ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

Том 58 **2022** **Вып. 2**

УДК 621.391 : 519.214 : 519.218.4

© 2022 г. **А.В. Логачёв, А.А. Могульский, Е.И. Прокопенко**

ПРИНЦИП БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ ОБОБЩЕННЫХ ПРОЦЕССОВ ВОССТАНОВЛЕНИЯ С ПРИЛОЖЕНИЕМ К СВЯЗЫВАНИЮ ПОЛИМЕРОВ[1]

Получен принцип больших уклонений для обрывающихся многомерных обобщенных процессов восстановления. Кроме того, получена асимптотика больших уклонений для случая, когда происходит гиббсовская замена исходной вероятностной меры. Рассмотренный тип случайных процессов широко используется в моделях связывания полимеров.

Ключевые слова: обобщенный процесс восстановления, принцип больших уклонений, функционал уклонений, модель связывания полимеров, гиббсовская замена меры.

DOI: 10.31857/S0555292322020053, **EDN:** DZDASV

§ 1. Введение

Статья посвящена изучению предельного поведения вероятностной меры, построенной по многомерному обобщенному процессу восстановления (ОПВ), который, вообще говоря, может обрываться (т.е. допускается возможность того, что время между моментами восстановления может быть равным ∞ с положительной вероятностью). Такие случайные процессы находят свое применение, в частности, в моделях связывания полимеров (polymer pinning models). Прежде чем привести обзор известных результатов, нам удобнее дать строгое математическое определение изучаемого объекта.

Пусть случайный вектор $(\tau, \boldsymbol{\zeta}, v)$ принимает значения в пространстве

$$\overline{\mathbb{R}}_+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R},$$

где $\overline{\mathbb{R}}_+ := \{t \in \mathbb{R} : \ t > 0\} \cup \{\infty\}$, так что координата $\tau > 0$ может принимать значение ∞ с вероятностью $\mathbf{P}(\tau = \infty) =: p \in [0, 1)$. Далее, пусть

$$\{(\tau_i, \boldsymbol{\zeta}_i, v_i)\}_{i \geqslant 1}$$

– последовательность независимых копий вектора $(\tau, \boldsymbol{\zeta}, v)$. Обозначим

$$T_0 := 0, \quad T_n := \sum_{i=1}^{n} \tau_i, \qquad \boldsymbol{Z}_0 := \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{Z}_n := \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\zeta}_i, \qquad V_0 := 0, \quad V_n := \sum_{i=1}^{n} v_i,$$

где $n \in \mathbb{Z}_+$.

[1] Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации № 075-15-2022-282.

По суммам $(T_n, \boldsymbol{Z}_n)$ для $t > 0$ построим однородный ОПВ с d-мерным фазовым пространством $\mathbb{R}^d$:

$$\boldsymbol{Z}(t) := \boldsymbol{Z}_{\nu(t)}, \quad \nu(t) := \sup\{n \geqslant 0 : \ T_n \leqslant t\},$$

возможно, обрывающийся (в случае, когда $p = \mathbf{P}(\tau = \infty) > 0$).

Рассмотрим семейство

$$\mathbf{P}_t(\boldsymbol{Z}(t) \in B) := \frac{\mathbf{E}\big(e^{V_{\nu(t)}}; \boldsymbol{Z}(t) \in B\big)}{\mathbf{E}\, e^{V_{\nu(t)}}}, \quad B \in \mathcal{B}_d,$$

вероятностных распределений в пространстве $\mathbb{R}^d$, где $\mathcal{B}_d$ – борелевская σ-алгебра в $\mathbb{R}^d$.

Нас будет интересовать асимптотическое поведение последовательности

$$\frac{1}{t} \ln \mathbf{P}_t\left(\frac{\boldsymbol{Z}(t)}{t} \in B\right) \tag{1.1}$$

при $t \to \infty$.

Сделаем теперь краткий обзор известных результатов, связанных с асимптотикой последовательности (1.1). Работы, в которых изучается предельное поведение последовательности (1.1), можно разделить на две группы. Первая носит чисто теоретический характер, в ней изучается асимптотика, связанная с поведением непосредственно обобщенного процесса восстановления, т.е. полагается, что $V_{\nu(t)} \equiv 0$, и изучается асимптотика последовательности

$$\frac{1}{t} \ln \mathbf{P}\left(\frac{\boldsymbol{Z}(t)}{t} \in B\right). \tag{1.2}$$

В этом направлении для случая $\mathbf{P}(\tau = \infty) = 0$ хорошо изучена как грубая асимптотика последовательности (1.2) (принцип больших уклонений (ПБУ)) [1–3], так и точная асимптотика (локальные и инегро-локальные теоремы в области нормальных, умеренно больших и больших уклонений) [4] (для одмерного случая), [5, 6] (для многомерного случая), [7] (для многомерных арифметических полумарковских ОПВ). В работах [8, 9] изучена, соответственно, грубая и точная асимптотика больших уклонений для конечномерных приращений многомерных ОПВ. Работы [10–12] посвящены принципам больших и умеренно больших уклонений для траекторий ОПВ. Отметим также работу [13], в ней получен ПБУ для мер, построенных по ОПВ. В работе [14] для обрывающихся многомерных ОПВ в некоторой области фазового пространства установлена интегро-локальная (локальная) предельная теорема.

Вторая группа работ имеет более прикладной характер, в ней изучается асимптотическое поведение последовательности (1.1) для случая, когда, вообще говоря, $V_{\nu(t)} \neq 0$ [15, 16]. В этих работах τ – целое число, которое является случайным количеством мономеров, присоединяемых к имеющемуся полимеру в процессе синтеза, $\boldsymbol{\zeta}$ – числовая характеристика, присоединяемого блока мономеров (например, количества мономеров того или иного вида в присоединяемом блоке). В частности, если τ – количество мономеров, присоединенных до выхода полимера на границу разных сред, то вероятность того, с какой стороны от границы был присоединен блок мономеров, зависит от количества энергии в этих средах (см., например, [17, гл. 1; 18, гл. 2]).

Классическим примером является случай, когда $v_i \equiv \beta$ и, соответственно, $V_{\nu(t)} = \beta\nu(t)$, где β – константа, обратно пропорциональная температуре сред (таким образом, предполагается, что температура постоянна). В этом примере средняя скорость присоединения новых блоков мономеров зависит только от температуры. Более сложной является модель, в которой есть две различные среды, имеющие общую границу и содержащие разные мономеры. В этой модели на каждом шаге присоединяется блок, полностью состоящий из мономеров, находящихся с одной стороны от границы, т.е. τ_i – количество присоединяемых мономеров между $(i-1)$-м и i-м выходами на границу сред. Здесь $v_i = \beta - \lambda\zeta_i$ и, соответственно, $V_{\nu(t)} = \beta\nu(t) - \lambda Z_{\nu(t)}$, где константа $\lambda > 0$, ζ_i – количество присоединяемых мономеров (между $(i-1)$-м и i-м выходами на границу сред), которые находятся с одной фиксированной стороны от границы. При этом параметр λ отвечает за сложность преодоления границы сред, в частности, если $\lambda = \infty$, то мономеры, находящиеся с одной фиксированной стороны от границы, не могут быть присоединены.

Таким образом, из физических соображений возникает потребность рассматривать не исходную вероятностную меру (1.2), а некоторое ее экспоненциальное преобразование (1.1). Отметим также, что в этих моделях, в частности, событие $\{\tau = \infty\}$ может означать невозможность присоединения нового блока мономеров.

Следует отметить, что в работах из первой группы тоже приходится сталкиваться с экспоненциальным преобразованием исходной вероятностной меры, но совершенно из других соображений, связанных с техникой доказательства ПБУ. Эта техника помогает также успешно решить многие задачи, поставленные во второй группе работ.

Наиболее близкой по содержанию к нашей статье является работа [16]. В ней рассматривается случайный процесс $\boldsymbol{Z}(t)$, у которого фазовое пространство является банаховым, в том числе и бесконечномерным, и в частности, успешно изучается асимптотическое поведение последовательности (1.1) для достаточно широкого класса множеств $B \in \mathcal{B}_d$ в случае, когда выполнены дополнительные условия:

(a) *Случайная величина τ принимает целые положительные значения или ∞;*

(b) *Случайная величина v имеет вид $v = h(\tau)$ для некоторой фиксированной неслучайной функции $h = h(t)$.*

В настоящей статье проведено изучение асимптотического поведения последовательности (1.1) в общем случае, т.е. без привлечения условий (a) и (b) (см. следствие 1). Кроме того, для обрывающихся многомерных ОПВ в условиях, близких к необходимым, установлен принцип больших уклонений в фазовом пространстве (см. следствие 2). Отметим, что более общий вид функции $v = h(\tau)$ дает возможность рассматривать более сложные физические модели синтеза полимеров. В частности, модели, в которых экспоненциальное преобразование меры зависит от типа присоединенных мономеров. Отказ от целочисленности τ позволяет, в частности, рассматривать модели, в которых мы можем фиксировать только моменты времени выхода полимера на границу сред и не знаем, какое точно количество мономеров было присоединено за время между этими моментами. Вопрос о выполнении ПБУ для ОПВ в произвольном банаховом пространстве, когда условия (a) и (b) не выполнены, остается открытым.

