ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

Том 58 **2022** **Вып. 3**

УДК 621.391 : 519.72

 В.В. Прелов

ОДНА ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВЗАИМНОЙ ИНФОРМАЦИИ

Рассматривается задача о нахождении максимума взаимной информации $I(X;Y)$ двух случайных величин X и Y с конечным числом значений при условии, что задана лишь величина их склеивания, т.е. вероятность $\Pr\{X = Y\}$. Получены явные нижние и верхние границы для указанного максимума, являющиеся в некоторых случаях оптимальными.

Ключевые слова: взаимная информация, склеивание дискретных распределений вероятностей, вероятность ошибки.

DOI: 10.31857/S0555292322030020, **EDN:** DZXJIO

Посвящается памяти проф. Э.М. Габидулина

Рассмотрению различных экстремальных задач, связанных с взаимной информацией $I(X;Y)$ случайных величин X и Y, посвящено много работ. В частности, классическая задача о нахождении минимума $I(X;Y)$ дискретных случайных величин X и Y при условии, что заданы распределение вероятностей случайной величины X и вероятность ошибки $\Pr\{X \neq Y\} = \varepsilon$, известная как задача об ε-энтропии X, рассматривалась в [1–3]. Ряд других подобных экстремальных задач рассматривался, например, в [4–7], где также можно найти библиографию по этой тематике.

В настоящей статье рассматривается задача о получении явных нижних и верхних границ, а в некоторых случаях и точных значений для максимума взаимной информации $I(X;Y)$ двух случайных величин X и Y с конечным числом значений при условии, что задана лишь вероятность их склеивания, т.е. вероятность $\alpha = \Pr\{X = Y\}$ (или, что эквивалентно, задана вероятность ошибки $\varepsilon = \Pr\{X \neq Y\} = 1 - \alpha$).

Для формулировки полученных результатов введем некоторые определения и обозначения. Будем всегда предполагать, что рассматриваемые ниже случайные величины X и Y принимают n различных значений в некотором множестве $\mathcal{N}$, $|\mathcal{N}| = n$, $n \geqslant 2$. Для заданного параметра α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, положим

$$I_{\max}(\alpha) = \max_{(X,Y)\colon \Pr\{X=Y\}=\alpha} I(X;Y), \tag{1}$$

где максимум берется по всевозможным совместным распределениям случайных величин X и Y со значениями в множестве $\mathcal{N}$, таким что $\Pr\{X = Y\} = \alpha$. Введем также функции

$$H_k(x) = -x\ln\frac{x}{k} - (1-x)\ln\frac{1-x}{n-k}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{2}$$

$$J(x) = (1+x)\ln n - (1+x)\ln(1+x) + x\ln x, \quad x \geqslant 0, \tag{3}$$

$$\varphi(x,y) = (x+y)\ln(x+y) - x\ln x - y\ln y, \quad 0 \leqslant x, y \leqslant 1. \tag{4}$$

Заметим, что $H_k(p)$ – это энтропия распределения вероятностей $P = \{p_i,\ i \in \mathcal{N}\}$, где

$$p_i = \begin{cases} \dfrac{p}{k} & \text{при} \quad i = 1, 2, \ldots, k, \\ \dfrac{1-p}{n-k} & \text{при} \quad i = k+1, k+2, \ldots, n. \end{cases}$$

Сформулируем теперь основные результаты статьи.

Предложение 1. *Величина $I_{\max}(\alpha)$ принимает свое максимальное значение $\ln n$ тогда и только тогда, когда*

$$\alpha = \frac{k}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-2, n$$

(т.е. k – любое целое между 0 и n, кроме $k = n-1$).

Доказательства этого и нижеследующих предложений приведены в Приложении. В следующем предложении рассматриваются малые значения α.

Предложение 2. *Для любого α, $0 \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{1}{n}$, справедливы следующие утверждения:*

- *Для $I_{\max}(\alpha)$ справедлива нижняя граница*

$$I_{\max}(\alpha) \geqslant \begin{cases} J(\alpha), & \text{если } 0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha^*, \\ H_1(\alpha), & \text{если } \alpha^* \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{1}{n}, \end{cases} \tag{5}$$

  где $H_1(\alpha)$ и $J(\alpha)$ определены в (2) и (3), а α^*, $0 < \alpha^* < \dfrac{1}{3n-1}$, – единственное решение уравнения $H_1(\alpha^*) = J(\alpha^*)$ на указанном интервале;

- *Нижняя граница в (5) является оптимальной на отрезке $\alpha \in [0, \alpha_*]$, т.е.*

$$I_{\max}(\alpha) = J(\alpha), \quad \text{если } 0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_*, \tag{6}$$

  где α_*, $0 < \alpha_* < \alpha^*$, – единственное решение уравнения $H_1(2\alpha_*) = J(\alpha_*)$ на указанном интервале;

- *Для $I_{\max}(\alpha)$ справедлива верхняя граница*

$$I_{\max}(\alpha) \leqslant H_1(2\alpha), \quad \text{если } \alpha_* \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{3n-1}. \tag{7}$$

Замечание 1. Естественной нижней границей для $I_{\max}(\alpha)$ может служить величина $\max\limits_{(X,Y)\colon \Pr\{X=Y\}=\alpha} I(X;Y)$ при условии, что X имеет равномерное распределение на множестве $\mathcal{N}$. Из результатов [7, следствие 2] следует, что такая граница имеет вид

$$I_{\max}(\alpha) \geqslant \begin{cases} \ln n - \varphi\Big(\dfrac{1}{n}, \alpha\Big), & \text{если } 0 \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{1}{2n}, \\ \ln n - \varphi\Big(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n} - \alpha\Big), & \text{если } \dfrac{1}{2n} \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{1}{n}, \end{cases} \tag{8}$$

где функция $\varphi(\cdot\,,\cdot)$ определена в (4). Однако эта нижняя граница (8) слабее, чем нижняя граница (5). Действительно, для этого следует лишь убедиться, что при любом расположении параметра α^* внутри отрезка $\Big[0, \dfrac{1}{n}\Big]$ (хотя при доказательстве формулы (5) будет показано, что на самом деле всегда имеет место неравенство $\alpha^* < \dfrac{1}{3n-1}$) справедливы неравенства

$$J(\alpha) \geqslant \ln n - \varphi\Big(\frac{1}{n}, \alpha\Big), \quad \text{если } 0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{2n}$$

и

$$H_1(\alpha) \geqslant \ln n - \varphi\Big(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} - \alpha\Big), \quad \text{если } \frac{1}{2n} \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{n}.$$

Первое из них следует из того, что разность

$$J(\alpha) - \ln n + \varphi\Big(\frac{1}{n}, \alpha\Big)$$

возрастает по α, а при $\alpha = 0$ она равна нулю, а второе – из того, что разность

$$H_1(\alpha) - \ln n + \varphi\Big(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} - \alpha\Big),$$

как нетрудно проверить, убывает по α, а при $\alpha = \dfrac{1}{n}$ она тоже равна нулю.

