

УДК 621.391 : 519.724.6 : 519.725.3

© 2022 г. А.А. Курмукова, Ф.И. Иванов, В.В. Зяблов

**ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ СВЕРХУ И СНИЗУ
ДЛЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ СВЕРТОЧНЫХ КОДОВ В ДВОИЧНОМ
СИММЕТРИЧНОМ КАНАЛЕ¹**

Предлагается новый подход для построения аналитических оценок вероятности появления пакета ошибок заданной длины, вероятности ошибочного декодирования и вероятности ошибки на бит для сверточных кодов в двоичном симметричном канале с декодированием Витерби. Выражения, полученные для верхней и нижней оценок вероятности ошибки на бит, а также для вероятности ошибочного декодирования, основаны на активных расстояниях и спектре активных расстояний сверточного кода. Предложенные оценки справедливы для сверточных кодов скорости $1/2$, но их можно обобщить и для сверточных кодов скорости $1/n$. Вычисление описанных оценок имеет линейную сложность от длины наиболее коротких пакетов ошибок при известных метрических характеристиках сверточного кода, при этом сложность вычисления не зависит от входной вероятности ошибки на бит. Результаты моделирования показывают, что рассматриваемые оценки достаточно точны, особенно для малых вероятностей искажений в канале.

Ключевые слова: сверточные коды, активное расстояние, вероятность ошибки на бит, решетка кода.

DOI: 10.31857/S055529232202003X, EDN: DZBRSC

§ 1. Введение

Сверточные коды, предложенные Элайесом в [1], являются предметом изучения уже на протяжении более 60 лет. Несмотря на то, что они уступают с точки зрения вероятности ошибки на блок при заданном уровне помех в канале передачи информации полярным кодам [2] или кодам с малой плотностью проверок на четность (МПП-кодам) [3], сверточные коды могут существенно снизить вероятность ошибки на бит при фиксированном отношении сигнал-шум [4]. Полярные коды и большинство классов МПП-кодов этим свойством не обладают [4]. Кроме сверточных кодов таким свойством обладают всего несколько классов кодов: например, коды Хэмминга [5], некоторые МПП-коды с порождающей матрицей низкой плотности [6], кодовые конструкции с повторениями [7].

Уменьшение величины ошибки на бит – это очень важное свойство для внутренних кодов в любых каскадах. Это одна из главных причин, почему сверточные коды широко используются в различных каскадных кодовых конструкциях, например, в плетеных кодах [8] и в других последовательных и параллельных каскадных конструкциях [9, 10]. Также рекурсивный систематический кодер сверточного кода часто используется в турбо-кодах [11, 12]. В каскаде с линейным кодом такой кодер

¹ Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2022 г.

также может использоваться и показывать высокую эффективность, как, например, в параллельном каскаде с систематическим полярным кодом и итеративным декодированием [13].

Таким образом, аналитические методы расчета вероятности ошибки для сверточного кода являются важным направлением исследований. Существует ряд работ, в которых изучались вопросы теоретического анализа эффективности сверточных кодов. В работе [14] представлен классический способ подсчета вероятности ошибки с помощью производящей функции спектра кода и функции спектра ошибки на бит. Для двоичного симметричного канала используется уточненная граница Миберга [15]. В работе [16] используется простая цепь Маркова для оценки вероятности ошибки на бит сверточного кода с ограничением длины пакетов. Но экспериментальные данные, представленные в работе, показывают, что предложенная оценка является достаточно грубой и неточной для малых значений вероятности искажений в канале. Некоторые модификации этого подхода описаны в [17], где авторы используют марковскую цепь для описания конструкции сверточного кода. В этом случае процесс декодирования Витерби [18] может рассматриваться с помощью специальных переходов между состояниями марковской цепи. Оценка вероятности ошибки на бит для сверточного кода с выкалываниями была предложена в работе [19]. Наконец, в [20] показано, как оценить вероятность ошибки на бит для любого сверточного кода как для двоичного симметричного канала, так и для канала с гауссовским шумом. Но описанный в этой работе подход сложен в реализации, а также практически не применим для сверточных кодов с большой памятью из-за вычислительной сложности.

В данной статье предложен подход к оцениванию вероятности ошибки на бит и на блок для сверточного кода в двоичном симметричном канале при декодировании кода по максимуму правдоподобия. Предложенный метод основан на спектре активных расстояний сверточного кода и аналитических оценках вероятности появления пакета ошибок заданной длины [21, 22]. Вычисление вероятности ошибки на блок для терминированного сверточного кода было описано в работе [23]. В этой работе мы предлагаем вычислительно простые аналитические оценки сверху и снизу для вероятности ошибки на бит.

§ 2. Сверточные коды

2.1. Сверточный код с рекурсивным кодером. Для простоты последующих выкладок в данной статье рассмотрим двоичный сверточный код скорости $1/2$ с рекурсивным систематическим кодером. Однако сразу отметим, что полученные результаты могут быть обобщены для кода скорости $1/n$, $n > 1$, $n \in \mathbb{N}$. Также все полученные результаты верны для двоичного симметричного канала и декодера Витерби.

Порождающая матрица сверточного кода скорости $1/2$ с систематическим кодером с обратной связью может быть задана с помощью отношения многочленов:

$$G(D) = \begin{pmatrix} 1 & g^{(2)} \\ & g^{(1)} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где порождающие полиномы –

$$g^{(\ell)}(D) = g_0^{(\ell)} + g_1^{(\ell)}D + g_2^{(\ell)}D^2 + \dots + g_m^{(\ell)}D^m, \quad g_i^{(\ell)} \in \{0, 1\},$$

для $\ell = 1, 2$. Память кода здесь обозначена через m , скорость кода $1/2$. Обратная связь в кодере задана знаменателем в отношении полиномов. Мы рассматриваем взаимно простые порождающие полиномы одинаковой степени. Состояние кодера в каждый момент времени может быть задано либо с помощью m битов, либо десятичным числом s : $0 \leq s < 2^m$. Всего возможно 2^m различных состояний.

Для блочных кодов при оценивании вероятности ошибки на блок обычно рассматривают весовой спектр кода [24]. В данной статье мы предлагаем использовать активные расстояния, предложенные в [25], и спектр активных расстояний для анализа сверточных кодов. Если рассматривать обычный спектр весов сверточного кода, то веса не будут увеличиваться при увеличении длины рассматриваемого пути, если путь начиная с некоторого момента пойдет только по нулевым состояниям решетки. Поэтому имеет смысл исключать из рассмотрения пути, как только они сливаются с нулевым путем. В этом заключается основное различие двух понятий: спектр весов и спектр весов активных расстояний.

Для начала введем дополнительное построение, чтобы определить активные расстояния.

Определение 2. Подмножество кодовых слов сверточного кода \mathcal{C} с одним конечным ответвлением от нулевого пути обозначим через \mathcal{C}_f . Это подмножество \mathcal{C}_f состоит из кодовых слов $\mathbf{v}(D)$, которым соответствует конечный ненулевой путь некоторой длины j , этот ненулевой путь начинается сразу после начального нулевого состояния решетки: $s_0 = 0$, $s_1 \neq 0$, и не имеет двух последовательных нулевых состояний до слияния с нулевым путем решетки $s_j = s_{j+1} = s_{j+2} = \dots = 0$ в момент времени j .