Для формулировок и доказательства основных результатов нам потребуются некоторые дополнительные моментные условия. Везде далее будем предполагать, что выполнено следующее условие:

$[\mathbf{C}^*]$ Для некоторых $\lambda > 0$ и $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{E}\big(e^{-\lambda\tau+\varepsilon|\boldsymbol{\zeta}|+v};\ \tau < \infty\big) < \infty.$$

Заметим, что в силу того, что $-\lambda\infty = -\infty$, в условии $[\mathbf{C}^*]$ можно оставить неравенство

$$\mathbf{E}\big(e^{-\lambda\tau+\varepsilon|\boldsymbol{\zeta}|+v}\big) < \infty.$$

Поскольку

$$\ln \mathbf{P}_t\left(\frac{\boldsymbol{Z}(t)}{t} \in B\right) = \ln \mathbf{E}\left(e^{V_{\nu(t)}}; \frac{\boldsymbol{Z}_{\nu(t)}}{t} \in B\right) - \ln \mathbf{E}\left(e^{V_{\nu(t)}}; \frac{\boldsymbol{Z}_{\nu(t)}}{t} \in \mathbb{R}^d\right), \tag{1.3}$$

то для того чтобы изучить предельное поведение последовательности (1.1), достаточно получить предельные теоремы для последовательности

$$\frac{1}{t} \ln \mathbf{E}\left(e^{V_{\nu(t)}}; \frac{\boldsymbol{Z}_{\nu(t)}}{t} \in B\right), \tag{1.4}$$

что и осуществлено в теореме 1. Следствием теоремы 1 в частном случае, когда $v = 0$ п.н., является ПБУ для ОПВ $\boldsymbol{Z}(t)$ (возможно, обрывающегося), который сформулирован в следствии 2.

§ 2. Основные обозначения и основной результат

Обозначим

$$A(\lambda, \boldsymbol{\mu}) := \ln \mathbf{E}\big(e^{\lambda\tau + \langle \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\zeta}\rangle + v};\ \tau < \infty\big),$$

здесь и далее $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ – скалярное произведение. Функция $A(\lambda, \boldsymbol{\mu})$ является преобразованием Лапласа над “неполной” мерой, отличающейся от меры

$$\mathbf{E}(e^v;\ \tau \in \cdot\,,\ \boldsymbol{\zeta} \in \cdot\,) = \mathbf{E}(e^v;\ \tau \in \cdot\,,\ \boldsymbol{\zeta} \in \cdot\,,\ \tau < \infty) + \mathbf{E}(e^v;\ \boldsymbol{\zeta} \in \cdot\,,\ \tau = \infty)$$

отсутствием второго слагаемого. Однако эта “неполнота” полностью согласуется с тем очевидным обстоятельством, что изучаемая характеристика (1.1) не зависит от распределения

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{\zeta} \in \cdot\,,\ v \in \cdot \mid \tau = \infty).$$

Рассмотрим два множества

$$\mathcal{A}^{\leqslant 0} := \{(\lambda, \boldsymbol{\mu}) :\ A(\lambda, \boldsymbol{\mu}) \leqslant 0\}, \quad \mathcal{A}^{\leqslant 0}_{\gamma} := \{(\lambda, \boldsymbol{\mu}) : \lambda < \gamma,\ A(\lambda, \boldsymbol{\mu}) \leqslant 0\},$$

где $\gamma \in \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ фиксировано. В качестве γ будут выбираться:

- либо константы $\lambda_{\pm}$, $0 \leqslant \lambda_+ \leqslant \lambda_- \leqslant \infty$, где

$$\lambda_+ := \sup\{\lambda \geqslant 0 :\ \mathbf{E}\, e^{\lambda\tau} < \infty\} = -\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{P}(\tau > t), \tag{2.1}$$

$$\lambda_- := -\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{P}(\tau > t); \tag{2.2}$$

- либо константы $\lambda^*_{\pm}$, $0 \leqslant \lambda^*_+ \leqslant \lambda^*_- \leqslant \infty$, определенные при дополнительном условии

$$\mathbf{E}(e^v) < \infty$$

соотношениями

$$\lambda^*_+ := \sup\{\lambda \geqslant 0 :\ \mathbf{E}\, e^{v+\lambda\tau} < \infty\} = -\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{E}(e^v;\ \tau > t),$$

$$\lambda^*_- := -\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{E}(e^v;\ \tau > t).$$

Заметим, что если выполнено условие обрываемости $p = \mathbf{P}(\tau = \infty) > 0$, то выполняется $\lambda_+ = \lambda_- = 0$.

Построим новые функции

$$A(\boldsymbol{\mu}) := -\sup\{\lambda :\ (\lambda, \boldsymbol{\mu}) \in \mathcal{A}^{\leqslant 0}\}, \quad A_\gamma(\boldsymbol{\mu}) := \max\{-\gamma, A(\boldsymbol{\mu})\}, \tag{2.3}$$

где по определению считаем

$$\sup\{\lambda :\ \lambda \in \varnothing\} = -\infty.$$

Для функции $H = H(\boldsymbol{\mu})\colon \mathbb{R}^d \to (-\infty, \infty]$ определим (см., например, [19]) преобразование Лежандра $H^{\mathfrak{Le}} = H^{\mathfrak{Le}}(\boldsymbol{\alpha})$, положив

$$H^{\mathfrak{Le}}(\boldsymbol{\alpha}) := \sup_{\boldsymbol{\mu}}\{\langle \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\alpha}\rangle - H(\boldsymbol{\mu})\}, \quad \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^d.$$

Будем называть функцию $H = H(\boldsymbol{\alpha})$, отображающую $\mathbb{R}^d$ в $[0, \infty]$, *компактной*, если для любого $c \geqslant 0$ множество $\{\boldsymbol{\alpha} :\ H(\boldsymbol{\alpha}) \leqslant c\}$ является компактом в $\mathbb{R}^d$. Легко показать, что любая компактная функция $H(\boldsymbol{\alpha})$ полунепрерывна снизу.

Определим две функции: для $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^d$

$$D(\boldsymbol{\alpha}) := A^{\mathfrak{Le}}(\boldsymbol{\alpha}), \quad D_\gamma(\boldsymbol{\alpha}) := A_\gamma^{\mathfrak{Le}}(\boldsymbol{\alpha}).$$

В следующей лемме содержатся необходимые нам свойства этих функций.

Лемма 1. (i) *Функции $A(\boldsymbol{\mu})$ и $A_\gamma(\boldsymbol{\mu})$ выпуклы и полунепрерывны снизу*;

(ii) *Функции $D(\boldsymbol{\alpha})$ и $D_\gamma(\boldsymbol{\alpha})$ выпуклы, полунепрерывны снизу и компактны*;

(iii) *Справедливы формулы*

$$A(\boldsymbol{\mu}) = D^{\mathfrak{Le}}(\boldsymbol{\mu}), \quad A_\gamma(\boldsymbol{\mu}) = D_\gamma^{\mathfrak{Le}}(\boldsymbol{\mu}), \tag{2.4}$$

так что пары $A(\boldsymbol{\mu}), D(\boldsymbol{\alpha})$ и $A_\gamma(\boldsymbol{\mu}), D_\gamma(\boldsymbol{\alpha})$ являются парами взаимно сопряженных (относительно преобразования Лежандра) функций;

(iv) *Функции $A_\gamma(\boldsymbol{\mu})$ и $A(\boldsymbol{\mu})$ совпадают (и следовательно, $D_\gamma(\boldsymbol{\alpha}) = D(\boldsymbol{\alpha})$) тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$\gamma \geqslant D(\mathbf{0}); \tag{2.5}$$

(v) *Для всех $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^d$ справедливо*

$$D_\gamma(\boldsymbol{\alpha}) = \inf_{\theta \in [0,1]}\{D(\theta, \boldsymbol{\alpha}) + \gamma(1-\theta)\}, \tag{2.6}$$

где

$$D(\theta, \boldsymbol{\alpha}) := \sup_{(\lambda, \boldsymbol{\mu}) \in \mathcal{A}^{\leqslant 0}}\{\lambda\theta + \langle \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\alpha}\rangle\}.$$

Замечание 1. Дополнительные свойства функций $D(\boldsymbol{\alpha})$ и $D_\gamma(\boldsymbol{\alpha})$ будут приведены в лемме 5 (см. § 4). Поскольку доказательства лемм 1 и 5 в значительной степени повторяют доказательства аналогичных утверждений работы [20], то эти доказательства мы опускаем. Однако для удобства читателя мы приводим полные доказательства лемм 1 и 5 в расширенной версии [21] настоящей статья.