При этом заметим, что в формуле (22) следствия 2 в [7] имеются опечатки, поэтому приведем здесь исправленный вид этой формулы, которая понадобится нам и в дальнейшем. А именно, утверждение, содержащее эту формулу, должно выглядеть следующим образом:

Если X имеет равномерное распределение на множестве из n элементов и $1 - \varepsilon = \dfrac{m}{n} + \beta$, $0 \leqslant \beta \leqslant \dfrac{1}{n}$, $m = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, то

$$H^{(2)}_{\min}(P, \varepsilon) = \begin{cases} \varphi\Big(\dfrac{1}{n}, \varepsilon\Big), & \textit{если } m = n-1, \\ \varphi\Big(\dfrac{1}{n}, \beta\Big), & \textit{если } m = n-2 \textit{ или } m < n-2 \textit{ и } 0 \leqslant \beta \leqslant \dfrac{1}{2n}, \\ \varphi\Big(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n} - \beta\Big), & \textit{если } m < n-2 \textit{ и } \dfrac{1}{2n} \leqslant \beta \leqslant \dfrac{1}{n}. \end{cases} \tag{9}$$

Напомним также, что в [7] использовалось определение

$$H^{(2)}_{\min}(P, \varepsilon) = \min_{P_{Y\,|\,X}\colon \Pr\{Y \neq X\} = \varepsilon} H(X\,|\,Y), \tag{10}$$

где P – заданное распределение вероятностей случайной величины X, а $H(X\,|\,Y)$ – условная энтропия X при заданном Y.

Большим значениям α посвящено

П р е д л о ж е н и е 3. *Для любого α, $1 - \dfrac{1}{n} \leqslant \alpha \leqslant 1$, справедливы следующие утверждения*:

- *Для $I_{\max}(\alpha)$ и любого натурального n, $3 \leqslant n \leqslant 14$, справедлива нижняя граница*

$$I_{\max}(\alpha) \geqslant \begin{cases} J(1-\alpha), & \textit{если } 1 - \dfrac{1}{2n-1} \leqslant \alpha \leqslant 1, \\ H_1(1-\alpha) - \varphi(1-\alpha, 1-\alpha), & \textit{если } \widehat{\alpha} \leqslant \alpha \leqslant 1 - \dfrac{1}{2n-1}, \\ H_2(1-\alpha), & \textit{если } 1 - \dfrac{1}{n} \leqslant \alpha \leqslant \widehat{\alpha}, \end{cases} \tag{11}$$

где $\widehat{\alpha}$, $1-\dfrac{1}{n}<\widehat{\alpha}<1-\dfrac{1}{2n-1}$, *– единственное решение уравнения*

$$H_1(1-\widehat{\alpha})-\varphi(1-\widehat{\alpha},1-\widehat{\alpha})=H_2(1-\widehat{\alpha})$$

на указанном интервале;

- *Для* $I_{\max}(\alpha)$ *и любого натурального* n, $n\geqslant 15$, *справедлива нижняя граница*

$$I_{\max}(\alpha)\geqslant\begin{cases}J(1-\alpha), & \text{если } \widetilde{\alpha}\leqslant\alpha\leqslant 1,\\ H_2(1-\alpha), & \text{если } 1-\dfrac{1}{n}\leqslant\alpha\leqslant\widetilde{\alpha},\end{cases}\tag{12}$$

где $\widetilde{\alpha}$, $1-\dfrac{1}{2n-1}<\widetilde{\alpha}<1$, *– единственное решение уравнения*

$$J(1-\widetilde{\alpha})=H_2(1-\widetilde{\alpha})$$

на указанном интервале;

- *Нижние границы в* (11) *и* (12) *являются оптимальными на отрезке* $\alpha\in[\overline{\alpha},1]$, *т.е.*

$$I_{\max}(\alpha)=J(1-\alpha),\quad \text{если } \overline{\alpha}\leqslant\alpha\leqslant 1,\tag{13}$$

где $\overline{\alpha}$, $\widetilde{\alpha}<\overline{\alpha}<1$, *– единственное решение уравнения*

$$H_1(1-\overline{\alpha})=J(1-\overline{\alpha})$$

на указанном интервале (заметим, что $\overline{\alpha}=1-\alpha^*$ *– см. предложение* 2);

- *Для* $I_{\max}(\alpha)$ *и любого натурального* n, $n\geqslant 3$, *справедлива верхняя граница*

$$I_{\max}(\alpha)\leqslant H_1(1-\alpha),\quad \text{если } 1-\frac{1}{2n-1}\leqslant\alpha\leqslant\overline{\alpha}.\tag{14}$$

Замечание 2. Как и в случае малых значений α, представляется естественным сравнить нижние границы (11) и (12) для $I_{\max}(\alpha)$ при больших значениях α со следующей нижней границей:

$$I_{\max}(\alpha)\geqslant\ln n-\varphi\Big(\frac{1}{n},1-\alpha\Big),\quad \text{если } 1-\frac{1}{n}\leqslant\alpha\leqslant 1,\tag{15}$$

полученной при условии, что X имеет равномерное распределение, поскольку в этом случае известно точное значение для $\min\limits_{Y:\,\Pr\{X=Y\}=\alpha}H(X\,|\,Y)$ (см. (9)). Нетрудно показать, что нижняя граница (15) слабее нижних границ (11) и (12). Для этого следует вначале заметить, что при доказательстве предложения 3 будет доказана формула (П.22). Поэтому, чтобы доказать, что (15) слабее (11) и (12), достаточно показать, что при любом $n\geqslant 3$ справедливы неравенства

$$J(1-\alpha)\geqslant\ln n-\varphi\Big(\frac{1}{n},1-\alpha\Big),\quad \text{если } 1-\frac{1}{2n-1}\leqslant\alpha\leqslant 1,\tag{16}$$

и

$$\begin{gathered}H_1(1-\alpha)-\varphi(1-\alpha,1-\alpha)\geqslant\ln n-\varphi\Big(\frac{1}{n},1-\alpha\Big),\\ \text{если } 1-\frac{1}{n}\leqslant\alpha\leqslant 1-\frac{1}{2n-1}.\end{gathered}\tag{17}$$

Неравенство (16) следует из того, что разность его левой и правой частей убывает по α, а при $\alpha=1$ она равна нулю. Для доказательства (17) следует заметить, что разность его левой и правой частей есть вогнутая функция α, при $\alpha = 1 - \dfrac{1}{n}$ она равна нулю, а при $\alpha = 1 - \dfrac{1}{2n-1}$ положительна, так как

$$H_1\Big(\frac{1}{2n-1}\Big) - \varphi\Big(\frac{1}{2n-1}, \frac{1}{2n-1}\Big) = J\Big(\frac{1}{2n-1}\Big) > \ln n - \varphi\Big(\frac{1}{n}, \frac{1}{2n-1}\Big)$$

согласно (16).