Кодовые слова из подмножества \mathcal{C}_f имеют конечный вес, и этот вес равен весу ненулевого пути в решетке. Для определения активного расстояния рассматривается только начальная ненулевая часть пути. Отметим, что подмножество \mathcal{C}_f не включает в себя нулевое кодовое слово. Минимально возможная длина ненулевого пути составляет $m + 1$, где m – память кода. Здесь и далее длиной пути считается количество выходных кортежей (или число переходов между состояниями решетки). Тогда кодовое слово с ненулевым путем длины j из подмножества \mathcal{C}_f обозначим через $\mathbf{v}^{(j)}$.

Определение 3. Активное расстояние длины j сверточного кода \mathcal{C} – это минимальный вес Хэмминга кодового слова $\mathbf{v}^{(j)}$ из подмножества \mathcal{C}_f , имеющего конечный ненулевой путь длины j :

$$a_j = \min_{\mathbf{v}^{(j)} \in \mathcal{C}_f} w(\mathbf{v}^{(j)}),$$

где $w(\mathbf{v}^{(j)})$ – вес Хэмминга кодового слова $\mathbf{v}^{(j)}$.

Свободное расстояние сверточного кода можно также определить через активные расстояния, так как при рассмотрении подмножества кодовых слов \mathcal{C}_f мы не исключаем кодовые слова минимального веса. Тогда свободное расстояние можно ввести как минимальное активное расстояние $\min_j a_j$, $j \geq m + 1$. Также отметим, что свободное расстояние не всегда соответствует минимальной длине j .

Так как вес кодового слова $\mathbf{v}^{(j)} \in \mathcal{C}_f$ определяется весом ненулевого пути в решетке, то можно записать вес кодового слова с помощью первых j выходных кортежей:

$$w(\mathbf{v}^{(j)}) = \sum_{i=0}^{j-1} w(\mathbf{v}_i^{(j)}).$$

Число кодовых слов $\mathbf{v}^{(j)} \in \mathcal{C}_f$ с весом $w^{(j)}$ будем обозначать через $N_{w^{(j)}}$. Приведем определение спектра активных расстояний, впервые предложенное в работе [21].

Определение 4. Спектр \mathcal{D}_{a_j} активных расстояний a_j длины j сверточного кода – это множество наборов

$$\mathcal{D}_{a_j} = \left\{ j, a_j, w^{(j)}, N_{w^{(j)}} \mid w^{(j)} = w(\mathbf{v}^{(j)}), \mathbf{v}^{(j)} \in \mathcal{C}_f \right\}.$$

Таблица 1

Спектр активных расстояний для сверточного кода (13, 15) с рекурсивным кодером

$w \setminus j$	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
6	1		1									
7												
8		1	1	2	2	2	1	1				
9												
10				2	4	6	8	8	8	6	4	2
11												
12					2	5	13	19	29	34	36	34
13												
14						2	6	20	38	68	100	132
15												
16							1	8	25	64	132	230
17												
18								8	30	93	220	
19												
20									6	32	121	
21												
22										4	32	
23												
24											2	
25												

Таблица 2

Спектр активных расстояний для сверточного кода (13, 17) с рекурсивным кодером

$w \setminus j$	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
6		1										
7	1		1	1								
8			1	1	1	2						
9					4	1	3	3				
10				1	1	3	6	4	5	5		
11				1		4	5	5	15	7	10	8
12					1	2	4	13	10	18	27	16
13						3	3	13	14	30	32	37
14					1		5	7	22	34	40	81
15							3	5	15	40	60	96
16								2	17	21	79	105
17								2	7	20	62	119
18								2		21	36	100
19									2	7	26	90
20										5	12	71
21									1		11	27
22											6	11
23												6
24												3
25												3

Минимальный вес в спектре активных расстояний \mathcal{D}_{a_j} – это активное расстояние a_j длины j сверточного кода в соответствии с определением активных расстояний. Подсчет спектра кода является вычислительно более трудной задачей, чем расчет спектра активных расстояний, так как при подсчете спектра активных расстояний исключаются кодовые слова, идущие по нулевому пути. Объединение спектров активных расстояний длины j для всех возможных длин формирует весь спектр активных расстояний.

Определение 5. Спектр \mathcal{D}_a активных расстояний сверточного кода – это объединение множеств наборов \mathcal{D}_{a_j} для всех возможных длин j :

$$\mathcal{D}_a = \bigcup_{j=m+1}^{\infty} \mathcal{D}_{a_j},$$

где m – память кода.

Спектр активных расстояний удобно представлять в виде таблицы. Приведем примеры спектров активных расстояний для двух кодов.

Пример 1. В табл. 1 и 2 представлены спектры активных расстояний для сверточных кодов с рекурсивным кодером и памятью $m = 3$: (13, 15) и (13, 17). Число в таблице, находящееся на пересечении i -й строки и j -го столбца, обозначает количество кодовых слов в подмножестве \mathcal{C}_f с весом, указанным в i -й строке, и длиной ненулевого пути, указанной в j -м столбце. Полужирным шрифтом выделены те коэффициенты спектра, для которых веса соответствуют активным расстояниям.

§ 3. Теоретические оценки вероятности ошибки на блок и на бит для сверточных кодов в двоичном симметричном канале

Приведем оценки сверху и снизу для вероятности появления пакета ошибок заданной длины и вероятности ошибочного декодирования терминированного сверточного кода, а также выведем оценку для вероятности ошибки на бит. Предпола-

гается, что передача данных осуществляется через двоичный симметричный канал, а в качестве декодера используется алгоритм Витерби.

3.1. Вероятность появления пакета ошибок. Вероятность появления пакета ошибок и ее оценка были подробно описаны в работе [21]. Приведем здесь вывод и итоговую формулу.

Рассматривается двоичный симметричный канал с декодированием по максимуму правдоподобия с вероятностью ошибки на бит p . Декодер Витерби всегда возвращает слово, принадлежащее исходному коду \mathcal{C} . Если при декодировании появился пакет ошибок, то декодированное слово $\mathbf{v}' \in \mathcal{C}$ не будет совпадать с переданным $\mathbf{v} \in \mathcal{C}$. На месте возникновения пакета ошибок будет ответвление от корректного пути на решетке. Пакеты ошибок считаются независимыми, если между ними есть хотя бы два корректных состояния решетки подряд. Так как сверточный код является линейным, то $\mathbf{v} + \mathbf{v}' \in \mathcal{C}$, и на месте пакета ошибок в сумме возникнет ненулевой путь на решетке, вес которого определяется спектром активных расстояний \mathcal{D}_a сверточного кода. В декодированном слове возникнет пакет ошибок, если произошло хотя бы $\frac{a_j}{2}$ ошибок на позициях единиц в сумме $\mathbf{v} + \mathbf{v}'$ в месте, соответствующему пакету ошибок, где a_j – минимальный вес пакета ошибок длины j (активное расстояние).