Определим теперь две функции:

$$D_+(\boldsymbol{\alpha}) := D_{\lambda_+}(\boldsymbol{\alpha}) - A_{\lambda_-}(0), \quad D_-(\boldsymbol{\alpha}) := D_{\lambda_-}(\boldsymbol{\alpha}) - A_{\lambda_+}(0), \quad \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^d,$$

где константы λ_+ и λ_- определены формулами (2.1) и (2.2) соответственно. Заметим, что

$$A_{\lambda_\pm}(0) = \sup\{\lambda < \lambda_\pm :\ \mathbf{E}\, e^{\lambda\tau + v} \leqslant 1\}.$$

Заметим, что если выполнено условие обрываемости $p = \mathbf{P}(\tau = \infty) > 0$, то

$$D_+(\boldsymbol{\alpha}) = D_-(\boldsymbol{\alpha}) = D_0(\boldsymbol{\alpha}) - A_0(0), \quad \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^d.$$

Для множества $B \in \mathcal{B}_d$ через $[B]$ и (B) будем обозначать его замыкание и внутренность соответственно. Положим для $B \in \mathcal{B}_d$

$$D_\gamma(B) = \inf_{\boldsymbol{\alpha} \in B} D_\gamma(\boldsymbol{\alpha}).$$

Основными результатами данной статьи являются следующие утверждения.

Теорема 1. *Для любого борелевского множества* $B \subset \mathbb{R}^d$

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{E}\left(e^{V_{\nu(t)}}; \frac{\boldsymbol{Z}(t)}{t} \in B\right) \leqslant -D_{\lambda_+}([B]), \tag{2.7}$$

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{E}\left(e^{V_{\nu(t)}}; \frac{\boldsymbol{Z}(t)}{t} \in B\right) \geqslant -D_{\lambda_-}((B)). \tag{2.8}$$

Используя равенство (1.3), находим оценки для последовательности (1.1).

Следствие 1. *Для любого борелевского множества* $B \subset \mathbb{R}^d$

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{P}_t\left(\frac{\boldsymbol{Z}(t)}{t} \in B\right) \leqslant -D_+([B]),$$

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{P}_t\left(\frac{\boldsymbol{Z}(t)}{t} \in B\right) \geqslant -D_-((B)).$$

Оценки для последовательности (1.2) очевидным образом извлекаются из теоремы 1, накладывая условие $\mathbf{P}(v = 0) = 1$.

Следствие 2. *Пусть* $\mathbf{P}(v = 0) = 1$. *Тогда для любого борелевского множества* $B \subset \mathbb{R}^d$

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{P}\left(\frac{\boldsymbol{Z}(t)}{t} \in B\right) \leqslant -D_{\lambda_+}([B]), \tag{2.9}$$

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{P}\left(\frac{\boldsymbol{Z}(t)}{t} \in B\right) \geqslant -D_{\lambda_-}((B)). \tag{2.10}$$

В частности, если выполнено условие обрываемости $p = \mathbf{P}(\tau = \infty) > 0$, *то* $\lambda_- = \lambda_+ = 0$, *и тогда выполнение неравенств* (2.9), (2.10) *означает, что семейство* $\dfrac{\boldsymbol{Z}(t)}{t}$ *удовлетворяет принципу больших уклонений в* $\mathbb{R}^d$ *с функцией уклонений* $D_0(\boldsymbol{\alpha})$.

§ 3. Доказательство теоремы 1

В основе доказательства теоремы 1 лежат следующие леммы, которые доказываются в § 4.

Лемма 2. *Для любого* $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^d$ *выполняется*

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{E}\left(e^{V_{\nu(t)}}; \frac{\boldsymbol{Z}(t)}{t} \in (\boldsymbol{\alpha})_\varepsilon\right) \leqslant -D_{\lambda_+}(\boldsymbol{\alpha}). \tag{3.1}$$

Л е м м а 3. *Для любых* $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^d$, $\varepsilon > 0$ *выполняется*

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{E}\biggl(e^{V_\nu(t)}; \frac{\boldsymbol{Z}(t)}{t} \in (\boldsymbol{\alpha})_\varepsilon\biggr) \geqslant -D(\boldsymbol{\alpha}), \tag{3.2}$$

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{E}\biggl(e^{V_\nu(t)}; \frac{\boldsymbol{Z}(t)}{t} \in (\boldsymbol{\alpha})_\varepsilon\biggr) \geqslant -D_{\lambda_-}(\boldsymbol{\alpha}). \tag{3.3}$$

Поскольку $A_{\lambda_-}(\boldsymbol{\mu}) \geqslant A(\boldsymbol{\mu})$, то $-D_{\lambda_-}(\boldsymbol{\alpha}) \geqslant -D(\boldsymbol{\alpha})$, и следовательно, неравенство (3.2) следует из неравенства (3.3). Однако неравенство (3.2), являющееся, вообще говоря, более грубым, чем неравенство (3.3), тем не менее представляет определенный интерес, поскольку дает содержательную оценку снизу в тех случаях, когда отсутствует информация о константе λ_-.

Л е м м а 4. *Для любого* $N \in (0, \infty)$ *найдется* $M \in (0, \infty)$, *такое что*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{E}\biggl(e^{V_\nu(t)}; \frac{|\boldsymbol{Z}(t)|}{t} \geqslant M\biggr) \leqslant -N.$$

Проведем теперь на основе лемм 2–4 доказательство теоремы 1, которое повторяет основные шаги доказательства теоремы 4.1.1 из [22, с. 259].

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1. (i) Оценка сверху (2.7). Зафиксируем константы $\delta > 0$, $N < \infty$ и обозначим $D(B, \delta, N) := \min\{N, D_{\lambda_+}([B])\} + \delta$,

$$L_+(B) := \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{E}\biggl(e^{V_\nu(t)}; \frac{\boldsymbol{Z}(t)}{t} \in B\biggr).$$

В силу леммы 4 найдется компакт $K \subset \mathbb{R}^d$, такой что для $\overline{K} := \mathbb{R}^d \setminus K$ выполняется

$$L_+(\overline{K}) \leqslant -2D(B, \delta, N). \tag{3.4}$$

Далее, в силу леммы 2 для любого $\boldsymbol{\alpha}$ из компакта $K \cap [B]$ найдется $\varepsilon(\boldsymbol{\alpha}) > 0$, такое что выполняется

$$L_+((\boldsymbol{\alpha})_{\varepsilon(\boldsymbol{\alpha})}) \leqslant -D(B, \delta, N). \tag{3.5}$$

Получили открытое покрытие компакта $K \cap [B]$, из которого выделяем конечное подпокрытие

$$\bigl\{(\boldsymbol{\alpha}_i)_{\varepsilon(\boldsymbol{\alpha}_i)}\bigr\}_{i=1}^{I}: \quad K \cap [B] \subset \bigcup_{i=1}^{I} (\boldsymbol{\alpha}_i)_{\varepsilon(\boldsymbol{\alpha}_i)}, \quad I < \infty. \tag{3.6}$$

Поэтому

$$L_+([B]) \leqslant L_+\bigl((K \cap [B]) \cup \overline{K}\bigr),$$

и в силу (3.4)–(3.6) имеем

$$L_+([B]) \leqslant -D(B, \delta, N).$$

Левая часть последнего неравенства не зависит от $\delta > 0$ и $N < \infty$, поэтому неравенство сохранится, если в его правой части устремить $\delta \to 0$ и $N \to \infty$. Получили оценку сверху (2.7).

(ii) Оценка снизу (2.8). Фиксируем $\boldsymbol{\alpha} \in (B)$ и $\varepsilon > 0$ таким образом, что $(\boldsymbol{\alpha})_\varepsilon \subset (B)$, и обозначим

$$L_-(B) := \liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{E}\biggl(e^{V_\nu(t)}; \frac{\boldsymbol{Z}(t)}{t} \in B\biggr).$$

Имеем

$$L_-(B) \geqslant L_-((B)) \geqslant L_-((\boldsymbol{\alpha})_\varepsilon),$$

поэтому, применяя лемму 3, получаем

$$L_-(B) \geqslant -D_{\lambda_-}(\boldsymbol{\alpha}).$$

Левая часть последнего неравенства не зависит от $\boldsymbol{\alpha} \in (B)$, поэтому неравенство сохранится, если его правую часть максимизировать по $\boldsymbol{\alpha} \in (B)$. Получили оценку снизу (2.8). ▲

§ 4. Доказательство лемм 2–4

Нам понадобятся следующие обозначения. Для $(\theta, \boldsymbol{\alpha}) \in \mathbb{R}^{d+1}$ обозначим

$$D_\Lambda(\theta, \boldsymbol{\alpha}) := \inf_{r>0} r\Lambda\Big(\frac{\theta}{r}, \frac{\boldsymbol{\alpha}}{r}\Big), \tag{4.1}$$

где

$$\Lambda(\theta, \boldsymbol{\alpha}) := \sup_{\lambda, \boldsymbol{\mu}}\{\lambda\theta + \langle \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\alpha}\rangle - A(\lambda, \boldsymbol{\mu})\}, \quad (\theta, \boldsymbol{\alpha}) \in \mathbb{R}^{d+1},$$

– *функция уклонений*, которая определяется как преобразование Лежандра функции $A(\lambda, \boldsymbol{\mu})$:

$$\Lambda(\theta, \boldsymbol{\alpha}) = A^{\mathfrak{Le}}(\theta, \boldsymbol{\alpha}).$$

Легко убедиться, что функция $D_\Lambda(\theta, \boldsymbol{\alpha})$ выпукла и линейчата (т.е. линейна вдоль любого луча, выходящего из начала координат). Однако свойство полунепрерывности снизу для этой функции может отсутствовать.