В следующем предложении рассматриваются средние значения параметра α.

Предложение 4. *Для любого α, $\dfrac{1}{n} < \alpha < 1-\dfrac{1}{n}$, справедливы следующие нижние границы*:

$$I_{\max}(\alpha) \geqslant \begin{cases} H_k(\alpha), & \text{если } \dfrac{k}{n} < \alpha \leqslant \widehat{\alpha}(k) \text{ и } k \leqslant n-3, \\ H_{k+1}(\alpha), & \text{если } \widehat{\alpha}(k) \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{k+1}{n} \text{ и } k \leqslant n-3, \\ H_{n-2}(\alpha), & \text{если } \dfrac{n-2}{n} < \alpha < \dfrac{n-1}{n}, \end{cases} \tag{18}$$

где $\widehat{\alpha}(k) = \ln\Big(1 + \dfrac{1}{n-k-1}\Big) \,/\, \ln\Big(1 + \dfrac{n}{k(n-k-1)}\Big)$, *и*

$$I_{\max}(\alpha) \geqslant \begin{cases} \ln n - \varphi\Big(\dfrac{1}{n}, \alpha - \dfrac{k}{n}\Big), & \text{если } \dfrac{k}{n} < \alpha \leqslant \dfrac{2k+1}{2n} \text{ и } k \leqslant n-3, \\ \ln n - \varphi\Big(\dfrac{1}{n}, \dfrac{k+1}{n} - \alpha\Big), & \text{если } \dfrac{2k+1}{2n} \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{k+1}{n} \text{ и } k \leqslant n-3, \\ \ln n - \varphi\Big(\dfrac{1}{n}, \alpha - \dfrac{n-2}{n}\Big), & \text{если } \dfrac{n-2}{n} < \alpha < \dfrac{n-1}{n}. \end{cases} \tag{19}$$

При этом нижняя граница (18) *лучше нижней границы* (19), *полученной при условии, что X имеет равномерное распределение* (*см.* (9)). *Более того, нижняя граница* (18) *является оптимальной, т.е. в* (18) *имеет место знак равенства, если* $\alpha = \dfrac{k}{n}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-2, n$ (*см. также предложение* 1).

Замечание 3. Отметим также еще одну естественную и простую нижнюю границу для $I_{\max}(\alpha)$, справедливую для всех α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. А именно, справедливо неравенство

$$I_{\max}(\alpha) \geqslant \ln n - (1-\alpha)\ln(n-1) - h(\alpha), \tag{20}$$

где

$$h(x) = -x\ln x - (1-x)\ln(1-x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

– двоичная энтропия. Неравенство (20) является прямым следствием известного неравенства Фано

$$H(X\,|\,Y) \leqslant P_e \ln(n-1) + h(P_e), \quad \text{где} \quad P_e = \Pr\{X \neq Y\}. \tag{21}$$

Однако граница (20) слабее приведенных выше нижних границ для $I_{\max}(\alpha)$ при равномерном распределении X, так как в последнем случае известно точное значение для минимума условной энтропии $H(X\,|\,Y)$ (см. (9)), в то время как неравенство Фано дает лишь оценку сверху для $H(X\,|\,Y)$, не зависящую от распределения X. А нижние границы для $I_{\max}(\alpha)$ при равномерном распределении X в свою очередь слабее наших нижних границ (5), (11), (12) и (18) для $I_{\max}(\alpha)$, как указано в замечаниях 1 и 2 и предложении 4.

Доказательство предложения 1. Утверждение этого предложения почти очевидно. Действительно, информация $I(X;Y)$ принимает свое максимальное значение $\ln n$ тогда и только тогда, когда X имеет равномерное распределение, а условная энтропия $H(X\,|\,Y)$ равна нулю, что означает, что X должно быть детерминированной функцией Y. Поэтому $I_{\max}(\alpha) = \ln n$ тогда и только тогда, когда в $(n \times n)$-матрице совместного распределения X и Y можно расставить n чисел $\dfrac{1}{n}$ таким образом, чтобы в каждой строке и в каждом столбце этой матрицы стояло ровно по одному элементу $\dfrac{1}{n}$, а сумма диагональных элементов была равна α (а все остальные элементы этой матрицы должны быть равны нулю). Ясно, что это можно сделать, только если $\alpha = \dfrac{k}{n}$, где k – любое целое от 0 до n, кроме $k = n-1$. ▲

Доказательство предложения 2. Прежде всего отметим, что всюду в дальнейшем, когда речь идет о распределении вероятностей $P_X = P = \{p_i,\, i \in \mathcal{N}\}$ случайной величины X, будем для удобства считать, что компоненты p_i этого распределения упорядочены по убыванию, так что $p_1 \geqslant p_2 \geqslant \ldots \geqslant p_n > 0$. В частности, всегда будем считать, что $p_{\min} = \min\limits_{i\in\mathcal{N}} p_i = p_n$.

Для доказательства нижней границы (5) воспользуемся следующим результатом из [7, следствие 2]: для заданного распределения вероятностей $P = \{p_i,\, i \in \mathcal{N}\}$ случайной величины X справедливо равенство

$$\min_{Y:\,\Pr\{Y=X\}=\alpha} H(X\,|\,Y) = \begin{cases} \varphi(\alpha, p_n), & \text{если } 0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_0,\\ \varphi(p_n-\alpha, p_{n-1}), & \text{если } \alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant p_n, \end{cases} \tag{П.1}$$

где α_0 – решение уравнения

$$\varphi(p_n - \alpha_0, p_{n-1}) = \varphi(\alpha_0, p_n), \tag{П.2}$$

а функция $\varphi(x,y)$ определена в (4). Так как $\varphi(x,y)$ возрастает по каждому из своих аргументов, а мы рассматриваем минимум по всем распределениям X и Y, таким что $\Pr\{Y = X\} = \alpha$ и задана только минимальная компонента p_n распределения P, то из (П.1) и (П.2) следует, что указанный минимум достигается на любом P, у которого $p_{n-1} = p_n$, а тогда получаем,что

$$\min_{(X,Y):\,\Pr\{Y=X\}=\alpha,\; p_{\min}=p_n} H(X\,|\,Y) = \varphi(\alpha, p_n), \qquad \text{если } 0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{p_n}{2}, \tag{П.3}$$

$$\min_{(X,Y):\,\Pr\{Y=X\}=\alpha,\; p_{\min}=p_n} H(X\,|\,Y) = \varphi(p_n-\alpha, p_n) \leqslant \leqslant \varphi(\alpha, p_n), \qquad \text{если } \frac{p_n}{2} \leqslant \alpha \leqslant p_n. \tag{П.4}$$