Вероятность появления фиксированного числа ошибок среди нулей и единиц в двоичной последовательности может быть записана так:

$$P(e_{\text{all}}, e_1, j, w, p) = \binom{w}{e_1} \binom{2j - w}{e_{\text{all}} - e_1} p^{e_{\text{all}}} (1 - p)^{2j - e_{\text{all}}},$$

где e_{all} – общее число ошибок, e_1 – число ошибок среди единиц, j – длина последовательности в терминах количества кортежей, w – вес последовательности, p – вероятность ошибки на бит в канале.

Как было отмечено ранее, пакет ошибок возникнет при декодировании, если на местах единиц в пакете количество ошибок больше половины веса, а количество ошибок на местах нулей может быть любым. Если число ошибок среди единиц составляет ровно половину веса пакета, то пакет ошибок возникнет с вероятностью $1/2$. Таким образом, вероятность пакета ошибок длины j и веса w для двоичного симметричного канала с вероятностью ошибки на бит p может быть записана следующим образом:

$$P_{\text{burst}}(j, w, p) = \sum_{i > \frac{w}{2}}^{2j} \sum_{i_1 > \frac{w}{2}}^{\min(w, i)} P(e_{\text{all}} = i, e_1 = i_1, j, w, p) + \begin{cases} 0 & \text{для нечетного веса } w, \\ \frac{1}{2} \sum_{i = \frac{w}{2}}^{2j - \frac{w}{2}} P(e_{\text{all}} = i, e_1 = \frac{w}{2}, j, w, p) & \text{для четного веса } w. \end{cases} \quad (2)$$

Оценку снизу для вероятности появления пакета ошибок будем считать как вероятность появления наиболее вероятного пакета ошибок, т.е. пакета ошибок с минимальным весом. Тогда оценку сверху можно посчитать как сумму вероятностей появления всех возможных пакетов ошибок. Тогда оценки снизу и сверху для вероятности появления пакета ошибок длины j могут быть заданы с помощью активных расстояний и спектра активных расстояний соответственно:

$$P_{\text{low}}(j, p) = (1 - p)^{4m} P_{\text{burst}}(j, w = a_j, p) \quad (3)$$

и

$$P_{\text{up}}(j, p) = \sum_{w_i=w_{\min}}^{w_{\max}} N_{w_i} P_{\text{burst}}(j, w = w_i, p), \quad (4)$$

где $\{w_i, N_{w_i}\} \in \mathcal{D}_{a_j}$, а m – память кода. Для нижней оценки мы также используем множитель $(1-p)^{4m}$ – вероятность того, что $2m$ битов до и после пакета ошибок будут корректными, чтобы исключить ситуации, при которых рассматриваемый участок является частью другого пакета ошибок. Более подробный вывод можно найти в работе [23].

3.2. Вероятность ошибочного декодирования. В общем случае кодовое слово сверточного кода имеет неограниченную длину, но на практике мы имеем дело с конечным объемом данных, поэтому используются усеченные сверточные коды. Мы будем использовать сверточные коды “с нулевым хвостом” (нулевым терминованием), но иногда используются также и циклически усеченные сверточные коды. В канале передаются блоки фиксированной длины, состоящие из кортежей усеченного сверточного кода, которые соответствуют конечному пути по решетке для сверточного кода, причем начальное и конечное состояния решетки нулевые. Так как переход кодера из любого состояния в нулевое гарантированно может произойти за m тактов (при последовательном записывании в память кодера нули), где m – память кода, то терминование кода приводит к небольшому уменьшению скорости. Таким образом, мы передаем на m информационных битов меньше, что обычно мало по сравнению с длиной блока $L \gg m$.

Будем оценивать вероятность ошибочного декодирования блока длины L с помощью средней доли блоков, пораженных хотя бы одним пакетом ошибок. Нижнюю оценку вероятности ошибочного декодирования мы получим как среднюю долю блоков, в которых появился наиболее вероятный пакет ошибок. Наиболее вероятный пакет ошибок обладает минимальным возможным весом $w_{\min} = \min_j a_j$. Вероятность ошибочного декодирования блока обозначается через FER (Frame Error Rate). Для вероятности появления наиболее вероятного пакета ошибок мы будем использовать нижнюю оценку (3) для $P_{\text{low}}(j, p)$. Чтобы получить более точную нижнюю оценку, мы умножаем вероятность появления в отдельно взятом кортеже наиболее вероятного пакета ошибок на количество таких различных пакетов $N_{w_{\min}}$, и умножив на длину блока L “в терминах количества кортежей”, получим нижнюю оценку вероятности ошибочного декодирования:

$$\text{FER}_{\text{low}}(p) = LN_{w_{\min}} P_{\text{low}}(j = j_{w_{\min}}, p), \quad (5)$$

где $j_{w_{\min}}$ – длина пакета ошибок с минимальным весом, $\{w_{\min}, N_{w_{\min}}\} \in \mathcal{D}_a$.

Верхнюю оценку мы выводим как аддитивную границу, суммируя средние доли блоков с различными ошибками по всем возможным длинам пакетов ошибок. Для вероятности появления пакета будем использовать верхнюю оценку (4) для $P_{\text{up}}(j, p)$. Так как в нее уже входит количество пакетов, то нет необходимости в дополнительном множителе. Таким образом, получаем верхнюю оценку вероятности ошибочного декодирования:

$$\text{FER}_{\text{up}}(p) = \min \left\{ 1, \sum_{\ell=m+1}^L LP_{\text{up}}(j = \ell, p) \right\}, \quad (6)$$

где m – память кода.

Верхняя оценка может быть несколько уточнена, но так как вероятность блока, содержащего два и более пакетов ошибок, меньше на несколько порядков (так как

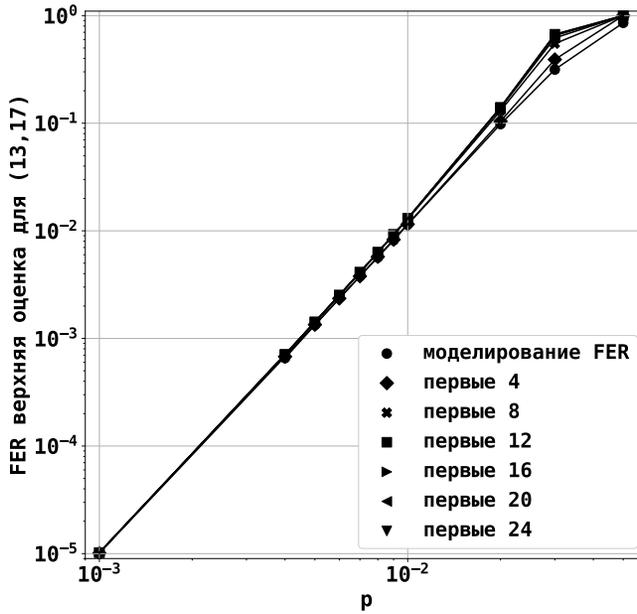


Рис. 2. Зависимость между длиной пакета j и верхней оценкой вероятности ошибочного декодирования для сверточного кода (13, 17) с рекурсивным систематическим кодером и памятью $m = 3$

перемножаются вероятности пакетов ошибок по отдельности), то для упрощения выражения мы учитываем такие блоки несколько раз в нашей аддитивной оценке. Сумма в формуле (6) берется по всем возможным длинам пакетов ошибок в блоке, но для практического использования достаточно взять сумму только по самым коротким пакетам ошибок, что видно из рис. 2. Даже при рассмотрении небольшого числа самых коротких пакетов оценка $FER_{up}(p)$ лежит выше значений вероятности ошибочного декодирования, полученных моделированием. Для малых p рассмотрение большего числа различных длин пакетов ошибок практически не влияет на точность оценки.

