ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

Том 58 2022 Вып. 2

УДК 621.391 : 517.938 : 519.722

© 2022 г. **Г.Д. Дворкин**

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ЭНТРОПИИ ДЛЯ СИСТЕМ ДИКА

Рассматривается связь метрической энтропии с локальной скоростью деформации границ (ЛСДГ) в символическом случае. Показывается равенство ЛСДГ как предела в среднем и энтропии для широкого класса мер на системах Дика.

Ключевые слова: метрическая энтропия, локальная скорость деформации границ, символическая система, несинхронизованная система, инвариантная эргодическая мера, правильная скобочная последовательность, система Дика.

DOI: 10.31857/S0555292322020041, **EDN:** DZCGLF

§ 1. Введение

Будем рассматривать энтропию Колмогорова – Синая как предел некоторой величины (скорости деформации границ), имеющей простой геометрический смысл. Такое представление энтропии будем называть геометрической интерпретацией.

Этот подход был предложен физиком Г.М. Заславским [1], который в 1984 г. выдвинул гипотезу (точнее, сформулировал утверждение), что объем границы множества в фазовом пространстве растет экспоненциально по времени с показателем, равным метрической энтропии. Первый математический результат в этом направлении был получен Б.М. Гуревичем [2] для символических марковских систем и совместно с С.А. Комечем [3,4] обобщен на существенно более широкий класс символических систем, а также на некоторые гладкие (системы Аносова). В настоящей статье показывается возможность геометрической интерпретации энтропии для важного класса несинхронизованных систем, называемого системами (сдвигами) Дика.

Статья является продолжением работы автора [5], в которой рассматривалась геометрическая интерпретация энтропии для систем Дика, но лишь в контексте одной конкретной меры. Здесь же показывается возможность такого подхода для широкого класса мер на сдвигах Дика. Вместе с тем, результаты из [5] и настоящей статьи независимы (см. замечание 2).

§ 2. Определения и обозначения

Пусть A – конечное множество, и пусть $A^{\mathbb{Z}}$ – пространство бесконечных двусторонних последовательностей символов из A.

Множество A будем называть алфавитом, а любую конечную последовательность символов (букв) из A – (конечным) словом этого алфавита. Количество букв в слове w называют его длиной и обозначают $|w|$. Слово нулевой длины называют пустым.

Элементы $A^{\mathbb{Z}}$ будем называть бесконечными словами, при этом в данной терминологии бесконечные слова словами не являются.

О п р е д е л е н и е 1. Назовем *полным сдвигом* пару $(A^{\mathbb{Z}}, T)$, где A – конечное множество, а T – сдвиг на шаг вправо в пространстве последовательностей $A^{\mathbb{Z}}$.

Для $x \in A^{\mathbb{Z}}$ и целых a и b, таких что $a \leqslant b$, обозначим слово $(x(a), x(a+1), \ldots, x(b))$ через $x_{[a;b]}$. Если слово w равно $x_{[a;b]}$ для некоторых a и b, то будем говорить, что w является *подсловом* бесконечного слова x (аналогично определяется подслово конечного слова). Вместо $x_{[a;a]}$ будем писать $x_{[a]}$.

Введем метрику d на $A^{\mathbb{Z}}$: примем $d(x,x) = 0$, а для несовпадающих точек x и y положим $d(x,y) = (1/2)^m$, где $m = m(x,y)$ – целое неотрицательное число, равное нулю, если $x_{[0]} \neq y_{[0]}$, и удовлетворяющее условиям $x_{[-(m-1);m-1]} = y_{[-(m-1);m-1]}$, $x_{[-m;m]} \neq y_{[-m;m]}$ в противном случае. Эта метрика порождает топологию, которая далее считается фиксированной.

Определение 2. Будем называть *символической системой* пару (X,T), где X – замкнутое T-инвариантное подмножество $A^{\mathbb{Z}}$ с индуцированной топологией, а также первый элемент этой пары, считая сдвиг и топологию заданными по умолчанию.

Пусть далее в этом параграфе X – символическая система.

Множество всех подслов всех $x \in X$ называется *языком* символической системы X и обозначается $W(X)$; кроме того, обозначим через $W_n(X)$ множество всех слов из языка длины n. *Префикс* слова – любое его подслово, начинающееся с начала этого слова. *Суффикс* слова – любое его подслово, заканчивающееся в конце этого слова.