Теперь, учитывая (П.3) и (П.4), имеем

$$\begin{aligned} I_{\max}(\alpha) &\geqslant \max_{p_n:\,\alpha\leqslant p_n\leqslant\frac{1}{n}}\ \max_{X:\,p_{\min}=p_n}\Big[H(X) - \min_{Y:\,\Pr\{Y=X\}=\alpha} H(X\,|\,Y)\Big] \geqslant \\ &\geqslant \max_{p_n:\,\alpha\leqslant p_n\leqslant\frac{1}{n}}\big[H_1(p_n) - \varphi(\alpha,p_n)\big], \end{aligned} \tag{П.5}$$

где $H_1(\cdot)$ определена в (2). При выводе (П.5) мы также воспользовались тем, что $\max\limits_{X:\,p_{\min}=p_n} H(X) = H_1(p_n)$. Нетрудно убедиться, что $H_1(p_n) - \varphi(\alpha, p_n)$ является вогнутой функцией от p_n, и ее максимум на отрезке $p_n \in \left[\alpha, \frac{1}{n}\right]$ достигается в точке

$$p_n = p_n^*(\alpha) = \frac{1}{n} - \frac{n-1}{n}\alpha,$$

если $p_n^*(\alpha) \in \left[\alpha, \frac{1}{n}\right]$, т.е. если $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{2n-1}$. Если же $\frac{1}{2n-1} \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{n}$, то максимум $H_1(p_n) - \varphi(\alpha, p_n)$ достигается при $p_n = \alpha$. Нетрудно убедиться, что

$$H_1(p_n^*(\alpha)) - \varphi(\alpha, p_n^*(\alpha)) = J(\alpha),$$

где $J(\cdot)$ определено в (3). Таким образом, из (П.5) теперь следует, что

$$I_{\max}(\alpha) \geqslant \begin{cases} J(\alpha), & \text{если } 0 \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{1}{2n-1}, \\ H_1(\alpha) - \varphi(\alpha, \alpha), & \text{если } \dfrac{1}{2n-1} < \alpha \leqslant \dfrac{1}{n}. \end{cases} \tag{П.6}$$

Теперь заметим, что для любых $\alpha \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$ справедлива другая нижняя граница:

$$I_{\max}(\alpha) \geqslant H_1(\alpha), \quad \text{если } \alpha \in \left[0, \frac{1}{n}\right]. \tag{П.7}$$

Действительно, $I(X;Y) = H_1(\alpha)$, если компоненты p_{ij} матрицы $M = \|p_{ij}\|_{i,j=1}^n$ совместного распределения X и Y имеют вид

$$p_{ij} = \begin{cases} \alpha, & \text{если } i = j = 1, \\ \dfrac{1-\alpha}{n-1}, & \text{если } j = i+1,\ i = 2, 3, \dots, n-1, \text{ и если } i = n,\ j = 2, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

поскольку в этом случае $H(X) = H_1(\alpha)$, а $H(X \,|\, Y) = 0$.

Очевидно, что нижняя граница (П.7) лучше (П.6), если $\frac{1}{2n-1} < \alpha \leqslant \frac{1}{n}$, так как $\varphi(\alpha, \alpha) > 0$ при $\alpha > 0$. Поэтому необходимо сравнить эти границы также и при $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2n-1}\right]$. Имеем

$$[J(\alpha) - H_1(\alpha)]'_\alpha = \ln \frac{n(n-1)\alpha^2}{1-\alpha^2} < 0 \quad \text{при} \quad \alpha \in \left[0, \frac{1}{2n-1}\right],$$

так как $\frac{n(n-1)\alpha^2}{1-\alpha^2} \leqslant \frac{1}{4}$. Значит, функция $J(\alpha) - H_1(\alpha)$ убывает по α, а при $\alpha = 0$ она положительна. Покажем теперь, что

$$J\left(\frac{1}{3n-1}\right) - H_1\left(\frac{1}{3n-1}\right) < 0.$$

Действительно, нетрудно убедиться, что

$$J\left(\frac{1}{3n-1}\right) = \ln(3n-1) - \frac{3n-2}{3n-1}\ln 3 - \frac{2\ln 3}{3n-1}, \tag{П.8}$$

$$H_1\left(\frac{1}{3n-1}\right) = \ln(3n-1) - \frac{3n-2}{3n-1}\ln 3 - \frac{3n-2}{3n-1}\ln\left(1 + \frac{1}{3n-3}\right). \tag{П.9}$$

Неравенство $J\Big(\dfrac{1}{3n-1}\Big) - H_1\Big(\dfrac{1}{3n-1}\Big) < 0$ следует из того, что

$$\frac{3n-2}{3n-1}\ln\left(1+\frac{1}{3n-3}\right) < \frac{2\ln 3}{3n-1}.$$

Таким образом, имеем

$$J(\alpha) > H_1(\alpha), \quad \text{если } 0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha^*,$$
$$J(\alpha) < H_1(\alpha), \quad \text{если } \alpha^* < \alpha < \frac{1}{3n-1},$$

где α^* – единственное решение уравнения $J(\alpha^*) = H_1(\alpha^*)$ на интервале $0 \leqslant \alpha^{(*)} < < \dfrac{1}{3n-1}$. Нижняя граница (5) доказана.