3.3. Вероятность ошибки на бит. Выходная вероятность ошибки на бит для сверточного кода – это доля битов с ошибками в декодированном слове. Некорректные биты появляются только в местах пакетов ошибок.

Мы будем оценивать вероятность ошибки на бит в декодированном слове как среднюю долю битов с ошибками. Вероятность ошибочного декодирования бита обозначается через BER (Bit Error Rate). Мы выводим нижнюю оценку вероятности ошибки на бит как долю ошибочных битов в предположении появления наиболее вероятных пакетов ошибок. Тогда нижняя оценка – это вес наиболее вероятного пакета ошибок, умноженный на вероятность его появления в каком-либо бите. Для уточнения нижней границы мы используем в качестве вероятности появления пакета ошибок с минимальным весом $w_{min} = \min_j a_j$ – нижнюю оценку вероятности появления одного такого пакета в кортеже (3), умноженную на количество таких пакетов (они равновероятные) и нормированную по числу битов в кортеже. Таким образом, предложенная нижняя оценка вероятности ошибки на бит имеет вид

$$BER_{low}(p) = \frac{w_{min} N_{w_{min}}}{2} P_{low}(j = j_{w_{min}}, p), \quad (7)$$

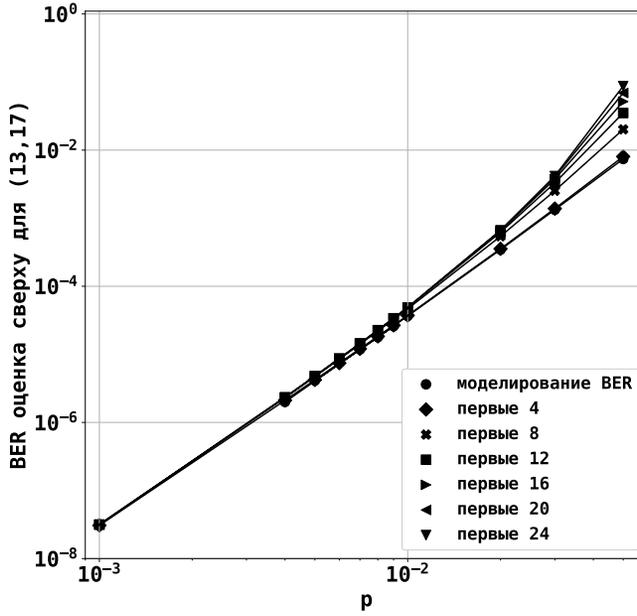


Рис. 3. Зависимость между длиной пакета j и верхней оценкой вероятности ошибки на бит для сверточного кода (13,17) с рекурсивным систематическим кодером и памятью $m = 3$

здесь $N_{w_{\min}}$ – число пакетов ошибок с минимальным весом, $j_{w_{\min}}$ – длина пакета ошибок с минимальным весом, $\{w_{\min}, N_{w_{\min}}\} \in \mathcal{D}_a$, а знаменатель $n = 2$ – число битов в кортеже.

Верхнюю оценку вероятности ошибки на бит мы строим как аддитивную оценку с помощью средних долей ошибочных битов по всем длинам пакетов ошибок с наибольшим возможным весом. Верхняя оценка вероятности появления пакета ошибок в кортеже (4) уже учитывает количество таких пакетов, поэтому нет необходимости в дополнительном множителе. Как и для случая BER_{low} , мы нормируем оценку по числу битов в выходном кортеже $n = 2$, чтобы получить вероятность появления пакета в конкретном бите. Тогда верхняя оценка вероятности ошибки на бит:

$$\text{BER}_{\text{up}}(p) = \min \left\{ 1, \sum_j \frac{\max_{w_j \in \mathcal{D}_{a_j}} w_j}{2} P_{\text{up}}(j, p) \right\}. \quad (8)$$

В формуле (8) берется минимум из 1 и оценки, так как оценка аддитивна и может превысить 1. В формуле (8) сумма берется по всем возможным j , в то время как для практических расчетов достаточно взять сумму лишь по самым коротким длинам. Действительно, на рис. 3 видно, что верхняя оценка сходится к одному значению с увеличением предела суммирования j в сумме (8). Более того, даже для небольшого количества рассматриваемых длин пакетов ошибок оценка лежит выше реальных значений вероятности ошибки на бит. Для малых вероятностей ошибки на бит p ($p \leq 0,01$) оказывается достаточным взять всего несколько наиболее коротких пакетов ошибок, что еще более снижает сложность вычисления оценки.

3.4. Сложность вычисления теоретических оценок. Для расчета предложенных теоретических оценок необходимо вычислить активные расстояния и их спектр для

сверточного кода. Отметим, что для сверточного кода необходимо вычислить метрические характеристики всего один раз.

Расчет активных расстояний a_j для длины j основан на алгоритме Витерби и происходит следующим способом:

1. В начальный момент времени $t = 0$ инициализируем один путь в нулевом состоянии решетки длины 0.
2. В момент времени $t > 0$ продолжаем все сохраненные пути в решетке из узлов в момент времени $t - 1$ в узлы в момент времени t . Каждый путь может быть продолжен 2^k , $k = 1$, способами, не считая путей в нулевом состоянии на решетке. Из нулевого состояния решетки продолжаем путь только в ненулевое состояние решетки. Считаем вес полученных путей, всего $2^{m+k} - 1$, $k = 1$, путей (при $t > m$, где m – память кода).
3. Для каждого состояния в решетке в момент времени t сохраняем только путь с наименьшим весом, оставляя 2^m путей (при $t \geq m$).
4. Если $t = j$, то возвращаем вес пути, который сохранен для нулевого состояния в момент времени $t = j$. Если $t < j$, переходим к шагу 2.

Удобно представлять процесс вычисления активных расстояний как движение по решетке вправо. Так как необходимо найти ненулевой путь в решетке длины j с минимальным весом, то достаточно для каждого узла решетки в каждый момент времени хранить только “лучший” путь, т.е. путь минимального веса, входящий слева в этот узел. Сложность такого алгоритма зависит от длины ненулевого пути j и от количества состояний 2^m , где m – память кода. Из алгоритма подсчета следует, что сложность вычисления активных расстояний a_j составляет $\mathcal{O}(j(2^{m+1} - 1))$. Отметим, что вычисляя активные расстояния для длины j , мы при этом можем вычислить еще активные расстояния для всех длин, меньших j .