В следующем утверждении приводятся дополнительные свойства функций $D(\boldsymbol{\alpha})$ и $D_\gamma(\boldsymbol{\alpha})$.

Л е м м а 5. (i) *Для всех* $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^d$ *справедливо*

$$D(\boldsymbol{\alpha}) = \sup_{(\lambda, \boldsymbol{\mu}) \in \mathcal{A}^{\leqslant 0}} \{\lambda + \langle \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\alpha}\rangle\}, \tag{4.2}$$

$$D_\gamma(\boldsymbol{\alpha}) = \sup_{(\lambda, \boldsymbol{\mu}) \in \mathcal{A}_\gamma^{\leqslant 0}} \{\lambda + \langle \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\alpha}\rangle\}; \tag{4.3}$$

(ii) *Для функции* $D_\Lambda(\theta, \boldsymbol{\alpha})$ (*см.* (4.1)) *имеет место равенство*

$$(D_\Lambda^{\mathfrak{Le}})^{\mathfrak{Le}}(\theta, \boldsymbol{\alpha}) = D(\theta, \boldsymbol{\alpha}), \tag{4.4}$$

и для всех $\theta > 0$, $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^d$ *выполнено*

$$D(\theta, \boldsymbol{\alpha}) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \inf_{\boldsymbol{\alpha}' \in (\boldsymbol{\alpha})_\varepsilon} D_\Lambda(\theta, \boldsymbol{\alpha}'); \tag{4.5}$$

(iii) *Если* $\gamma < \infty$, *то для функции*

$$\widehat{D}_\gamma(\boldsymbol{\alpha}) := \inf_{\theta \in (0,1)} \{D(\theta, \boldsymbol{\alpha}) + \gamma(1-\theta)\}$$

имеет место равенство

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \inf_{\boldsymbol{\alpha}' \in (\boldsymbol{\alpha}_\varepsilon)} \widehat{D}_\gamma(\boldsymbol{\alpha}') = D_\gamma(\boldsymbol{\alpha}). \tag{4.6}$$

Доказательство леммы 2. Из определения процесса $\boldsymbol{Z}(t)$ вытекает, что на событии $\{T_n \leqslant t < T_n + \tau_{n+1}\}$ выполнено $\boldsymbol{Z}(t) = \boldsymbol{Z}_n$. Следовательно,

$$E(t) := \mathbf{E}\biggl(e^{V_{\nu(t)}}; \frac{\boldsymbol{Z}(t)}{t} \in (\boldsymbol{\alpha})_\varepsilon\biggr) = \sum_{n\geqslant 0} E_n(t), \tag{4.7}$$

где

$$E_n(t) := \mathbf{E}\biggl(e^{V_n}; \frac{\boldsymbol{Z}_n}{t} \in (\boldsymbol{\alpha})_\varepsilon,\ T_n \leqslant t < T_n + \tau_{n+1}\biggr).$$

Оценим сначала часть суммы в (4.7) по $n > t^2$:

$$\sum_{n>t^2} E_n(t) \leqslant \sum_{n>t^2} \mathbf{E}\bigl(e^{V_n}; T_n \leqslant t\bigr) =: \sum_{n>t^2} P_n(t).$$

Выберем число $\lambda^* > 0$ таким образом, что $A(-\lambda^*, \mathbf{0}) \leqslant 0$ (в силу условия $[\mathbf{C}^*]$ такая константа λ^* всегда найдется), и рассмотрим новые случайные независимые величины τ_j^* с распределением

$$\mathbf{P}(\tau^* \in \cdot\,) := e^{-A(-\lambda^*, \mathbf{0})}\, \mathbf{E}\bigl(e^{v-\lambda^*\tau};\ \tau \in \cdot\,\bigr).$$

Легко показать, что $\mathbf{P}(\tau^* \in (0, \infty]) = 1$, и следовательно, функция уклонений

$$\Lambda^*(\theta) := \sup_\lambda \bigl\{\lambda\theta - \ln \mathbf{E}\, e^{\lambda\tau^*}\bigr\}$$

неограниченно возрастает при монотонном приближении справа аргумента θ к началу координат, т.е. $\lim\limits_{\theta\downarrow 0} \Lambda^*(\theta) = \infty$. Далее, для $n \geqslant 1$ обозначим $T_n^* := \tau_1^* + \ldots + \tau_n^*$, так что справедливо неравенство

$$\begin{aligned} P_n(t) &= e^{\pm nA(-\lambda^*, \mathbf{0})}\, \mathbf{E}\bigl(e^{V_n \pm \lambda^* T_n};\ T_n \leqslant t\bigr) = e^{nA(-\lambda^*, \mathbf{0})}\, \mathbf{E}\bigl(e^{\lambda^* T_n^*};\ T_n^* \leqslant t\bigr) \leqslant \\ &\leqslant e^{nA(-\lambda^*, \mathbf{0}) + \lambda^* t}\, \mathbf{E}(T_n^* \leqslant t) \leqslant e^{\lambda^* t}\, \mathbf{P}(T_n^* \leqslant t), \end{aligned}$$

где последнее неравенство справедливо в силу того, что $A(-\lambda^*, \mathbf{0}) \leqslant 0$. Поэтому в силу экспоненциального неравенства Чебышева при $\dfrac{t}{n} \leqslant \mathbf{E}\,\tau^*$ имеем

$$P_n(t) \leqslant e^{\lambda^* t - n\Lambda^*(\frac{t}{n})}.$$

Таким образом, для $n \geqslant t^2$, $\dfrac{1}{t} \leqslant \mathbf{E}\,\tau^*$ имеем оценку

$$P_n(t) \leqslant e^{\lambda^* t} q^n(t),$$

где $q(t) := e^{-\Lambda^*(\frac{1}{t})} < 1$ для всех достаточно больших t. Следовательно,

$$\sum_{n\geqslant t^2} E_n(t) \leqslant e^{\lambda^* t} \frac{q^{t^2}}{1-q}.$$

Поэтому

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \sum_{n\geqslant t^2} E_n(t) = -\infty. \tag{4.8}$$

Приведем теперь более точную оценку сверху для $E_n(t)$, справедливую для всех $n \geqslant 1$. Для любого вектора $(\lambda, \boldsymbol{\mu}) \in (\mathcal{A}_{\lambda_+}^{\leqslant 0})$ имеем

$$E_n(t) = \mathbf{E}\biggl(e^{V_n \pm \lambda T_n \pm \langle \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{Z}_n \rangle};\ \frac{\boldsymbol{Z}_n}{t} \in (\boldsymbol{\alpha})_\varepsilon,\ T_n \leqslant t < T_n + \tau_{n+1}\biggr).$$

На событии

$$\left\{\frac{\boldsymbol{Z}_n}{t} \in (\boldsymbol{\alpha})_\varepsilon,\ T_n \leqslant t < T_n + \tau_{n+1}\right\}$$

выполняется неравенство

$$e^{-\lambda T_n - \langle \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{Z}_n \rangle} \leqslant e^{-t(\lambda + \langle \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\alpha} \rangle) + \sqrt{d}|\boldsymbol{\mu}|\varepsilon t} \max\{1, e^{\lambda \tau_{n+1}}\}.$$

Так как вектор $(\lambda, \boldsymbol{\mu}) \in \bigl(\mathcal{A}_{\lambda_+}^{\leqslant 0}\bigr)$, то $\lambda < \lambda_+$, и следовательно (учитывая, что $\lambda_+ = 0$ при $p = \mathbf{P}(\tau = \infty) > 0$), то получаем

$$\mathbf{E} \max\{1, e^{\lambda \tau_{n+1}}\} < \infty.$$

Таким образом, для $n \geqslant 1$ в любом случае имеем оценку

$$\begin{aligned}
&E_n(t) \leqslant e^{-t(\lambda + \langle \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\alpha} \rangle) + \sqrt{d}|\boldsymbol{\mu}|\varepsilon t}\, \mathbf{E}\Bigl(\max\{1, e^{\lambda \tau_{n+1}}\} e^{V_n + \lambda T_n + \langle \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{Z}_n \rangle}\Bigr) \leqslant \\
&\quad \leqslant e^{-t(\lambda + \langle \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\alpha} \rangle) + \sqrt{d}|\boldsymbol{\mu}|\varepsilon t}\, \mathbf{E} \max\{1, e^{\lambda \tau}\} e^{n A(\lambda, \boldsymbol{\mu})} \leqslant \\
&\quad \leqslant e^{-t(\lambda + \langle \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\alpha} \rangle) + \sqrt{d}|\boldsymbol{\mu}|\varepsilon t}\, \mathbf{E} \max\{1, e^{\lambda \tau}\},
\end{aligned}$$