Докажем теперь равенство (6) и верхнюю границу (7). Для этого заметим, что

$$I_{\max}(\alpha) = \max\{J_1(\alpha), J_2(\alpha)\}, \quad \text{если } 0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{2n}, \tag{П.10}$$

где

$$J_1(\alpha) = \max_{p_n\colon 2\alpha \leqslant p_n \leqslant \frac{1}{n}} \ \max_{X\colon p_{\min}=p_n}\Big[H(X) - \min_{Y\colon \Pr\{Y=X\}=\alpha} H(X\,|\,Y)\Big], \tag{П.11}$$

$$J_2(\alpha) = \max_{p_n\colon p_n \leqslant 2\alpha} \ \max_{X\colon p_{\min}=p_n}\Big[H(X) - \min_{Y\colon \Pr\{Y=X\}=\alpha} H(X\,|\,Y)\Big]. \tag{П.12}$$

Согласно (П.3) имеем

$$\min_{Y\colon \Pr\{Y=X\}=\alpha} H(X\,|\,Y) = \varphi(\alpha, p_n), \quad \text{если } p_n \geqslant 2\alpha,$$

и мы видели, что

$$\max_{p_n\colon 2\alpha \leqslant p_n \leqslant \frac{1}{n}} \ \max_{X\colon p_{\min}=p_n}[H(X) - \varphi(\alpha, p_n)] = J(\alpha)$$

и достигается в точке

$$p_n = p_n^*(\alpha) = \frac{1}{n} - \frac{n-1}{n}\alpha.$$

Однако последнее равенство для максимумов верно, лишь если $p_n^*(\alpha)$ удовлетворяет нашему ограничению $p_n^*(\alpha) \geqslant 2\alpha$ (ранее у нас было другое ограничение $p_n^*(\alpha) \geqslant \alpha$), что эквивалентно условию $0 \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{1}{3n-1}$. Если же $\dfrac{1}{3n-1} \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{1}{2n}$, то

$$\max_{p_n\colon 2\alpha \leqslant p_n \leqslant \frac{1}{n}} \ \max_{X\colon p_{\min}=p_n}[H(X) - \varphi(\alpha, p_n)]$$

достигается в точке $p_n = 2\alpha$. Таким образом, справедливо равенство

$$J_1(\alpha) = \begin{cases} J(\alpha), & \text{если } 0 \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{1}{3n-1}, \\[2ex] H_1(2\alpha) - \varphi(\alpha, 2\alpha), & \text{если } \dfrac{1}{3n-1} < \alpha \leqslant \dfrac{1}{2n}. \end{cases} \tag{П.13}$$

В случае, когда $p_n \leqslant 2\alpha$, точное значение

$$\max_{p_n\colon p_n \leqslant 2\alpha} \ \max_{X\colon p_{\min}=p_n}\Big[H(X) - \min_{Y\colon \Pr\{Y=X\}=\alpha} H(X\,|\,Y)\Big]$$

неизвестно, и поэтому можно лишь утверждать, что

$$J_2(\alpha) \leqslant \max_{X:\, p_n \leqslant 2\alpha} H(X) = H_1(2\alpha), \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{2n}. \tag{П.14}$$

Поэтому из (П.10)–(П.14) теперь следует, что

$$I_{\max}(\alpha) = J(\alpha), \quad \text{если } J(\alpha) \geqslant H_1(2\alpha). \tag{П.15}$$

Найдем ограничения на α, при которых $J(\alpha) \geqslant H_1(2\alpha)$. Нетрудно убедиться, что разность $J(\alpha) - H_1(2\alpha)$ убывает по α, при $\alpha = 0$ она положительна, а при $\alpha = \dfrac{1}{3n-1}$ отрицательна. Действительно, имеем

$$J\Big(\frac{1}{3n-1}\Big) = \ln(3n-1) - \frac{3n}{3n-1}\ln 3 \quad (\text{см. (П.8)}),$$
$$H_1\Big(\frac{2}{3n-1}\Big) = \ln(3n-1) - \frac{3n}{3n-1}\ln 3 + \frac{1}{3n-1}\ln\frac{27}{4} > J\Big(\frac{1}{3n-1}\Big).$$

Поэтому $J(\alpha) \geqslant H_1(2\alpha)$ при $0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_*$ и $J(\alpha) \leqslant H_1(2\alpha)$ при $\alpha_* < \alpha < \dfrac{1}{3n-1}$, где α_* – решение уравнения $J(\alpha_*) = H_1(2\alpha_*)$, причем очевидно, что $\alpha_* < \alpha^* < \dfrac{1}{3n-1}$, где α^* – решение уравнения $J(\alpha^*) = H_1(\alpha^*)$. Теперь из (П.13)–(П.15) следует равенство (6) и верхняя граница (7).

В заключение отметим, что второе из равенств в (П.13) приводит к нижней границе

$$I_{\max}(\alpha) \geqslant H_1(2\alpha) - \varphi(\alpha, 2\alpha), \quad \text{если } \frac{1}{3n-1} \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{2n}, \tag{П.16}$$

которая, однако, слабее доказанной выше нижней границы (5). Для этого следует лишь убедиться, что

$$H_1(\alpha) > H_1(2\alpha) - \varphi(\alpha, 2\alpha), \quad \text{если } \frac{1}{3n-1} \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{2n}.$$

Нетрудно проверить, что разность $H_1(\alpha) - [H_1(2\alpha) - \varphi(\alpha, 2\alpha)]$ возрастает по α на отрезке $\alpha \in \big[\frac{1}{3n-1}, \frac{1}{2n}\big]$, а при $\alpha = \dfrac{1}{3n-1}$ она положительна. Действительно, легко убедиться, что на этом отрезке

$$[H_1(\alpha) - H_1(2\alpha) + \varphi(\alpha, 2\alpha)]'_\alpha = \ln\frac{27(n-1)\alpha(1-\alpha)}{(1-2\alpha)^2} > 0,$$

а

$$H_1\Big(\frac{1}{3n-1}\Big) - H_1\Big(\frac{2}{3n-1}\Big) + \varphi\Big(\frac{1}{3n-1}, \frac{2}{3n-1}\Big) =$$
$$= -\frac{3n-2}{3n-1}\ln\Big(1 + \frac{1}{3n-3}\Big) + \frac{2\ln 3}{3n-1} \geqslant 0.$$

На этом доказательство предложения 2 заканчивается. ▲

Д о к а з а т е л ь с т в о п р е д л о ж е н и я 3. Отметим сразу, что хотя доказательство этого предложения в идейном плане вполне аналогично вышеприведенному доказательству предложения 2, но оно имеет ряд существенных отличий. В частности, в рассматриваемом сейчас случае в отличие от предложения 2 нижние границы для $I_{\max}(\alpha)$ существенно различаются в зависимости от величины параметра n, когда $n \leqslant 14$ или когда $n \geqslant 15$.