Определение 3. Множество

$$\{w\}_c^X := \bigl\{x \in X : x_{[c;c+|w|-1]} = w\bigr\}$$

называется *цилиндром* в X с *основанием* $w \in W(X)$. Всюду далее

$$\{w\}_c := \{w\}_c^X, \quad \bigl\{x_{[a;b]}\bigr\} := \bigl\{x_{[a;b]}\bigr\}_a.$$

Рассмотрим T-инвариантную борелевскую вероятностную меру μ на X. Под мерой $\mu(w)$ слова $w \in W(X)$ понимаем меру цилиндра $\{w\}_0$ (из T-инвариантности меры очевидно, что $\mu(\{w\}_a) = \mu(\{w\}_0)$ для любого целого a).

Введем следующие обозначения:

$k(\varepsilon) := \max\{\ell \in \mathbb{Z} : (1/2)^{(\ell+1)} \leqslant \varepsilon\}$ (часто будем писать просто k);

$O_\varepsilon(x)$ – открытая ε-окрестность точки x в рассматриваемом пространстве;

$O_\varepsilon(C)$ – открытая ε-окрестность множества C в рассматриваемом пространстве.

Определение 4. *Метрическая энтропия* (энтропия Колмогорова–Синая) символической динамической системы (X,T) с инвариантной мерой μ может быть определена как средняя условная энтропия настоящего при условии прошлого (общее определение для произвольной динамической системы см. в [6, 7]):

$$h_\mu(X,T) = \lim_{n\to\infty} H_\mu(x_0 \,|\, x_{-1}, x_{-2}, \ldots, x_{-n}).$$

Определение 5. Для $x \in X$ определим *локальную скорость деформации границ* (ЛСДГ):

$$P_{X,T,\mu}(x) := \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{n(\varepsilon)} \log\left(\frac{\mu\bigl(O_\varepsilon\bigl(T^{n(\varepsilon)}(O_\varepsilon(x))\bigr)\bigr)}{\mu(O_\varepsilon(x))}\right),$$

где $n(\varepsilon)$ – положительная целочисленная функция со свойствами

$$n(\varepsilon) \to \infty \quad \text{и} \quad n(\varepsilon) = o(|\log(\varepsilon)|) = o(k(\varepsilon)) \quad \text{при } \varepsilon \to 0$$

(часто будем писать просто n). Такие функции n будем называть *медленными*. Допредельное выражение будем обозначать через $P^\varepsilon_{X,T,\mu}(x)$ и называть *ε-ЛСДГ*.

Определение 6. Символическая система X *синхронизована*, если она транзитивна и существует $w \in W(X)$, такое что для любых $u, v \in W(X)$, если $uw, wv \in W(X)$, то и $uwv \in W(X)$. Такое слово w называется *волшебным* или *синхронизующим.*

Определение 7. Слово $w \in W(X)$ назовем *n-синхронизующим*, если для любых $u, v \in W_n(X)$ условие $uw \in W(X)$ и $wv \in W(X)$ влечет $uwv \in W(X)$.

Определение 8. *Полная правильная скобочная последовательность* (расстановка) – конечная последовательность скобок, приводящаяся к пустому слову путем сокращения стоящих подряд открывающей и закрывающей скобок одного вида. Например, в случае двух видов скобок сокращать можно только “( )” и “[ ]”. Здесь и далее тип скобки – открывающая или закрывающая, вид – круглая, квадратная и т.д.

Определение 9. *Правильная скобочная последовательность* (расстановка) – конечная последовательность скобок, являющаяся подсловом некоторой полной правильной скобочной расстановки.

Определение 10. *m-язык Дика* – язык, состоящий из правильных скобочных последовательностей скобок m видов.

Определение 11. *Сдвиг Дика* – символическая система, языком которой является язык Дика.

Эта система транзитивна, но несинхронизована (см. [8]).

Далее рассматриваем систему Дика с $m \geqslant 2$ видами скобок.

Будем использовать для i-й открывающей скобки обозначение α_i, а для i-й закрывающей – β_i. Обозначим также множество всех открывающих скобок через α, а закрывающих – через β. Кроме того, при наличии меры $\mu \in M_0$ на системе Дика будем считать, что

$$\mu(\alpha) := \sum_{i=1}^{m} \mu(\alpha_i), \quad \mu(\beta) := \sum_{i=1}^{m} \mu(\beta_i).$$

Понятно, что $\mu(\alpha) + \mu(\beta) = 1$.