из которой вытекает неравенство

$$\sum_{n=1}^{[t^2]} E_n(t) \leqslant \mathbf{E} \max\{1, e^{\lambda \tau}\} t^2 e^{-t(\lambda + \langle \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\alpha} \rangle) + \sqrt{d}|\boldsymbol{\mu}|\varepsilon t}. \tag{4.9}$$

Наконец, оценим $E_0(t) = \mathbf{P}(\mathbf{0} \in (\boldsymbol{\alpha})_\varepsilon,\ \tau > t)$. Имеем

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \limsup_{t \to \infty} \frac{1}{t} \ln E_0(t) = \begin{cases} -\infty, & \text{если } \boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}, \\ -\lambda_+, & \text{если } \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}. \end{cases} \tag{4.10}$$

Таким образом, из (4.9) и (4.10) получается неравенство

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{1}{t} \ln \sum_{n=0}^{[t^2]} E_n(t) \leqslant -(\lambda + \langle \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\alpha} \rangle) + \sqrt{d}|\boldsymbol{\mu}|\varepsilon. \tag{4.11}$$

Из соотношений (4.7), (4.8), (4.11) вытекает, что для любого $(\lambda, \boldsymbol{\mu}) \in \bigl(\mathcal{A}_{\lambda_+}^{\leqslant 0}\bigr)$

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \limsup_{t \to \infty} \frac{1}{t} \ln E(t) \leqslant -(\lambda + \langle \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\alpha} \rangle). \tag{4.12}$$

Так как к любой точке $(\lambda, \boldsymbol{\mu})$ границы $\partial \mathcal{A}_{\lambda_+}^{\leqslant 0}$ можно приблизиться точками $(\lambda_n, \boldsymbol{\mu}_n)$ из внутренности $\bigl(\mathcal{A}_{\lambda_+}^{\leqslant 0}\bigr)$, то неравенство (4.12) справедливо для всех $(\lambda, \boldsymbol{\mu})$ из замкнутого выпуклого множества $\mathcal{A}_{\lambda_+}^{\leqslant 0}$. Минимизируя правую часть неравенства (4.12) по

$(\lambda, \boldsymbol{\mu}) \in \mathcal{A}_{\lambda_+}^{\leqslant 0}$ и используя утверждение (i) леммы 5, получаем

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \limsup_{t \to \infty} \frac{1}{t} \ln E(t) \leqslant -D_{\lambda_+}(\boldsymbol{\alpha}),$$

что завершает доказательство леммы 2. ▲

Доказательство леммы 3. Докажем сперва неравенство (3.2). Выберем $\lambda^* > 0$, такое что выполняется $A(-\lambda^*, \mathbf{0}) \leqslant 0$, что эквивалентно $\mathbf{E}(e^{-\lambda^* \tau + v}) \leqslant 1$ (как уже отмечалось при доказательстве леммы 2, в силу условия $[\mathbf{C}^*]$ такая константа λ^* всегда найдется). Для этого λ^* построим случайный вектор $(\tau^*, \boldsymbol{\zeta}^*, v^*) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ с распределением

$$\mathbf{P}(\tau^* \in \cdot\,,\ \boldsymbol{\zeta}^* \in \cdot\,,\ v^* \in \cdot\,) := \mathbf{P}^*(\tau \in \cdot\,,\ \boldsymbol{\zeta} \in \cdot\,,\ v \in \cdot\,) :=$$
$$:= \mathbf{E}(e^{-\lambda^* \tau + v};\ \tau \in \cdot\,,\ \boldsymbol{\zeta} \in \cdot\,,\ v \in \cdot\,).$$

Заметим, что в случае, когда $A(-\lambda^*, \mathbf{0}) < 0$, распределение этого вектора будет несобственным, т.е.

$$\mathbf{P}(\tau^* \in (0, \infty),\ \boldsymbol{\zeta}^* \in \mathbb{R}^d,\ v^* \in \mathbb{R}) = e^{A(-\lambda^*, \mathbf{0})} < 1.$$

Это распределение можно произвольным образом доопределить на множестве $\{\infty\} \times \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$. Преобразование Лапласа над распределением вектора $(\tau^*, \boldsymbol{\zeta}^*)$ обозначим через

$$e^{A^*(\lambda, \boldsymbol{\mu})} := \mathbf{E}\, e^{\lambda \tau^* + \langle \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\zeta}^* \rangle} = \mathbf{E}\big(e^{\lambda \tau + \langle \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\zeta} \rangle - \lambda^* \tau + v}\big) = e^{A(-\lambda^* + \lambda, \boldsymbol{\mu})},$$

т.е. положим

$$A^*(\lambda, \boldsymbol{\mu}) := A(-\lambda^* + \lambda, \boldsymbol{\mu}).$$

Определим далее последовательность $\{(\tau_i^*, \boldsymbol{\zeta}_i^*, v_i^*);\ i = 1, \ldots\}$ независимых копий случайного вектора $(\tau^*, \boldsymbol{\zeta}^*, v^*)$ и для $n = 0, 1, \ldots$ обозначим через $(T_n^*, \boldsymbol{Z}_n^*, V_n^*)$ частичные суммы этих векторов. Процесс восстановления определим естественным образом $\nu^*(t) := \sup\{n \geqslant 0 :\ T_n^* \leqslant t\}$. Тогда можно определить новую пару ОПВ:

$$(T^*(t), \boldsymbol{Z}^*(t)) := \big(T^*_{\nu^*(t)}, \boldsymbol{Z}^*_{\nu^*(t)}\big).$$

Поясним, как определяется распределение (вообще говоря, несобственное) этой новой пары ОПВ:

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{Z}^*(t) \in \cdot\,,\ T^*(t) \in \cdot\,) = \sum_{n \geqslant 0} \mathbf{P}(\boldsymbol{Z}_n^* \in \cdot\,,\ T_n^* \in \cdot\,;\ T_n^* \leqslant t < T_n^* + \tau_{n+1}^*) =$$
$$= \sum_{n \geqslant 0} \mathbf{E}(e^{-\lambda^* T_{n+1} + V_{n+1}};\ \boldsymbol{Z}_n \in \cdot\,;\ T_n \in \cdot\,,\ T_n \leqslant t < T_n + \tau_{n+1}).$$

Для $i \geqslant 1$ обозначим $\overline{v}_i := -\lambda^* \tau_i + v_i$, так что выполняется

$$\mathbf{P}^*(\tau_i \in \cdot\,,\ \boldsymbol{\zeta}_i \in \cdot\,,\ v_i \in \cdot\,) := \mathbf{E}(e^{\overline{v}_i};\ \tau_i \in \cdot\,,\ \boldsymbol{\zeta}_i \in \cdot\,,\ v_i \in \cdot\,).$$

Нетрудно видеть, что найдутся такие константы

$$q > 0, \quad 0 < c < \infty, \quad 0 < R < \infty,$$

что для событий $B_i := \{c < \tau_i,\ |\boldsymbol{\zeta}_i| \leqslant R,\ |v_i| \leqslant R\}$, $i \geqslant 1$, выполняются неравенства

$$\mathbf{P}^*(B_i) \geqslant q.$$

Для $T > 0$ обозначим $k(T) := \dfrac{T}{c}$,

$$B(T) := \{c < \tau_i,\ |\boldsymbol{\zeta}_i| \leqslant R,\ |v_i| \leqslant R,\ \text{для всех } i \leqslant \nu(T)+1\}.$$

Лемма 6. *Для любого* $T > 0$

$$\mathbf{P}^*(B(T)) \geqslant q^{k(T)+1}.$$

Доказательство. Достаточно заметить, что если $\tau_i > c$, $i \geqslant 1$, то справедливо включение

$$\bigcap_{i=1}^{[k(T)]+1} B_i \subseteq B(T). \quad \blacktriangle$$

Продолжим доказательство (3.2). Очевидно, что

$$\mathbf{E}\biggl(e^{V_{\nu(t)}};\ \frac{\boldsymbol{Z}_{\nu(t)}}{t} \in (\boldsymbol{\alpha})_{2\varepsilon}\biggr) = \mathbf{E}\biggl(e^{\lambda^* T_{\nu(t)} + \overline{V}_{\nu(t)}};\ \frac{\boldsymbol{Z}_{\nu(t)}}{t} \in (\boldsymbol{\alpha})_{2\varepsilon}\biggr) \geqslant$$
$$\geqslant \int\limits_{T=0}^{2\delta t} \mathbf{E}\biggl(e^{\lambda^* T_n + \overline{V}_n};\ \frac{\boldsymbol{Z}_n}{t} \in (\boldsymbol{\alpha})_{\varepsilon},\ \frac{T_n}{t} \in (1-\delta)_{\delta},\ t - T_n \in dT\biggr) \times I(T,\varepsilon),$$

где

$$I(T,\varepsilon) := \mathbf{E}\biggl(e^{\lambda^* T_{\nu(T)} - \overline{v}_{\nu(T)+1} + \overline{V}_{\nu(T)+1}};\ \frac{\boldsymbol{Z}_{\nu(T)}}{t} \in (\mathbf{0})_{\varepsilon} \cap B(T)\biggr).$$