Расчет спектра активных расстояний имеет большую алгоритмическую сложность, которая экспоненциально растет с ростом длины ненулевого пути j , для которой необходимо посчитать спектр. Спектр также вычисляется с помощью решетки, только теперь мы не отбрасываем пути с большим весом, а храним все возможные пути в решетке. При продолжении путей путь из нулевого состояния также не продолжается в нулевое состояние. Вычислительную сложность алгоритма можно записать как $\mathcal{O}(2^j(2^{m+1} - 1))$, где m – память кода. Из формулы видно, что вычисление спектра активных расстояний для больших расстояний трудоемко и быстро растет с увеличением длины j .

Теперь оценим сложность вычисления предложенных оценок вероятности ошибки для сверточных кодов, если метрические характеристики кода (активные расстояния или спектр активных расстояний) уже известны. Сложность вычисления нижней $P_{\text{low}}(j, p)$ (3) и верхней $P_{\text{up}}(j, p)$ (4) оценок вероятности появления пакета ошибок длины j оценим как максимальное количество вычислений $P(e_{\text{all}}, e_1, j, w, p)$:

$$\mathcal{O}\left(\left(2j - \frac{a_j}{2}\right) \frac{a_j}{2}\right) \quad \text{и} \quad \mathcal{O}\left(\left(2j - \frac{w_{\min}}{2}\right) \frac{w_{\max}}{2} (w_{\max} - w_{\min})\right), \quad \{w_{\min}, w_{\max}\} \in \mathcal{D}_{a_j}.$$

Сложность вычисления нижних оценок (5) и (7) для $\text{FER}_{\text{low}}(p)$ и $\text{BER}_{\text{low}}(p)$ не отличаются от сложности расчета $P_{\text{low}}(j = j_{w_{\min}}, p)$, где $j_{w_{\min}}$ – длина пакета ошибок с минимальным весом. Сложность вычисления верхних оценок (6) и (8) для $\text{FER}_{\text{up}}(p)$ и $\text{BER}_{\text{up}}(p)$ совпадает со сложностью вычисления верхней оценки появления пакета ошибок $P_{\text{up}}(j, p)$, умноженной на количество рассмотренных наименьших различных возможных весов пакетов ошибок. На практике достаточно рассмотреть порядка 5–8 весов, как видно из рис. 3. Таким образом, хотя сложность расчета теоретических оценок зависит от вероятности ошибки на бит p , но для практически значимых значений p , для получения достаточно точных значений величин вероятности ошибки

на бит, достаточно ограничиться небольшим числом слагаемых. Кроме того, следует отметить, что сложность расчета теоретических оценок линейна по j .

3.5. Экспериментальные результаты. Представим экспериментальные результаты и их сравнение с теоретическими оценками. В экспериментах рассматривался двоичный симметричный канал с вероятностью ошибки на бит p . По каналу передавались кодовые слова усеченного сверточного кода с рекурсивным систематическим кодером скорости $1/2$ длины 1000 коротежей (2000 бит). Рассматривались различные сверточные коды с различной памятью.

Приведем результаты для вероятности появления пакета ошибок. Графики на рис. 4 приведены для трех различных вероятностей ошибки на бит p : 0,03, 0,008 и 0,004. Для вероятности $p = 0,004$ приведено существенно меньше точек, полученных с помощью моделирования, так как для получения экспериментальных оценок время, требуемое на моделирование, резко возрастает.

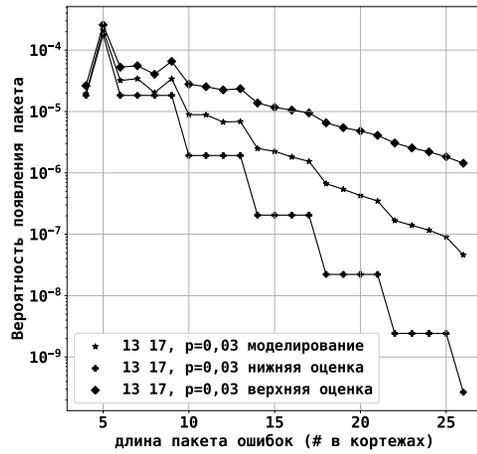
Из рис. 4 видно, что ближе всего теоретические оценки лежат к результатам моделирования при малых длинах пакетов, для которых существует всего одно или несколько слов, в которые они могут перейти. С увеличением длины пакета резко увеличивается число возможных слов, в которые может перейти слово при декодировании, что наглядно иллюстрируется таблицами 1 и 2 спектра активных расстояний. Отметим также, что пакеты ошибок небольшой длины имеют наибольшую вероятность и, соответственно, имеют наибольший вклад в вероятность ошибочного декодирования блока и в вероятность ошибки на бит. По графикам на рис. 4 также можем отметить, что с уменьшением вероятности ошибки на бит p оценки сходятся, что объясняется экспоненциальным уменьшением вероятностей длинных пакетов ошибок. Таким образом, для небольших p предложенные в статье оценки становятся достаточно точными даже для больших длин пакетов ошибок.

Принято считать, что распределение пакетов ошибок можно приблизить с помощью геометрического распределения [26, 27]. Это справедливо только для наименее вероятных ошибок, т.е. геометрическое распределение хорошо приближает вероятности появления длинных пакетов ошибок и плохо приближает наиболее вероятные пакеты с наименьшей длиной.

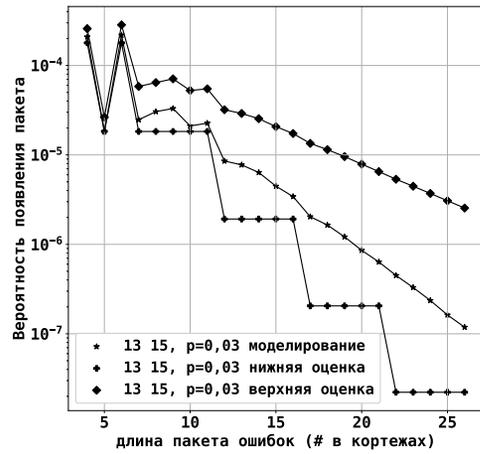
На рис. 5, 6 представлены вероятности ошибочного декодирования (FER) и выходные вероятности ошибки на бит (BER) для двух сверточных кодов (13, 17) и (13, 15) с памятью $m = 3$. Мы также привели на рис. 7 BER для кода (117, 155) с памятью $m = 6$, чтобы показать, что наши оценки применимы и для кодов с большей памятью. Для сравнения также приведены классические аддитивные верхние оценки FER и BER из работ [14, 15], вычисленные с помощью производящей функции спектра кода и функции спектра ошибки на бит соответственно.

Оценки вероятности ошибочного декодирования были также представлены в работе [23]. Эти результаты можно сравнить с результатами из работы [20] для кода (13, 17), и очевидно, что результаты практически совпадают. Но метод из работы [20] вычислительно трудоемкий, особенно с увеличением памяти кодера. Более того, в работе говорится о том, что предложенный метод не применим к кодам с памятью больше 4.