Вначале снова воспользуемся следующим результатом из [7, следствие 2]: для заданного распределения вероятностей $P = \{p_i,\ i \in \mathcal{N}\}$ случайной величины X справедливо равенство

$$\min_{Y:\,\Pr\{Y=X\}=\alpha} H(X\,|\,Y) = \varphi(1-\alpha, p_n), \quad \text{если } 1-p_n \leqslant \alpha \leqslant 1. \tag{П.17}$$

Воспользовавшись (П.17), получаем

$$I_{\max}(\alpha) = \max\{J_1'(\alpha), J_2'(\alpha)\}, \tag{П.18}$$

где

$$\begin{aligned} J_1'(\alpha) &= \max_{p_n:\,1-\alpha\leqslant p_n\leqslant \frac{1}{n}} \max_{X:\,p_{\min}=p_n} \Big[H(X) - \min_{Y:\,\Pr\{Y=X\}=\alpha} H(X\,|\,Y)\Big] = \\ &= \max_{p_n:\,1-\alpha\leqslant p_n\leqslant \frac{1}{n}} [H_1(p_n) - \varphi(1-\alpha, p_n)], \end{aligned} \tag{П.19}$$

$$\begin{aligned} J_2'(\alpha) &= \max_{p_n:\,p_n\leqslant 1-\alpha} \max_{X:\,p_{\min}=p_n} \Big[H(X) - \min_{Y:\,\Pr\{Y=X\}=\alpha} H(X\,|\,Y)\Big] \leqslant \\ &\leqslant \max_{p_n:\,p_n\leqslant 1-\alpha} H(X) = H_1(1-\alpha). \end{aligned} \tag{П.20}$$

При доказательстве предложения 2 было показано, что

$$\max_{p_n:\,\alpha\leqslant p_n\leqslant \frac{1}{n}} [H_1(p_n) - \varphi(\alpha, p_n)] = \\ = \begin{cases} J(\alpha), & \text{если } 0 \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{1}{2n-1}, \\ H_1(\alpha) - \varphi(\alpha,\alpha), & \text{если } \dfrac{1}{2n-1} < \alpha \leqslant \dfrac{1}{n}, \end{cases} \tag{П.21}$$

и этот максимум достигается в точке

$$p_n = p_n^*(\alpha) = \frac{1}{n} - \frac{n-1}{n}\alpha,$$

если $0 \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{1}{2n-1}$, и в точке $p_n = \alpha$, если $\dfrac{1}{2n-1} \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{1}{n}$.

В рассматриваемом сейчас случае больших значений α нахождение максимума

$$\max_{p_n:\,1-\alpha\leqslant p_n\leqslant \frac{1}{n}} [H_1(p_n) - \varphi(1-\alpha, p_n)]$$

отличается от нахождения максимума в (П.21) лишь заменой параметра α на $1-\alpha$. Поэтому из (П.18) и (П.19) для $I_{\max}(\alpha)$ получаем следующую нижнюю границу:

$$I_{\max}(\alpha) \geqslant J_1'(\alpha) = \\ = \begin{cases} J(1-\alpha), & \text{если } 1 - \dfrac{1}{2n-1} \leqslant \alpha \leqslant 1, \\ H_1(1-\alpha) - \varphi(1-\alpha, 1-\alpha), & \text{если } 1 - \dfrac{1}{n} \leqslant \alpha \leqslant 1 - \dfrac{1}{2n-1}, \end{cases} \tag{П.22}$$

причем первое из этих равенств для $J_1'(\alpha)$ достигается в точке

$$p_n = p_n^*(1-\alpha) = \frac{1}{n} - \frac{n-1}{n}(1-\alpha),$$

а второе – в точке $p_n = 1-\alpha$.

Теперь заметим, что справедлива другая нижняя граница:

$$I_{\max}(\alpha) \geqslant H_2(1-\alpha) \quad \text{для всех } \alpha \in \Big[1-\frac{1}{n}, 1\Big]. \tag{П.23}$$

Действительно, эта нижняя граница следует из того, что $I(X;Y) = H_2(1-\alpha)$, если компоненты матрицы $M = \|p_{ij}\|_{i,j=1}^{n}$ совместного распределения X и Y задаются равенствами

$$p_{ij} = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{n-2}, & \text{если } i=j=1,2,\ldots,n-2, \\ \dfrac{1-\alpha}{2}, & \text{если } i=n-1,\ j=n \text{ и если } i=n,\ j=n-1, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

поскольку для этого совместного распределения $H(X) = H_2(1-\alpha)$ и $H(X\,|\,Y) = 0$. Отметим, что в отличие от случая малых значений α, когда была справедлива нижняя граница $I_{\max}(\alpha) \geqslant H_1(\alpha)$ (см. (П.7)), в данном случае больших значений α мы не можем утверждать, что $I_{\max}(\alpha) \geqslant H_1(1-\alpha)$, так как не удается построить совместное распределение X и Y такое, чтобы $H(X) = H_1(1-\alpha)$, а $H(X\,|\,Y) = 0$.

Таким образом, нам необходимо сравнить нижние границы (П.22) и (П.23) для различных значений α и выбрать из них наилучшую. Сравним вначале первую из границ в (П.22) с (П.23) на интервале $\alpha \in \big[1-\frac{1}{2n-1}, 1\big]$. Легко проверить, что разность $J(1-\alpha) - H_2(1-\alpha)$ возрастает по α на данном интервале, так как

$$\big(J(1-\alpha) - H_2(1-\alpha)\big)'_{\alpha} = \ln\frac{2\alpha(2-\alpha)}{n(n-2)(1-\alpha)^2} > 0,$$

а при $\alpha = 1$ эта разность положительна. Поэтому необходимо сравнить значения $J(1-\alpha)$ и $H_2(1-\alpha)$ при $\alpha = 1 - \frac{1}{2n-1}$. Имеем

$$J\Big(\frac{1}{2n-1}\Big) = \ln(2n-1) - \frac{2n\ln 2}{2n-1}, \tag{П.24}$$

$$H_2\Big(\frac{1}{2n-1}\Big) = \ln(2n-1) - \frac{(2n-3)\ln 2}{2n-1} - \frac{2n-2}{2n-1}\ln\frac{n-1}{n-2}, \tag{П.25}$$

так что

$$H_2\Big(\frac{1}{2n-1}\Big) = J\Big(\frac{1}{2n-1}\Big) + \frac{1}{2n-1}\Big[\ln 8 - 2(n-1)\ln\frac{n-1}{n-2}\Big]. \tag{П.26}$$

Замечая, что функция $(n-1)\ln\frac{n-1}{n-2}$ убывает по n, и учитывая, что $\ln 8 \approx 2{,}07944$, а

$$2(n-1)\ln\frac{n-1}{n-2} \approx \begin{cases} 2{,}08111, & \text{если } n=14, \\ 2{,}07502, & \text{если } n=15, \end{cases} \tag{П.27}$$

получаем, что нижняя граница (П.22) лучше (П.23) при всех $\alpha \in \big[1-\frac{1}{2n-1}, 1\big]$, если $3 \leqslant n \leqslant 14$, и при $\alpha \in [\widetilde{\alpha}, 1]$, если $n \geqslant 15$, где $\widetilde{\alpha}$, $1 - \frac{1}{2n-1} < \widetilde{\alpha} < 1$, – единственное решение уравнения

$$J(1-\widetilde{\alpha}) = H_2(1-\widetilde{\alpha})$$

на указанном интервале. Если же $n \geqslant 15$ и $\alpha \in \bigl[1 - \dfrac{1}{2n-1}, \widetilde{\alpha}\bigr]$, то граница (П.23) лучше (П.22). Таким образом, мы доказали справедливость границ (11) и (12) на интервале $\bigl[1 - \dfrac{1}{2n-1}, 1\bigr]$.