Пусть w – слово языка Дика. Скобка, сокращающаяся вместе с данной при описанном выше процессе сокращения, называется *парной* к ней в этом слове. Скобка, для которой нет парной в w, называется *непарной* в w. Положим

- $n_1 = n_1(w)$ – количество открывающих скобок в слове w, для которых в этом слове есть парная закрывающая;
- $n_2 = n_2(w)$ – количество непарных скобок в w.

Очевидно, $|w| = 2n_1 + n_2$.

Приведенным видом слова w будем называть слово, получающееся из w сокращением всех парных скобок. Более подробно, алгоритм получения приведенного вида слова $w = a_1 a_2 \ldots a_n$, где каждое $a_i \in \alpha \cup \beta$, следующий: на первом шаге из w удаляются все пары последовательных скобок a_i, a_{i+1} такие, что $a_i = \alpha_j$ и $a_{i+1} = \beta_j$ для некоторого j. После удаления получается новое слово w_1, для которого повторяется то же действие, и так далее. Процесс завершается, когда после некоторого шага с номером s пар скобок для удаления не остается. Полученное на этом шаге слово w_s и называется приведенным видом слова w.

Из алгоритма ясно, что приведенный вид всегда является конкатенацией слова, состоящего только из закрывающих скобок, и слова, состоящего только из открывающих. Например:)]]]) + [[[[(([или))]]]] + ((((((, где символ + формально обозначает конкатенацию. Также полезно заметить, что приведенный вид слова w является пустым словом тогда и только тогда, когда само слово w – полная правильная скобочная последовательность.

Через $H(w)$ обозначим разность количества открывающих и закрывающих скобок в слове w, т.е.

$$H(w) := \sum_{i=1}^{|w|} \sum_{j=1}^{m} (\delta_{\alpha_j, w_i} - \delta_{\beta_j, w_i}),$$

где $\delta_{x,y}$ – символ Кронекера, т.е. функция, равная 1, если $x = y$, и 0 в противном случае.

Через $H^j(w)$ обозначим такую же разность, но только по j-му виду скобок:

$$H^j(w) := \sum_{i=1}^{|w|} (\delta_{\alpha_j, w_i} - \delta_{\beta_j, w_i}).$$

§ 3. Обзор основных результатов

Пусть $M(X)$ – некоторый подкласс класса борелевских вероятностных инвариантных эргодических мер на символической динамической системе (X, T) (весь этот класс будем обозначать через $M_0(X)$). Во всех случаях, когда из контекста будет ясно, что такое X, будем писать просто M и M_0.

Связь между энтропией и ЛСДГ в разных системах может быть различной и может формально выражаться одним из следующих утверждений.

Точечная гипотеза (ТГ). *$P_{X,T,\mu}(x) = h(\mu, X, T)$ для всех $\mu \in M(X)$, любой медленной функции $n(\varepsilon)$, любого $x \in X$.*

Обобщенная точечная гипотеза (ОТГ). *$P_{X,T,\mu}(x) = h(\mu, X, T)$ для всех $\mu \in M(X)$, любой медленной функции $n(\varepsilon)$, μ-почти любого $x \in X$.*

Основная гипотеза (ОГ). *$P_{X,T,\mu}(x) = h(\mu, X, T)$ для всех $\mu \in M(X)$, любой медленной функции $n(\varepsilon)$, где выражение в левой части понимается как предел в $L_1(X, \mu)$.*

ТГ очевидным образом влечет ОТГ и ОГ, при этом ОТГ и ОГ, вообще говоря, друг из друга не вытекают и не влекут ТГ.

Точечная и обобщенная точечная гипотезы верны для многих важных систем (ТГ, например, выполняется для автоморфизмов тора с мерой Лебега, а утверждения, близкие к ОТГ, верны для существенно более общих диффеоморфизмов Аносова с мерой Синая – Рюэлля – Боуэна; подробнее см. в [4]), но, как показано в [5], неверны даже для класса бернуллиевских мер на полном сдвиге (контрпримером может служить любая несимметричная бернуллиевская мера при достаточно медленном росте функции $n(\varepsilon)$).

Основная гипотеза, в отличие от двух других, подтверждается для многих символических систем. Наиболее сильный результат в этом направлении получен в [5]:

Теорема 1. *Пусть символическая динамическая система (X, T) и борелевская T-инвариантная эргодическая вероятностная мера μ на X удовлетворяют следующему условию: в X имеется синхронизованный подсдвиг L (T-инвариантное замкнутое подмножество) полной меры, обладающий хотя бы одним волшебным словом положительной меры. Тогда для X и μ верна основная гипотеза.*

В [5] также показано, что условия теоремы 1 не являются необходимыми для выполнения основной гипотезы. Это продемонстрировано на примере конкретной меры на сдвиге Дика. При этом возникает общий вопрос о возможности геометрической интерпретации энтропии для произвольной меры $\mu \in M_0$ на системе Дика. Этот вопрос и изучается ниже.