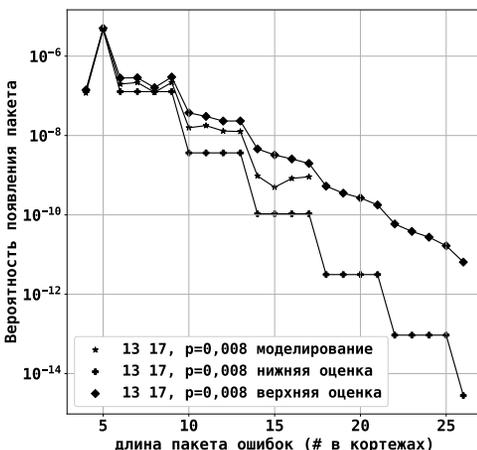
Предложенный в данной статье подход, основанный на активных расстояниях сверточного кода и их спектре, позволяет вычислить оценки для кодов большей памяти, не требуя особых вычислительных ресурсов. Для вычисления точных оценок не требуется рассматривать пакеты ошибок большой длины, достаточно рассмотреть несколько пакетов с наименьшими весами. Программы для вычисления активных расстояний и их спектра могут быть найдены на портале GitHub [28]. Здесь мы также приводим пример выходной вероятности ошибки на бит для сверточного кода (117, 155) с памятью $m = 6$ на рис. 7, где для сравнения также приведены верхние оценки BER из работ [14, 15].



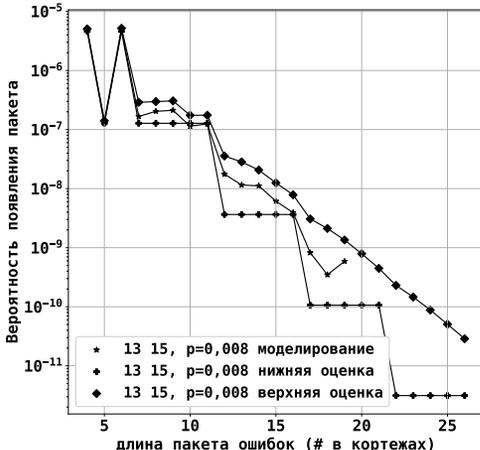
a)



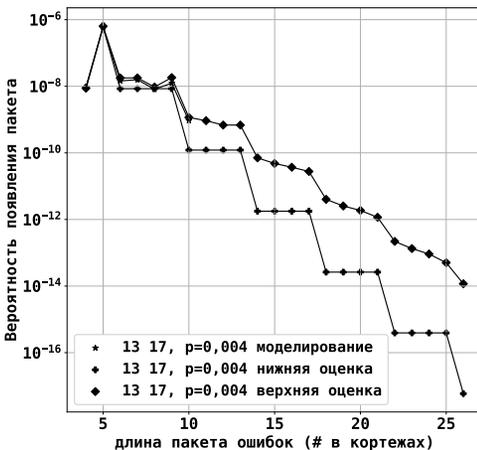
b)



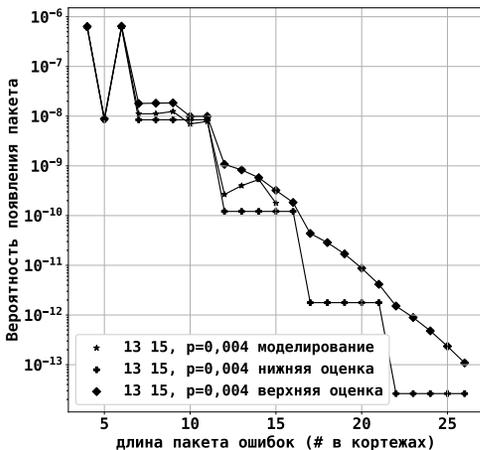
c)



d)



e)



f)

Рис. 4. Вероятностное распределение появления пакетов ошибок для сверточного кода с рекурсивным систематическим кодированием и памятью $m = 3$: а) (13, 17), $p = 0,03$, б) (13, 15), $p = 0,03$, в) (13, 17), $p = 0,008$, д) (13, 15), $p = 0,008$, е) (13, 17), $p = 0,004$, ф) (13, 15), $p = 0,004$

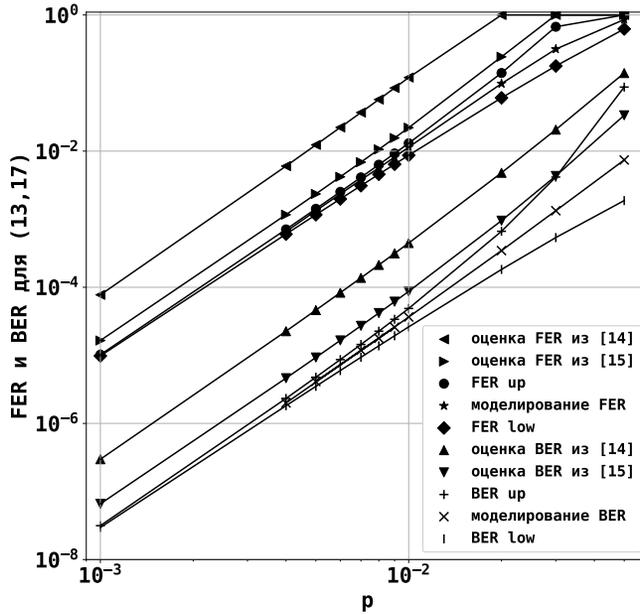


Рис. 5. Вероятности ошибочного декодирования и ошибки на бит для сверточного кода (13, 17) с рекурсивным систематическим кодером и памятью $m = 3$

Из рис. 5–7 видно, что верхняя и нижняя оценки приближаются друг к другу при небольших вероятностях ошибки p . Таким образом, для этих вероятностей теоретические оценки достаточно точны, и нет необходимости использовать метод Монте-Карло для получения экспериментальных значений, что на практике может быть достаточно трудоемко для малых значений p . Мы также сравнили наши верхние оценки для вероятности ошибки на бит и для вероятности ошибочного декодирования с классическими верхними оценками из [14, 15], полученными с помощью производящих функций.

3.6. Сравнение с другими границами. Оценки вероятности ошибочного декодирования были также представлены в работе [23]. Эти результаты можно сравнить с результатами из работы [20] для кода (13, 17), и очевидно, что результаты практически совпадают. Но метод из работы [20] вычислительно трудоемкий, особенно с увеличением памяти кодера. Более того, в работе говорится о том, что предложенный метод не применим к кодам с памятью больше 4, тогда как мы показали, что расчет наших оценок возможен и для кодов с большей памятью.

Предложенный в нашей статье подход, основанный на активных расстояниях сверточного кода и их спектре, позволяет вычислить оценки для кодов большей памяти, не требуя особых вычислительных ресурсов. Для вычисления точных оценок не требуется рассматривать пакеты ошибок большой длины, достаточно рассмотреть несколько пакетов с наименьшими весами. Программы для вычисления активных расстояний и их спектра могут быть найдены на портале GitHub [28].