Поскольку на событии $\left\{\dfrac{T_n}{n} \in \dfrac{t}{n}(1-\delta)_{\delta}\right\}$ при $T \leqslant 2\delta t$ выполняется

$$\lambda^* T_n \geqslant \lambda^* t(1-2\delta)$$

и на событии $B(T)$ при $T \leqslant 2\delta t$ и $2R\delta \leqslant c\varepsilon$ выполняются соотношения

$$\lambda^* T_{\nu(T)} - \overline{v}_{\nu(T)+1} \geqslant -R, \qquad \left\{\frac{\boldsymbol{Z}_{\nu(T)}}{t} \in (\mathbf{0})_{\varepsilon}\right\} \cap B(T) = B(T),$$

то имеем

$$e^{-\lambda^* t(1-2\delta)}\,\mathbf{E}\biggl(e^{V_{\nu(t)}};\ \frac{\boldsymbol{Z}_{\nu(t)}}{t} \in (\boldsymbol{\alpha})_{2\varepsilon}\biggr) \geqslant$$
$$\geqslant \int\limits_{T=0}^{2\delta t} \mathbf{E}\biggl(e^{\overline{V}_n};\ \frac{\boldsymbol{Z}_n}{n} \in \frac{t}{n}(\boldsymbol{\alpha})_{\varepsilon},\ \frac{T_n}{n} \in \frac{t}{n}(1-\delta)_{\delta},\ t - T_n \in dT\biggr) \times e^{-R} J(T,\varepsilon),$$

где

$$J(T,\varepsilon) := \mathbf{E}\bigl(e^{\overline{V}_{\nu(T)+1}};\ B(T)\bigr) = \mathbf{P}^*(B(T)) \geqslant q^{k(T)+1}.$$

В последнем неравенстве мы воспользовались леммой 6. Получаем

$$\mathbf{E}\left(e^{V_{\nu(t)}};\ \frac{\boldsymbol{Z}_{\nu(t)}}{t}\in(\boldsymbol{\alpha})_{2\varepsilon}\right)\geqslant$$
$$\geqslant e^{\lambda^* t(1-2\delta)-R}q^{\frac{2\delta t}{c}+1}\int\limits_0^{2t\delta}\mathbf{P}^*\left(\frac{\boldsymbol{Z}_n}{n}\in\frac{t}{n}(\boldsymbol{\alpha})_\varepsilon,\ \frac{T_n}{n}\in\frac{t}{n}(1-\delta)_\delta,\ t-T_n\in dT\right)=$$
$$=e^{\lambda^* t(1-2\delta)-R}q^{\frac{2\delta t}{c}+1}\,\mathbf{P}^*\left(\frac{\boldsymbol{Z}_n}{n}\in\frac{t}{n}(\boldsymbol{\alpha})_\varepsilon,\ \frac{T_n}{n}\in\frac{t}{n}(1-\delta)_\delta\right). \tag{4.13}$$

Чтобы продолжить доказательство формулы (3.2), нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 7. *Для любых $\varepsilon>0$, $\delta>0$, $r>0$ имеет место следующая оценка снизу в принципе больших уклонений для сумм $\left(\frac{T_n}{n},\frac{\boldsymbol{Z}_n}{n}\right)$, $n:=[rt]$, для несобственного, вообще говоря, распределения $\mathbf{P}^*(\cdot)$:*

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln\mathbf{P}^*\left(\left(\frac{T_n}{n},\frac{\boldsymbol{Z}_n}{n}\right)\in\frac{t}{n}(1-\delta)_\delta\times(\boldsymbol{\alpha})_\varepsilon\right)\geqslant-\Lambda_r^*\big((1-\delta)_\delta\times(\boldsymbol{\alpha})_\varepsilon\big), \tag{4.14}$$

где $\Lambda_r^*(\theta,\boldsymbol{\alpha}):=r\Lambda^*\left(\frac{(\theta,\boldsymbol{\alpha})}{r}\right)$ и где для множества $B\subset\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d$

$$\Lambda_r^*(B):=\inf_{(\theta,\boldsymbol{\alpha})\in B}\Lambda_r^*(\theta,\boldsymbol{\alpha}).$$

Доказательство. Наряду с несобственным распределением $\mathbf{P}^*(\tau\in\cdot\,,\ \boldsymbol{\zeta}\in\cdot\,)$ рассмотрим собственное распределение

$$\widehat{\mathbf{P}}(\tau\in\cdot\,,\ \boldsymbol{\zeta}\in\cdot\,):=e^{-C}\,\mathbf{P}^*(\tau\in\cdot\,,\ \boldsymbol{\zeta}\in\cdot\,), \tag{4.15}$$

где $C:=\ln\mathbf{E}\,e^{\overline{v}}$. Функцию уклонений, отвечающую $\widehat{\mathbf{P}}$-распределению вектора $(\tau,\boldsymbol{\zeta})$, обозначим

$$\widehat{\Lambda}(\theta,\boldsymbol{\alpha}):=\sup_{(\lambda,\boldsymbol{\mu})}\big\{\lambda\theta+\langle\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\alpha}\rangle-\ln\widehat{\mathbf{E}}e^{\lambda\tau+\langle\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\zeta}\rangle}\big\}.$$

Очевидно, что справедливо равенство

$$\widehat{\Lambda}(\theta,\boldsymbol{\alpha})=\Lambda^*(\theta,\boldsymbol{\alpha})+C. \tag{4.16}$$

Воспользуемся теперь известной (см., например, [22, теорема 1.2.1]) оценкой снизу в принципе больших уклонений для сумм $\left(\frac{T_n}{n},\frac{\boldsymbol{Z}_n}{n}\right)$, $n:=[rt]$, для собственного распределения $\widehat{\mathbf{P}}(\cdot)$:

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln\widehat{\mathbf{P}}\left(\left(\frac{T_n}{n},\frac{\boldsymbol{Z}_n}{n}\right)\in\frac{t}{n}(1-\delta)_\delta\times(\boldsymbol{\alpha})_\varepsilon\right)\geqslant-\widehat{\Lambda}_r\big((1-\delta)_\delta\times(\boldsymbol{\alpha})_\varepsilon\big), \tag{4.17}$$

где $\widehat{\Lambda}_r(\theta,\boldsymbol{\alpha}):=r\widehat{\Lambda}\left(\frac{(\theta,\boldsymbol{\alpha})}{r}\right)$ и где для множества $B\subset\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d$

$$\widehat{\Lambda}_r(B):=\inf_{(\theta,\boldsymbol{\alpha})\in B}\widehat{\Lambda}_r(\theta,\boldsymbol{\alpha}).$$

Остается заметить, что в силу (4.15) и (4.16) левая (правая) часть (4.14) отличается от левой (правой) части (4.17) на слагаемое $-rC$. ▲

Продолжим доказательство неравенства (3.2). Используя (4.13) и лемму 7, получаем

$$L_-(\boldsymbol{\alpha}, 2\varepsilon) := \liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{E}\Big(e^{V_{\nu(t)}} : \frac{Z_{\nu(t)}}{t} \in (\boldsymbol{\alpha})_{2\varepsilon}\Big) \geqslant$$
$$\geqslant -\Lambda_r^*((1-\delta)_\delta \times (\boldsymbol{\alpha})_\varepsilon) + \lambda^* - W\delta, \tag{4.18}$$

где $W := \Big(4\lambda^* + \dfrac{4}{c}|\ln q|\Big)$. Максимизируя правую часть (4.18) по $r > 0$, используя обозначения

$$D_{\Lambda^*}^*(\theta, \boldsymbol{\beta}) := \inf_{r>0} \Lambda_r^*(\theta, \boldsymbol{\beta}), \quad \theta > 0, \quad \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^d,$$
$$D_{\Lambda^*}^*(B) := \inf_{(\theta,\boldsymbol{\beta})\in B} D_{\Lambda^*}^*(\theta, \boldsymbol{\beta}), \quad B \subset (0,\infty) \times \mathbb{R}^d,$$

и равенство

$$\inf_{r>0} \Lambda_r^*\big((1-\delta)_\delta \times (\boldsymbol{\alpha})_\varepsilon\big) = D_{\Lambda^*}^*\big((1-\delta)_\delta \times (\boldsymbol{\alpha})_\varepsilon\big),$$

получаем

$$L_-(\boldsymbol{\alpha}, 2\varepsilon) \geqslant -D_{\Lambda^*}^*\big((1-\delta)_\delta \times (\boldsymbol{\alpha})_\varepsilon\big) + \lambda^* - W\delta.$$

Поскольку для любого $u > 0$ выполняется

$$D_{\Lambda^*}^*(u\theta, u\boldsymbol{\beta}) = uD_{\Lambda^*}^*(\theta, \boldsymbol{\beta}),$$