Сравним теперь вторую из границ в (П.22) с границей (П.23) на интервале $\alpha \in$ $\in \bigl[1 - \dfrac{1}{n}, 1 - \dfrac{1}{2n-1}\bigr]$. Для этого заметим, что разность

$$[H_1(1-\alpha) - \varphi(1-\alpha, 1-\alpha)] - H_2(1-\alpha)$$

возрастает по α и при $\alpha = 1 - \dfrac{1}{n}$ она отрицательна, так как легко проверить, что

$$H_1\Bigl(\frac{1}{n}\Bigr) - \varphi\Bigl(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\Bigr) - H_2\Bigl(\frac{1}{n}\Bigr) = -\frac{3\ln 2}{n} + \frac{n-1}{n}\ln\biggl(1 + \frac{1}{n-2}\biggr) < 0,$$

поскольку $\ln 8 > 2$, а

$$(n-1)\ln\bigl(1 + \frac{1}{n-2}\bigr) \leqslant \frac{n-1}{n-2} < 2 \quad \text{при } n > 2.$$

Теперь, замечая, что при $\alpha = 1 - \dfrac{1}{2n-1}$ эта разность равна

$$-\frac{1}{2n-1}\biggl[\ln 8 - 2(n-1)\ln\frac{n-1}{n-2}\biggr],$$

так как нетрудно проверить, что

$$H_1\Bigl(\frac{1}{2n-1}\Bigr) - \varphi\Bigl(\frac{1}{2n-1}, \frac{1}{2n-1}\Bigr) = J\Bigl(\frac{1}{2n-1}\Bigr),$$

а для $J\bigl(\dfrac{1}{2n-1}\bigr)$ справедливо равенство (П.26), то снова, учитывая (П.27), убеждаемся в справедливости нижних границ (11) и (12) и на интервале $\alpha \in \bigl[1 - \dfrac{1}{n}, 1 - \dfrac{1}{2n-1}\bigr]$.

Для доказательства равенства (13) и верхней границы (14) достаточно проверить, что

$$H_1(1-\alpha) \geqslant H_2(1-\alpha) \quad \text{для всех } \alpha,\ 1 - \frac{1}{n} \leqslant \alpha \leqslant 1, \tag{П.28}$$

и что

$$J(1-\alpha) \geqslant H_1(1-\alpha) \quad \text{для } \alpha \in [\overline{\alpha}, 1], \tag{П.29}$$

$$J(1-\alpha) \leqslant H_1(1-\alpha) \quad \text{для } \alpha \in \biggl[1 - \frac{1}{2n-1}, \overline{\alpha}\biggr], \tag{П.30}$$

где $\overline{\alpha}$, $\overline{\alpha} \in \bigl[1 - \dfrac{1}{2n-1}, 1\bigr]$ – единственное решение уравнения

$$J(1-\overline{\alpha}) = H_1(1-\overline{\alpha})$$

на указанном интервале. Справедливость неравенства (П.28) следует из того, что разность $H_1(1-\alpha) - H_2(1-\alpha)$ убывает по α на отрезке $\bigl[1 - \dfrac{1}{n}, 1\bigr]$, а при $\alpha = 1$ эта разность положительна. Для доказательства (П.29) и (П.30) следует лишь убедиться в том, что разность $J(1-\alpha) - H_1(1-\alpha)$ возрастает по α на отрезке $\bigl[1 - \dfrac{1}{2n-1}, 1\bigr]$, отрицательна при $\alpha = 1 - \dfrac{1}{2n-1}$ и положительна при $\alpha = 1$. На этом доказательство предложения 3 заканчивается. ▲

Доказательство предложения 4. Вначале заметим, что для рассматриваемых сейчас "средних" значений параметра α, когда $\frac{1}{n} < \alpha < 1 - \frac{1}{n}$, явное выражение для $\min\limits_{Y:\,\Pr\{Y=X\}=\alpha} H(X\,|\,Y)$ при заданном распределении X получить не удается в отличие от малых и больших значений α. Поэтому для средних значений α не удается получить и аналоги нижних границ для $I_{\max}(\alpha)$, представленных в предложениях 2 и 3.

Для средних значений α естественно рассмотреть два типа явных нижних границ для $I_{\max}(\alpha)$ и сравнить их между собой: когда совместное распределение X и Y таково, что $\Pr\{Y = X\} = \alpha$, а $H(X\,|\,Y) = 0$, и когда X имеет равномерное распределение, поскольку в этом случае точное значение для $\min\limits_{Y:\,\Pr\{Y=X\}=\alpha} H(X\,|\,Y)$ известно (см. (9)). В первом случае, когда предполагается, что условная энтропия $H(X\,|\,Y)$ равна нулю и $\Pr\{Y = X\} = \alpha$, матрица совместного распределения X и Y должна содержать в каждой строке и каждом столбце ровно по одному ненулевому элементу, а сумма диагональных элементов должна быть равна α. Как нетрудно убедиться, в случае, когда

$$\frac{k}{n} < \alpha \leqslant \frac{k+1}{n}, \quad k = 1, 2, \ldots, n-3,$$

то для того чтобы максимизировать количество информации $I(X;Y) = H(X)$, необходимо выбрать наилучший из следующих двух способов расположения ненулевых элементов в этой матрице совместного распределения:

1) k чисел $\frac{\alpha}{k}$ расположить на диагонали, а остальные $n-k$ чисел $\frac{1-\alpha}{n-k}$ расположить по одному в каждой из оставшихся незанятых строк и каждом незанятом столбце, и
2) $k+1$ чисел $\frac{\alpha}{k+1}$ расположить на диагонали, а остальные $n-k-1$ чисел $\frac{1-\alpha}{n-k-1}$ расположить по одному в каждой из оставшихся незанятых строк и каждом незанятом столбце.