На рис. 5–7 приведено сравнение предложенных нами оценок с классическими границами из работ [14, 15]. Из результатов видно, что предложенная в нашей статье аддитивная верхняя оценка лежит ближе либо сравнима с классическими. Оценка из работы [15] лежит ближе к экспериментальным данным и к нашей границе, чем оценка из работы [14], что можно объяснить более точной оценкой сверху с помощью границы Миберга для вероятности ошибки в двоичном симметричном канале.

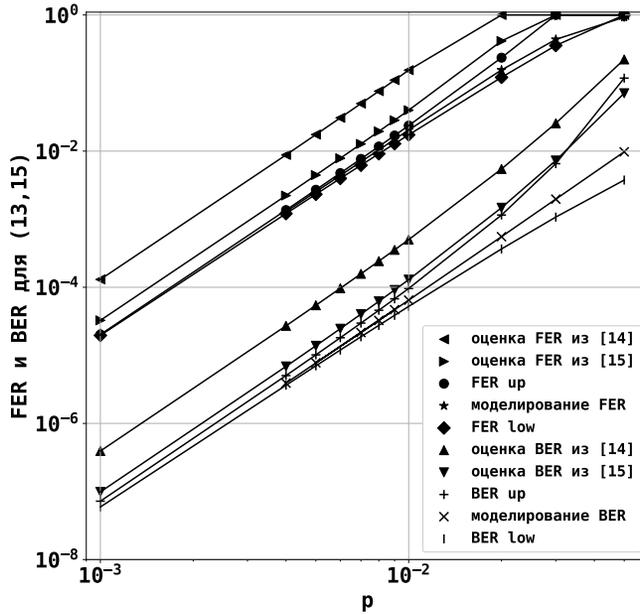


Рис. 6. Вероятности ошибочного декодирования и ошибки на бит для сверточного кода (13, 15) с рекурсивным систематическим кодером и памятью $m = 3$

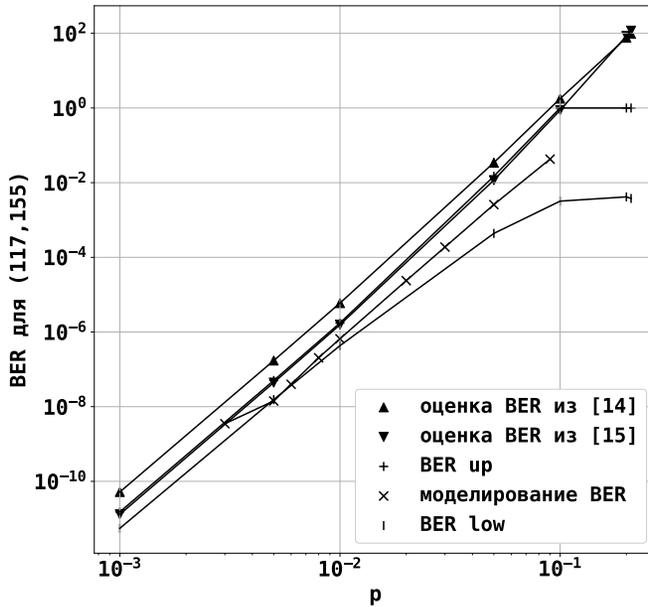


Рис. 7. Вероятность ошибки на бит для сверточного кода (117, 155) с рекурсивным систематическим кодером и памятью $m = 6$

Используемые нами оценки для вероятности появления пакета ошибок и активные расстояния позволяют вычислить оценки для FER и BER более точно. Отдельно отметим, что мы также предлагаем оценку снизу, что не было ранее предложено

в работах, и оценка снизу оказывается очень близка к экспериментальным результатам.

§ 4. Заключение

В статье получены наиболее важные теоретические оценки эффективности сверточного кода в двоичном симметричном канале. А именно, получены верхние и нижние оценки вероятности появления пакета ошибок, ошибочного декодирования и вероятности ошибки на бит. Предложенные оценки основаны на активных расстояниях и спектре активных расстояний и справедливы для сверточных кодов скорости $1/2$ с декодированием Витерби. Полученные результаты могут быть обобщены для сверточных кодов скорости $1/n$. Проведен анализ сложности вычисления метрических характеристик и теоретических оценок. Показано, что для заданной длины сложность вычисления активных расстояний экспоненциально зависит от памяти кода и линейно от длины, в то время как сложность вычисления спектра активных расстояний экспоненциально зависит и от памяти кода, и от длины. Сложность вычисления теоретических оценок при известных метрических характеристиках линейно зависит от длины наиболее коротких пакетов ошибок и не зависит от входной вероятности ошибки на бит в канале. Также рассмотрены различные коды с разной памятью, и для них представлено сравнение теоретических и экспериментальных результатов. Предложенные оценки наиболее точны при небольших входных вероятностях ошибки на бит.

В дальнейшем с помощью активных расстояний и его спектра могут быть выведены оценки эффективности сверточных кодов также и для канала с гауссовским шумом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Elias P.* Coding for Noisy Channels // IRE Conv. Rec. 1955. V. 4. P. 37–46. Reprinted in: Key Papers in the Development of Information Theory. New York: IEEE Press, 1974. P. 102–111.
2. *Yang C., Zhan M., Deng Y., Wang M., Luo X.H., Zeng J.* Error-Correcting Performance Comparison for Polar Codes, LDPC Codes and Convolutional Codes in High-Performance Wireless // Proc. 6th Int. Conf. on Information, Cybernetics, and Computational Social Systems (ICCSS'2019). Chongqing, China. Sept. 27–30, 2019. P. 258–262. <https://doi.org/10.1109/ICCSS48103.2019.9115442>
3. *Deng Y., Zhan M., Wang M., Yang C., Luo X., Zeng J., Guo J.* Comparing Decoding Performance of LDPC Codes and Convolutional Codes for Short Packet Transmission // Proc. IEEE 17th Int. Conf. on Industrial Informatics (INDIN'2019). Helsinki, Finland. July 22–25, 2019. V. 1. P. 1751–1755. <https://doi.org/10.1109/INDIN41052.2019.8972062>
4. *Tahir B., Schwarz S., Rupp M.* BER Comparison between Convolutional, Turbo, LDPC, and Polar Codes // Proc. 24th Int. Conf. on Telecommunications (ICT'2017). Limassol, Cyprus. May 3–5, 2017. P. 1–7. <https://doi.org/10.1109/ICT.2017.7998249>
5. *Rurik W., Mazumdar A.* Hamming Codes as Error-Reducing Codes // Proc. 2016 IEEE Information Theory Workshop (ITW'2006). Cambridge, UK. Sept. 11–14, 2016. P. 404–408. <https://doi.org/10.1109/ITW.2016.7606865>
6. *Liu K., García-Frías J.* Error Floor Analysis in LDGM Codes // Proc. 2010 IEEE Int. Symp. on Information Theory (ISIT'2010). Austin, TX, USA. June 13–18, 2010. P. 734–738. <https://doi.org/10.1109/ISIT.2010.5513607>
7. *Gao W., Polyanskiy Y.* On the Bit Error Rate of Repeated Error-Correcting Codes // Proc. 48th Annu. Conf. on Information Sciences and Systems (CISS'2014). Princeton, NJ, USA. Mar. 19–21, 2014. P. 1–6. <https://doi.org/10.1109/CISS.2014.6814087>
8. *Höst S., Johannesson R., Zyablov V.V.* Woven Convolutional Codes. I. Encoder Properties // IEEE Trans. Inform. Theory. 2002. V. 48. № 1. P. 149–161. <https://doi.org/10.1109/18.971745>