то из последнего неравенства выводим

$$L_-(\boldsymbol{\alpha}, 2\varepsilon) \geqslant -(1-\delta)D_{\Lambda^*}^*\big((1)_{\delta'} \times (\boldsymbol{\beta})_{\varepsilon'}\big) + \lambda^* - W\delta \geqslant$$
$$\geqslant -(1-\delta)D_{\Lambda^*}^*\big(\{1\} \times (\boldsymbol{\beta})_{\varepsilon'}\big) + \lambda^* - W\delta, \tag{4.19}$$

где $\delta' := \dfrac{\delta}{1-\delta}$, $\varepsilon' := \dfrac{\varepsilon}{1-\delta}$, $\boldsymbol{\beta} := \dfrac{\boldsymbol{\alpha}}{1-\delta}$. Заметим, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon) > 0$, такое что для всех $\delta \in (0, \delta_0)$ выполняется

$$(\boldsymbol{\alpha})_{\varepsilon/2} \subset (\boldsymbol{\beta})_{\varepsilon'},$$

и следовательно,

$$-D_{\Lambda^*}^*\big(\{1\} \times (\boldsymbol{\beta})_{\varepsilon'}\big) \geqslant -D_{\Lambda^*}^*\big(\{1\} \times (\boldsymbol{\alpha})_{\varepsilon/2}\big).$$

Используя последнее неравенство для оценки снизу правой части (4.19), получаем

$$L_-(\boldsymbol{\alpha}, 2\varepsilon) \geqslant -(1-\delta)D_{\Lambda^*}^*\big(\{1\} \times (\boldsymbol{\alpha})_{\varepsilon/2}\big) + \lambda^* - W\delta;$$

устремляя $\delta \downarrow 0$, имеем для любого $N \geqslant 2$

$$L_-(\boldsymbol{\alpha}, 2\varepsilon) \geqslant -D_{\Lambda^*}^*\big(\{1\} \times (\boldsymbol{\alpha})_{\varepsilon/2}\big) + \lambda^* \geqslant -D_{\Lambda^*}^*\big(\{1\} \times (\boldsymbol{\alpha})_{\varepsilon/N}\big) + \lambda^*;$$

устремляя $N \to \infty$ и используя (4.5), получаем неравенство

$$L_-(\boldsymbol{\alpha}, 2\varepsilon) \geqslant -\big(D_{\Lambda^*}^*(1, \boldsymbol{\alpha}) + \lambda^*\big). \tag{4.20}$$

Осталось установить взаимосвязь между функциями $D^*(u, \boldsymbol{\alpha})$ и $D(\boldsymbol{\alpha})$. Для любого $0 < u \leqslant 1$ воспользуемся представлениями

$$D^*(u, \boldsymbol{\alpha}) = \sup_{A^*(\lambda,\boldsymbol{\mu})\leqslant 0} \{\lambda u + \langle \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\alpha}\rangle\}, \quad A^*(\lambda, \boldsymbol{\mu}) = A(\lambda - \lambda^*, \boldsymbol{\mu}),$$

в силу которых получаем равенство

$$D^*(u,\boldsymbol{\alpha}) - \lambda^* u = \sup_{A(\lambda-\lambda^*,\boldsymbol{\mu})\leqslant 0} \{\lambda u + \langle \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\alpha}\rangle\} - \lambda^* u = D(u,\boldsymbol{\alpha}). \tag{4.21}$$

Применяя (4.21) при $u = 1$ к неравенству (4.20) и используя (4.18), получаем доказательство неравенства (3.2). При этом получено доказательство неравенства (3.3) в случае, когда выполнено

$$D(\boldsymbol{\alpha}) = D_{\lambda_-}(\boldsymbol{\alpha}). \tag{4.22}$$

Докажем теперь неравенство (3.3) в случае, когда условие (4.22) не выполнено, т.е. когда

$$D(\boldsymbol{\alpha}) > D_{\lambda_-}(\boldsymbol{\alpha}). \tag{4.23}$$

Заметим, что в случае (4.23) выполняется $\lambda_- < D(\mathbf{0})$ (см. лемму 1, п. (iv)), и следовательно,

$$\lambda_- < \infty. \tag{4.24}$$

Поэтому достаточно доказать неравенство (3.3) в случае (4.24). Проведем это доказательство. В этом случае последний “большой скачок” $\tau_{\nu(t)+1}$ вносит некоторый вклад в асимптотику исследуемой вероятности. Очевидно, что

$$\mathbf{E}\left(e^{V_{\nu(t)}};\ \frac{\boldsymbol{Z}_{\nu(t)}}{t} \in (\boldsymbol{\alpha})_{2\varepsilon}\right) = \mathbf{E}\left(e^{\lambda^* T_{\nu(t)} + \overline{V}_{\nu(t)}};\ \frac{\boldsymbol{Z}_{\nu(t)}}{t} \in (\boldsymbol{\alpha})_{2\varepsilon}\right) \geqslant$$
$$\geqslant \mathbf{E}\left(e^{\lambda^* T_n + \overline{V}_n};\ \frac{\boldsymbol{Z}_n}{t} \in (\boldsymbol{\alpha})_{\varepsilon},\ \frac{T_n}{t} \in (u-\delta)_\delta\right) \times \mathbf{P}(\tau > t(1-u+2\delta)),$$

где число $u \in (0,1)$ фиксировано. Поскольку на событии $\left\{\dfrac{T_n}{n} \in \dfrac{t}{n}(u-\delta)_\delta\right\}$ выполняется

$$\lambda^* T_n \geqslant \lambda^* t(u - 2\delta),$$

то имеем

$$\mathbf{E}\left(e^{V_{\nu(t)}};\ \frac{\boldsymbol{Z}_{\nu(t)}}{t} \in (\boldsymbol{\alpha})_{2\varepsilon}\right) \geqslant$$
$$\geqslant e^{\lambda^* t(u-2\delta)}\, \mathbf{E}\left(e^{\overline{V}_n};\ \frac{\boldsymbol{Z}_n}{n} \in \frac{t}{n}(\boldsymbol{\alpha})_{\varepsilon},\ \frac{T_n}{n} \in \frac{t}{n}(u-\delta)_\delta\right) \times \mathbf{P}(\tau > t(1-u+2\delta)). \tag{4.25}$$

Далее, повторяя с очевидными изменениями вывод из (4.13) неравенства (4.20), выводим из (4.25) для всех $u \in (0,1)$, $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^d$ неравенство

$$L_-(\boldsymbol{\alpha}, 2\varepsilon) \geqslant -(D^*(u,\boldsymbol{\alpha}) - \lambda^* u + \lambda_-(1-u)). \tag{4.26}$$

Применяя (4.21) к правой части неравенства (4.26), получаем

$$L_-(\boldsymbol{\alpha}, 2\varepsilon) \geqslant -(D(u,\boldsymbol{\alpha}) + \lambda_-(1-u)).$$

Максимизируя правую часть последнего неравенства по $u \in (0,1)$, получаем для всех $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^d$

$$L_-(\boldsymbol{\alpha}, 2\varepsilon) \geqslant -\widehat{D}_{\lambda_-}(\boldsymbol{\alpha}), \tag{4.27}$$

где функция $\widehat{D}_{\lambda_-}(\boldsymbol{\alpha})$ определена в п. (iii) леммы 5. Выберем теперь произвольные $\boldsymbol{\alpha}' \in (\boldsymbol{\alpha})_\varepsilon$ и $\varepsilon' > 0$, такие что выполняется $(\boldsymbol{\alpha}')_{\varepsilon'} \subset (\boldsymbol{\alpha})_\varepsilon$. Применяя (4.27) для $\boldsymbol{\alpha}'$

и ε', получаем

$$L_-(\boldsymbol{\alpha}, 2\varepsilon) \geqslant L_-(\boldsymbol{\alpha}', 2\varepsilon') \geqslant -\widehat{D}_{\lambda_-}(\boldsymbol{\alpha}'). \tag{4.28}$$

Максимизируя далее правую часть (4.28) по $\boldsymbol{\alpha}' \in (\boldsymbol{\alpha})_\varepsilon$, для любого $\varepsilon' \in (0, \varepsilon]$ получаем

$$L_-(\boldsymbol{\alpha}, 2\varepsilon) \geqslant - \inf_{\boldsymbol{\alpha}' \in (\boldsymbol{\alpha})_{e'}} \widehat{D}_{\lambda_-}(\boldsymbol{\alpha}').$$

Осталось воспользоваться равенством (4.6) и получить утверждение (3.3) при дополнительном условии $\lambda_- < \infty$, что завершает доказательство леммы 3. ▲

Доказательство леммы 4. Легко видеть, что для любых $\gamma > 0$, $\widetilde{\lambda} > 0$ п.н. справедливы неравенства

$$\mathbf{I}\bigg(\frac{|\boldsymbol{Z}(t)|}{t} \geqslant M\bigg) \leqslant \mathbf{I}\big(\gamma|\boldsymbol{Z}(t)| - \widetilde{\lambda} T_{\nu(t)} \geqslant M\gamma t - \widetilde{\lambda} t\big) \leqslant \frac{e^{\gamma|\boldsymbol{Z}_{\nu(t)}| - \widetilde{\lambda} T_{\nu(t)}}}{e^{M\gamma t - \widetilde{\lambda} t}}, \tag{4.29}$$

$$\mathbf{I}(\nu(t) = k) \leqslant \mathbf{I}(T_k \leqslant t) = \mathbf{I}(e^{-T_k} \geqslant e^{-t}) \leqslant \frac{e^{-T_k}}{e^{-t}}. \tag{4.30}$$