§ 4. Основная теорема для систем Дика

Т е о р е м а 2. *Пусть (X, T, μ) – сдвиг Дика с борелевской вероятностной T-инвариантной эргодической мерой μ, для которой $\mu(\alpha) \neq \mu(\beta)$. Тогда для этой системы верна основная гипотеза.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Здесь, как и в [5], будем пользоваться достаточным условием выполнения основной гипотезы для борелевских вероятностных инвариантных эргодических мер на символических системах (доказано Комечем в [3]), а именно: для справедливости основной гипотезы достаточно, чтобы для $k = k(\varepsilon)$ и для любой медленной функции $n = n(\varepsilon)$ было выполнено

$$\mu(E_\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 1, \tag{1}$$

где

$$E_\varepsilon = \Big\{x \in X :\, O_\varepsilon\big(T^n(O_\varepsilon(x))\big) = \big\{T^n x_{[-k+n;k]}\big\}\Big\}.$$

Зафиксируем $x \in X$ и $\varepsilon > 0$. Заметим несколько важных фактов.

Во-первых, если $x_{[-k;k-n]}$ – n-синхронизующее слово, то $x \in E_\varepsilon$. Действительно,

$$O_\varepsilon(T^n(O_\varepsilon(x))) = \bigcup_u \{uT^n x_{[-k+n;k]}\},$$

где объединение берется по всем словам $u \in W_n(X)$, таким что $ux_{[-k;k-n]}x_{[k-n+1;k]} \in$ $\in W(X)$, но так как слово $x_{[-k;k-n]}$ – n-синхронизующее, то это объединение всех допустимых цилиндров вида $\{uT^n x_{[-k+n;k]}\}$, $u \in W_n(X)$, которое, очевидно, равно $\{T^n x_{[-k+n;k]}\}$.

Во-вторых, любое слово w, приведенный вид которого содержит не менее n скобок хотя бы одного типа (открывающие, закрывающие), является n-синхронизующим. Действительно, если в приведенном виде не менее n открывающих скобок, то все закрывающие скобки в любом слове v из определения n-синхронизованности будут иметь пару в wv. Теперь предположим, что для некоторых u и v из определения $s := uwv$ запрещено. Это означает, что пару в s составили скобки разных видов в том смысле, что после сокращения всех парных скобок по соседству оказались открывающая и закрывающая скобка (именно в таком порядке), вид которых не совпадает. Из разрешенности слов uw и wv следует, что внутри этих слов такая пара образоваться не может, а значит, остается единственная возможность: открывающая скобка лежит в u, а закрывающая – в v, но и такое невозможно, поскольку все закрывающие скобки из v имеют пару в wv – противоречие, которое и показывает, что слово w является n-синхронизующим. Случай, когда в приведенном виде содержится не менее n закрывающих скобок, симметричен.

В-третьих, если $|H(x_{[-k;k-n]})| \geqslant n$, то приведенный вид $x_{[-k;k-n]}$ содержит не меньше n скобок хотя бы одного типа – простое следствие того, что функция H не меняется при парном сокращении скобок.

Из этих трех замечаний заключаем, что $|H(x_{[-k;k-n]})| \geqslant n$ влечет $x \in E_\varepsilon$.

Теперь воспользуемся эргодической теоремой для индикатора множества β. Получим, что для почти каждого $x \in X$

$$\frac{1}{2k-n+1}\sum_{i=-k}^{k-n} I(w_i \in \beta) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \mu(\beta), \tag{2}$$

где $w = x_{[-k;k-n]}$.