9. *Freudenberger J., Bossert M., Shavgulidze S., Zyablov V.* Woven Turbo Codes // Proc. 7th Int. Workshop on Algebraic and Combinatorial Coding Theory (ACCT'2000). Bansko, Bulgaria. June 18–24, 2000. P. 145–150. Available at <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.23.345&rep=rep1&type=pdf>
10. *Benedetto S., Montorsi G.* Design of Parallel Concatenated Convolutional Codes // IEEE Trans. Commun. 1996. V. 44. № 5. P. 591–600. <https://doi.org/10.1109/26.494303>
11. *Berrou C., Glavieux A., Thitimajshima P.* Near Shannon Limit Error-Correcting Coding and Decoding: Turbo-Codes. 1 // Proc. IEEE Int. Conf. on Communications (ICC'93). Geneva, Switzerland. May 23–26, 1993. V. 2. P. 1064–1070. <https://doi.org/10.1109/ICC.1993.397441>
12. *Douillard C., Berrou C.* Turbo Codes with Rate- $m/(m + 1)$ Constituent Convolutional Codes // IEEE Trans. Commun. 2005. V. 53. № 10. P. 1630–1638. <https://doi.org/10.1109/TCOMM.2005.857165>
13. *Zhang Q., Liu A., Zhang Y., Liang X.* Practical Design and Decoding of Parallel Concatenated Structure for Systematic Polar Codes // IEEE Trans. Commun. 2016. V. 64. № 2. P. 456–466. <https://doi.org/10.1109/TCOMM.2015.2502246>
14. *Viterbi A.J.* Convolutional Codes and Their Performance in Communication Systems // IEEE Trans. Commun. Technol. 1971. V. 19. № 5. P. 751–772. <https://doi.org/10.1109/TCOM.1971.1090700>
15. *van De Meeberg L.* A Tightened Upper Bound on the Error Probability of Binary Convolutional Codes with Viterbi Decoding // IEEE Trans. Inform. Theory. 1974. V. 20. № 3. P. 389–391. <https://doi.org/10.1109/TIT.1974.1055216>
16. *Herro M., Hu L., Nowack J.* Bit Error Probability Calculations for Convolutional Codes with Short Constraint Lengths on Very Noisy Channels // IEEE Trans. Commun. 1988. V. 36. № 7. P. 885–888. <https://doi.org/10.1109/26.2819>
17. *Chiaraluce F., Gambi E., Mazzone M., Pierleoni P.* A Technique to Evaluate an Exact Formula for the Bit Error Rate of Convolutional Codes in Case of Finite Length Words // Proc. IEEE Region 10 Annu. Conf. on Speech and Image Technologies for Computing and Telecommunications (IEEE TENCON'97). Queensland Univ. of Technology, Brisbane, Australia. Dec. 2–4, 1997. V. 1. P. 113–116. <https://doi.org/10.1109/TENCON.1997.647271>
18. *Forney G.* The Viterbi Algorithm // Proc. IEEE. 1973. V. 61. № 3. P. 268–278. <https://doi.org/10.1109/PROC.1973.9030>
19. *Yoshikawa H.* Theoretical Analysis of Bit Error Probability for Punctured Convolutional Codes // Proc. 2012 IEEE Int. Sympos. on Information Theory and Its Applications (ISITA'2012). Honolulu, HI, USA. Oct. 28–31, 2012. P. 658–661.
20. *Bocharova I.E., Hug F., Johannesson R., Kudryashov B.D.* A Closed-Form Expression for the Exact Bit Error Probability for Viterbi Decoding of Convolutional Codes // IEEE Trans. Inform. Theory. 2012. V. 58. № 7. P. 4635–4644. <https://doi.org/10.1109/TIT.2012.2193375>
21. *Smeshko A., Ivanov F., Zyablov V.* Theoretical Estimates of Burst Error Probability for Convolutional Codes // Proc. 2020 Int. Symp. on Information Theory and Its Applications (ISITA'2020). Kapolei, HI, USA. Oct. 24–27, 2020. P. 136–140.
22. *Smeshko A., Ivanov F., Zyablov V.* The Influence of Active Distances on the Distribution of Bursts // Proc. XVI Int. Symp. “Problems of Redundancy in Information and Control Systems” (REDUNDANCY'2019). Moscow, Russia. Oct. 21–25, 2019. P. 110–114. <https://doi.org/10.1109/REDUNDANCY48165.2019.9003349>
23. *Smeshko A., Ivanov F., Zyablov V.* Upper and Lower Estimates of Frame Error Rate for Convolutional Codes // Proc. 2020 Int. Symp. on Information Theory and Its Applications (ISITA'2020). Kapolei, HI, USA. Oct. 24–27, 2020. P. 160–164.
24. *Кудряшов Б.Д.* Основы теории кодирования. СПб.: БХВ-Петербург, 2016.
25. *Höst S., Johannesson R., Zigangirov K., Zyablov V.* Active Distances for Convolutional Codes // IEEE Trans. Inform. Theory. 1999. V. 45. № 2. P. 658–669. <https://doi.org/10.1109/18.749009>
26. *Miller R.L., Deutsch L.J., Butman S.A.* On the Error Statistics of Viterbi Decoding and the Performance of Concatenated Codes // NASA STI/Recon Tech. Rep. N 81-33364. Sept. 1, 1981. Available at https://archive.org/details/nasa_techdoc_19810024821

27. *Justesen J., Andersen J.* Critical Lengths of Error Events in Convolutional Codes // IEEE Trans. Inform. Theory. 1998. V. 44. № 4. P. 1608–1611. <https://doi.org/10.1109/18.681339>
28. <https://github.com/smeshk/Active-distances-their-spectrum-and-estimates-for-convolutional-code> [GitHub online repository]. 2021.

Курмукова Анастасия Андреевна
Институт проблем передачи информации
им. А.А. Харкевича РАН
Национальный исследовательский университет
“Высшая школа экономики”
Сколковский институт науки и технологий
Anastasiia.Kurmukova@skoltech.ru
Иванов Федор Ильич
Институт проблем передачи информации
им. А.А. Харкевича РАН
Национальный исследовательский университет
“Высшая школа экономики”
fivanov@hse.ru
Зяблов Виктор Васильевич
Институт проблем передачи информации
им. А.А. Харкевича РАН
zyablov@iitp.ru

Поступила в редакцию
12.12.2021
После доработки
08.03.2022
Принята к публикации
11.03.2022