Из условия $[\mathbf{C}^*]$ следует, что найдутся $\gamma > 0$ и $\widetilde{\lambda} > 0$, такие что

$$u := \mathbf{E}\, e^{\upsilon + \gamma|\boldsymbol{\zeta}| - (\widetilde{\lambda}+1)\tau} < 1. \tag{4.31}$$

Выбирая $\gamma > 0$ и $\widetilde{\lambda} > 0$ так, чтобы было выполнено неравенство (4.31), используя неравенства (4.29), (4.30) и лемму Беппо Леви, получаем

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\bigg(e^{V_{\nu(t)}}; \frac{|\boldsymbol{Z}(t)|}{t} \geqslant M\bigg) \leqslant \mathbf{E}\bigg(\frac{e^{V_{\nu(t)} + \gamma|\boldsymbol{Z}_{\nu(t)}| - \widetilde{\lambda} T_{\nu(t)}}}{e^{M\gamma t - \widetilde{\lambda} t}}\bigg) \leqslant \\
&\leqslant e^{-M\gamma t + \widetilde{\lambda} t} + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}\bigg(\frac{e^{V_k + \gamma|\boldsymbol{Z}_k| - \widetilde{\lambda} T_k}}{e^{M\gamma t - \widetilde{\lambda} t}};\ \nu(t) = k\bigg) \leqslant \\
&\leqslant e^{-M\gamma t + \widetilde{\lambda} t} + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}\bigg(\frac{e^{V_k + \gamma|\boldsymbol{Z}_k| - (\widetilde{\lambda}+1) T_k}}{e^{M\gamma t - (\widetilde{\lambda}+1) t}}\bigg) \leqslant \\
&\leqslant e^{-M\gamma t + \widetilde{\lambda} t} + e^{-t(M\gamma - \widetilde{\lambda} - 1)} \sum_{k=1}^{\infty} \big(\mathbf{E}\, e^{\upsilon + \gamma|\boldsymbol{\zeta}| - (\widetilde{\lambda}+1)\tau}\big)^k \leqslant \\
&\leqslant \Big(1 + \frac{u}{1-u}\Big) e^{-t(M\gamma - \widetilde{\lambda} - 1)}.
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Используя неравенство (4.32), выбирая $M = \dfrac{N + \widetilde{\lambda} + 1}{\gamma}$, получаем

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{E}\bigg(e^{V_{\nu(t)}}; \frac{|\boldsymbol{Z}(t)|}{t} \geqslant M\bigg) \leqslant -M\gamma + \widetilde{\lambda} + 1 = -N. \quad ▲$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Могульский А.А., Прокопенко Е.И.* Принцип больших уклонений в фазовом пространстве для многомерного первого обобщенного процесса восстановления // Сиб. электрон. матем. изв. 2019. Т. 16. С. 1464–1477. `https://doi.org/10.33048/semi.2019.16.101`
2. *Могульский А.А., Прокопенко Е.И.* Принцип больших уклонений в фазовом пространстве для многомерного второго обобщенного процесса восстановления // Сиб. электрон. матем. изв. 2019. Т. 16. С. 1478–1492. `https://doi.org/10.33048/semi.2019.16.102`

3. *Tsirelson B.* From Uniform Renewal Theorem to Uniform Large and Moderate Deviations for Renewal-Reward Processes // Electron. Commun. Probab. 2013. V. 18. № 52. P. 1–13. https://doi.org/10.1214/ECP.v18-2719
4. *Боровков А.А., Могульский А.А.* Интегро-локальные предельные теоремы для обобщенных процессов восстановления при выполнении условия Крамера. I, II // Сиб. матем. журн. 2018. Т. 59. № 3. С. 491–513. https://doi.org/10.17377/smzh.2018.59.302; № 4. С. 736–758. https://doi.org/10.17377/smzh.2018.59.402
5. *Могульский А.А., Прокопенко Е.И.* Интегро-локальные теоремы для многомерных обобщенных процессов восстановления при моментном условии Крамера. I, II, III // Сиб. электрон. матем. изв. 2018. Т. 15. С. 475–502. https://doi.org/10.17377/semi.2018.15.041; С. 503–527. https://doi.org/10.17377/semi.2018.15.042; С. 528–553. https://doi.org/10.17377/semi.2018.15.043
6. *Могульский А.А., Прокопенко Е.И.* Локальные теоремы для арифметических многомерных обобщенных процесов восстановления при выполнении условия Крамера // Матем. тр. 2019. Т. 22. № 2. С. 106–133. https://doi.org/10.33048/mattrudy.2019.22.207
7. *Logachov A., Mogulskii A., Prokopenko E., Yambartsev A.* Local Theorems for (Multidimensional) Additive Functionals of Semi-Markov Chains // Stochastic Process. Appl. 2021. V. 137. P. 149–166. https://doi.org/10.1016/j.spa.2021.03.011
8. *Могульский А.А., Прокопенко Е.И.* Принцип больших уклонений для конечномерных распределений многомерных обобщенных процессов восстановления // Матем. тр. 2020. V. 23. № 2. С. 148–176. https://doi.org/10.33048/mattrudy.2020.23.206
9. *Логачёв А.В., Могульский А.А.* Локальные теоремы для конечномерных приращений арифметических многомерных обобщенных процессов восстановления при выполнении условия Крамера // Сиб. электрон. матем. изв. 2020. Т. 17. С. 1766–1786. https://doi.org/10.33048/semi.2020.17.120
10. *Боровков А.А., Могульский А.А.* Принципы больших уклонений для траектории обобщенных процессов восстановления. I, II // Теория вероятн. и ее примен. 2015. Т. 60. № 2. С. 227–247. https://doi.org/10.4213/tvp4617; № 3. С. 417–438. https://doi.org/10.4213/tvp4631
11. *Logachov A.V., Mogulskii A.A.* Anscombe-type Theorem and Moderate Deviations for Trajectories of a Compound Renewal Process // J. Math. Sci. (N.Y.). 2018. V. 229. P. 36–50. https://doi.org/10.1007/s10958-018-3661-z
12. *Могульский А.А.* Расширенный принцип больших уклонений для траекторий обобщенного процесса восстановления // Матем. тр. 2021. Т. 24. № 1. С. 142–174. https://doi.org/10.33048/mattrudy.2021.24.106
13. *Lefevere R., Mariani M., Zambotti L.* Large Deviations for Renewal Processes // Stochastic Process. Appl. 2011. V. 121. № 10. P. 2243–2271. https://doi.org/10.1016/j.spa.2011.06.005
14. *Бакай Г.А.* Большие уклонения обрывающихся многомерных обобщенных процессов восстановления // Теория вероятн. и ее примен. 2021. Т. 66. № 2. С. 261–283. https://doi.org/10.1016/j.spa.2011.06.005
15. *Zamparo M.* Large Deviations in Renewal Models of Statistical Mechanics // J. Phys. A: Math. Theor. 2019. V. 52. № 49. P. 495004 (31 pp.). https://doi.org/10.1088/1751-8121/ab523f
16. *Zamparo M.* Large Deviations in Discrete-Time Renewal Theory // Stochastic Process. Appl. 2021. V. 139. P. 80–109. https://doi.org/10.1016/j.spa.2021.04.014
17. *Giacomin G.* Random Polymer Models. London: Imperial College Press, 2007.
18. *den Hollander F.* Random Polymers. New York: Springer, 2009.
19. *Zălinescu C.* Convex Analysis in General Vector Spaces. River Edge, N.J.; London: World Sci., 2002.
20. *Могульский А.А., Прокопенко Е.И.* Функция уклонений и базовая функция для многомерного обобщенного процесса восстановления // Сиб. электрон. матем. изв. 2019. Т. 16. С. 1449–1463. https://doi.org/10.33048/semi.2019.16.100

21. *Logachov A., Mogulskii A., Prokopenko E.* Large Deviations Principle for Terminating Multidimensional Compound Renewal Processes with Application to Polymer Pinning Models, `arxiv.org/abs/2112.09640 [math.PR]`, 2021.

22. *Боровков А.А.* Асимптотический анализ случайных блужданий. Быстроубывающие распределения приращений. М.: Физматлит, 2013.

Логачёв Артём Васильевич
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
Новосибирский государственный университет
Новосибирский государственный технический университет
`omboldovskaya@mail.ru`
Могульский Анатолий Альфредович
Прокопенко Евгений Игоревич
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
Новосибирский государственный университет
`mogul@math.nsc.ru`
`evgenii.prokopenko@gmail.com`

Поступила в редакцию
23.12.2021
После доработки
28.03.2022
Принята к публикации
30.03.2022