Учтем очевидные равенства:

$$\sum_{i=-k}^{k-n} I(w_i \in \alpha) + \sum_{i=-k}^{k-n} I(w_i \in \beta) = 2k - n + 1$$

и

$$\sum_{i=-k}^{k-n} I(w_i \in \alpha) - \sum_{i=-k}^{k-n} I(w_i \in \beta) = H(w),$$

откуда

$$\sum_{i=-k}^{k-n} I(w_i \in \beta) = \frac{1}{2}(2k - n + 1 - H(w)),$$

а значит,

$$\frac{1}{2k-n+1} \sum_{i=-k}^{k-n} I(w_i \in \beta) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{H(w)}{2k-n+1}\right).$$

Подставляя это в (2), получим

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{H(x_{[-k;k-n]})}{2k-n+1} = 1 - 2\mu(\beta) := c.$$

Из условий $\mu(\alpha) + \mu(\beta) = 1$ и $\mu(\alpha) \neq \mu(\beta)$ следует, что $1 - 2\mu(\beta) = \mu(\alpha) - \mu(\beta) \neq 0$, т.е. $c \neq 0$. Также понятно, что $c \in [-1; 1]$.

Воспользуемся очевидным фактом: если функция стремится к положительному пределу $\varkappa$ в точке z, то для любого $\tau < 1$ существует окрестность точки z, в которой эта функция не меньше $\tau\varkappa$, в частности, это верно для $\tau = \dfrac{1}{2}$. Отсюда получаем, что для почти любого $x \in X$ существует положительное число $\gamma(x)$, такое что для всех $\varepsilon \in (0; \gamma(x)]$ выполнено

$$\left|H\big(x_{[-k;k-n]}\big)\right| \geqslant \frac{1}{2}|c|(2k - n + 1) \geqslant n. \tag{3}$$

Здесь учтено, что n мало относительно k, а значит, и относительно $2k - n + 1$. Согласно замеченному выше из неравенства (3) вытекает, что $x \in E_\varepsilon$ для всех $\varepsilon \in (0; \gamma(x)]$. Обозначим множество полной меры, на котором корректно определено $\gamma(x)$, через S. Пусть $\Gamma_\varepsilon := \{x \in S : \ \gamma(x) \geqslant \varepsilon\}$. Понятно, что совокупность Γ_ε монотонно возрастает при убывании ε, а $\bigcup\limits_{\varepsilon > 0} \Gamma_\varepsilon = S$, значит,

$$\mu(\Gamma_\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 1.$$

Кроме того, $\Gamma_\varepsilon \subseteq E_\varepsilon$, откуда

$$\mu(E_\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 1,$$

что и завершает доказательство. ▲

Замечание 1. Повторив рассуждения для функции $H^j(w)$ вместо $H(w)$, можно ослабить дополнительное условие теоремы до $\mu(\alpha_j) \neq \mu(\beta_j)$ для некоторого j.

Замечание 2. Нетрудно понять, что меры, отвечающие условиям теоремы, существуют и в некотором смысле составляют большинство среди борелевских вероятностных T-инвариантных эргодических мер. В частности, обе меры максимальной энтропии отвечают условиям теоремы.

С другой стороны, для важной меры, рассматриваемой автором в [5], не выполняются даже ослабленные условия из замечания 1 (там все скобки имеют одинаковую меру).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Заславский Г.М.* Стохастичность динамических систем. М.: Наука, 1984.
2. *Gurevich B.M.* Geometric Interpretation of Entropy for Random Processes // Sinai's Moscow Seminar on Dynamical Systems. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1996. P. 81–87.
3. *Комеч С.А.* Скорость искажения границы в синхронизованных системах: геометрический смысл энтропии // Пробл. передачи информ. 2012. Т. 48. № 1. С. 15–25. http://mi.mathnet.ru/ppi2065
4. *Гуревич Б.М., Комеч С.А.* Скорость деформации границ в системах Аносова и близких к ним // Тр. МИАН. 2017. Т. 297. С. 211–223. https://doi.org/10.1134/S037196851702011X
5. *Дворкин Г.Д.* Геометрическая интерпретация энтропии: новые результаты // Пробл. передачи информ. 2021. Т. 57. № 3. С. 90–101. https://doi.org/10.31857/S0555292321030062
6. *Синай Я.Г.* О понятии энтропии динамической системы // ДАН СССР. 1959. Т. 124. С. 768–771.
7. *Корнфельд И.П., Синай Я.Г., Фомин С.В.* Эргодическая теория. М.: Наука, 1980.
8. *Meyerovitch T.* Tail Invariant Measures of the Dyck-Shift and Non-sofic Systems. Master Thesis. Tel-Aviv Univ., Israel, 2004.

Дворкин Григорий Дмитриевич
Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет,
кафедра математической статистики и случайных процессов
grisha230531415@gmail.com

Поступила в редакцию
13.09.2021
После доработки
25.11.2021
Принята к публикации
26.11.2021