. 5. Greenwich, CT: JAI Press, 1989. P. 127–142.
11. *Krivelevich M., Sudakov B.* The Chromatic Numbers of Random Hypergraphs // Random Structures Algorithms. 1998. V. 12. № 4. P. 381–403. https://doi.org/10.1002/(SICI)1098-2418(199807)12:4<381::AID-RSA5>3.0.CO;2-P
12. *Dyer M., Frieze A., Greenhill C.* On the Chromatic Number of a Random Hypergraph // J. Combin. Theory Ser. B. 2015. V. 113. P. 68–122. https://doi.org/10.1016/j.jctb.2015.01.002
13. *Ayre P., Coja-Oghlan A., Greenhill C.* Hypergraph Coloring up to Condensation // Random Structures Algorithms. 2019. V. 54. № 4. P. 615–652. https://doi.org/10.1002/rsa.20824
14. *Achlioptas D., Kim J.H., Krivelevich M., Tetali P.* Two-Colorings Random Hypergraphs // Random Structures Algorithms. 2002. V. 20. № 2. P. 249–259. https://doi.org/10.1002/rsa.997
15. *Achlioptas D., Moore C.* On the 2-Colorability of Random Hypergraphs // Randomization and Approximation Techniques in Computer Science (Proc. 6th Int. Workshop RANDOM'2002. Cambridge, MA, USA. Sept. 13–15, 2002). Lect. Notes Comput. Sci. V. 2483. Berlin: Springer, 2002. P. 78–90. https://doi.org/10.1007/3-540-45726-7_7
16. *Coja-Oghlan A., Zdeborová L.* The Condensation Transition in Random Hypergraph 2-Coloring // Proc. 23rd Annu. ACM–SIAM Symp. on Discrete Algorithms (SODA'12). Kyoto, Japan. Jan. 17–19, 2012. P. 241–250. https://doi.org/10.1137/1.9781611973099.22
17. *Coja-Oghlan A., Panagiotou K.* Catching the k-NAESAT Threshold // Proc. 44th Annu. ACM Symp. on Theory of Computing (STOC'12). New York, USA. May 19–22, 2012. P. 899–908. https://doi.org/10.1145/2213977.2214058
18. *Семенов А.С.* Двухцветные раскраски случайного гиперграфа // Теория вероятн. и ее примен. 2019. Т. 64. № 1. С. 75–97. https://doi.org/10.4213/tvp5165
19. *Balobanov A.E., Shabanov D.A.* On the Strong Chromatic Number of a Random 3-Uniform Hypergraph // Discrete Math. 2021. V. 344. № 3. Paper No. 112231 (16 pp.). https://doi.org/10.1016/j.disc.2020.112231

20. *Semenov A.S., Shabanov D.A.* On the Weak Chromatic Number of Random Hypergraphs // Discrete Appl. Math. 2020. V. 276. P. 134–154. https://doi.org/10.1016/j.dam.2019.03.025
21. *Hatami H., Molloy M.* Sharp Thresholds for Constraint Satisfaction Problems and Homomorphisms // Random Structures Algorithms. 2008. V. 33. № 3. P. 310–332. https://doi.org/10.1002/rsa.20225

Семенов Александр Сергеевич
Московский физико-технический институт
(государственный университет),
факультет инноваций и высоких технологий,
кафедра дискретной математики
alexsemenov1992@mail.ru
Шабанов Дмитрий Александрович
Московский физико-технический институт
(государственный университет),
лаборатория комбинаторных и геометрических структур
Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет,
кафедра теории вероятностей
Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»,
факультет компьютерных наук
dmitry.shabanov@phystech.edu

Поступила в редакцию
09.03.2020
После доработки
18.02.2022
Принята к публикации
18.02.2022