В первом из этих случаев $H(X) = H_k(\alpha)$, а во втором $H(X) = H_{k+1}(\alpha)$, где $H_i(x)$ определено в (2). Если же $k = n-2$, т.е. $\frac{n-2}{n} < \alpha < \frac{n-1}{n}$, то равенство $H(Y\,|\,X) = 0$ возможно только в первом из указанных выше случаев расположения ненулевых элементов в матрице совместного распределения, так что в этом случае $H(X) = H_{n-2}(\alpha)$. Теперь заметим, что

$$\max\{H_k(\alpha), H_{k+1}(\alpha)\} = \begin{cases} H_k(\alpha), & \text{если } \frac{k}{n} < \alpha \leqslant \widehat{\alpha}(k), \\ H_{k+1}(\alpha), & \text{если } \widehat{\alpha}(k) \leqslant \alpha \leqslant \frac{k+1}{n}, \end{cases} \tag{П.31}$$

где

$$\widehat{\alpha}(k) = \ln\left(1 + \frac{1}{n-k-1}\right) \Big/ \ln\left(1 + \frac{n}{k(n-k-1)}\right), \quad k = 1, 2, \ldots, n-3. \tag{П.32}$$

Действительно, равенства (П.31) и (П.32) следуют из того факта, что разность $H_k(\alpha) - H_{k+1}(\alpha)$ убывает по α,

$$H_k\left(\frac{k}{n}\right) - H_{k+1}\left(\frac{k}{n}\right) > 0, \quad H_k\left(\frac{k+1}{n}\right) - H_{k+1}\left(\frac{k+1}{n}\right) < 0,$$

так что $\widehat{\alpha}(k)$ представляет собой решение уравнения

$$H_k(\widehat{\alpha}(k)) = H_{k+1}(\widehat{\alpha}(k)).$$

Таким образом, справедливость нижней границы (18) установлена, причем ее оптимальность при

$$\alpha = \frac{k}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-2, n,$$

следует из предложения 1. Нижняя граница (19) является прямым следствием равенства (9). Покажем теперь, что граница (18) лучше, чем (19).

Пусть вначале

$$\frac{k}{n} < \alpha \leqslant \frac{2k+1}{2n}, \quad k = 1, 2, \ldots, n-3.$$

В этом случае достаточно показать, что

$$H_k(\alpha) > \ln n - \varphi\Big(\frac{1}{n}, \alpha - \frac{k}{n}\Big).$$

Для этого заметим, что разность

$$H_k(\alpha) - \ln n + \varphi\Big(\frac{1}{n}, \alpha - \frac{k}{n}\Big)$$

является вогнутой функцией α, а при $\alpha = \dfrac{k}{n}$ она равна нулю. Поэтому, чтобы доказать, что в рассматриваемом случае (18) лучше (19), достаточно убедиться, что

$$H_k\Big(\frac{2k+1}{2n}\Big) > \ln n - \varphi\Big(\frac{1}{n}, \frac{1}{2n}\Big).$$

Простые выкладки показывают, что

$$H_k\Big(\frac{2k+1}{2n}\Big) = \ln n - \frac{2k+1}{2n}\ln\Big(1 + \frac{1}{2k}\Big) - \frac{2n-2k-1}{2n}\ln\Big(1 - \frac{1}{2(n-k)}\Big),$$
$$\ln n - \varphi\Big(\frac{1}{n}, \frac{1}{2n}\Big) = \ln n - \frac{1}{2n}\ln\frac{27}{4}.$$

Требуемое неравенство $H_k\Big(\dfrac{2k+1}{2n}\Big) > \ln n - \varphi\Big(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{2n}\Big)$ теперь следует из того, что

$$\frac{2k+1}{2n}\ln\Big(1 + \frac{1}{2k}\Big) + \frac{2n-2k-1}{2n}\ln\Big(1 - \frac{1}{2(n-k)}\Big) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2k+1}{4nk} - \frac{2n-2k-1}{4n(n-k)} < \frac{1}{2n}\ln\frac{27}{4}.$$

Значит, в рассматриваемом случае, когда

$$\frac{k}{n} < \alpha \leqslant \frac{2k+1}{2n}, \quad k = 1, 2, \ldots, n-3,$$

нижняя граница (18) лучше (19).

Аналогично доказывается, что нижняя граница (18) лучше (19) и в двух оставшихся случаях, когда

$$\frac{2k+1}{2n} \leqslant \alpha \leqslant \frac{k+1}{n}, \quad k = 1, 2, \ldots, n-3,$$

и когда $k = n-2$, т.е.

$$\frac{n-2}{n} < \alpha < \frac{n-1}{n}.$$

В первом из них доказывается, что

$$H_{k+1}(\alpha) > \ln n - \varphi\Big(\frac{1}{n}, \frac{k+1}{n} - \alpha\Big),$$

а во втором – что

$$H_{n-2}(\alpha) > \ln n - \varphi\Big(\frac{1}{n}, \alpha - \frac{n-2}{n}\Big).$$

На этом доказательство предложения 4 заканчивается. ▲

В заключение автор выражает искреннюю благодарность рецензенту за указание на ряд неточностей в статье, устранение которых привело к улучшению ее качества.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ерохин В.* ε-Энтропия дискретного случайного объекта // Теория вероятн. и ее примен. 1958. Т. 3. № 1. С. 103–107. `http://mi.mathnet.ru/tvp4919`
2. *Berger T.* Rate Distortion Theory: A Mathematical Basis for Data Compression. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1971.
3. *Ho S.-W., Verdú S.* On the Interplay between Conditional Entropy and Error Probability // IEEE Trans. Inform. Theory. 2010. V. 56. № 12. P. 5930–5942. `https://doi.org/10.1109/TIT.2010.2080891`
4. *Пинскер М.С.* Об оценке информации через вариацию // Пробл. передачи информ. 2005. Т. 41. № 2. С. 3–8. `http://mi.mathnet.ru/ppi91`
5. *Zhang Z.* Estimating Mutual Information via Kolmogorov Distance // IEEE Trans. Inform. Theory. 2007. V. 53. № 9. P. 3280–3282. `https://doi.org/10.1109/TIT.2007.903122`
6. *Прелов В.В.* Обобщение одной задачи Пинскера // Пробл. передачи информ. 2011. Т. 47. № 2. С. 17–37. `http://mi.mathnet.ru/ppi2043`
7. *Прелов В.В.* О некоторых экстремальных задачах для взаимной информации и энтропии // Пробл. передачи информ. 2016. Т. 52. № 4. С. 3–13. `http://mi.mathnet.ru/ppi2218`

Прелов Вячеслав Валерьевич
Институт проблем передачи информации
им. А.А. Харкевича РАН, Москва
`prelov@iitp.ru`

Поступила в редакцию
24.05.2022
После доработки
09.08.2022
Принята к публикации
09.08.2022