ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

Том 58 **2022** **Вып. 3**

УДК 519.651 : 517.589

© 2022 г. **Е.А. Карацуба**

БЫСТРЫЕ АЛГОРИТМЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ И ОБРАТНЫХ ФУНКЦИЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ БВЕ

Построены новые быстрые алгоритмы вычисления элементарных алгебраических и обратных функций, основанные на применении двух методов – метода А.А. Карацубы 1960 г. и авторского метода БВЕ 1990 г. Сложность вычисления близка к оптимальной. Алгоритмы допускают частичное распараллеливание.

Ключевые слова: быстрые алгоритмы, сложность вычисления, метод А.А. Карацубы, метод БВЕ, метод Ньютона, элементарные алгебраические функции, обратные функции, рациональная функция, логарифмическая функция.

DOI: 10.31857/S0555292322030081, **EDN:** EAXCNG

Памяти Юрия Ивановича Журавлёва
(14.01.1935–14.01.2022)

"Не огорчайся! Метод, который не украли, – это плохой метод, потому что он никому не нужен!" (Ю.И. Журавлёв, 2000 г.)

§ 1. Введение. Основные определения

Под алгебраическими функциями понимают функции, которые в окрестности каждой точки области определения могут быть заданы алгебраическими уравнениями. Под элементарными алгебраическими функциями будем иметь в виду степенную функцию и рациональную функцию. Под обратными функциями будем иметь в виду функции, обратные к простейшим трансцендентным (экспоненциальной и тригонометрическим) функциям, т.е. логарифм, арктангенс, арксинус и т.п.

Далее считаем, что числа записаны в двоичной системе счисления, знаки которой 0 и 1 называются битами. Таким образом, числа записываются в виде

$$z = x_{-j}2^j + x_{-j+1}2^{j-1} + \ldots + x_0 + x_1 2^{-1} + x_2 2^{-2} + \ldots, \quad x_j = 0 \text{ или } 1.$$

Определение 1. Запись знаков 0, 1, плюс, минус, скобка, а также сложение, вычитание и умножение двух битов назовем одной битовой операцией (далее – просто операцией).

Определение 2. Пусть элементарная алгебраическая или простейшая трансцендентная функция $y = f(z)$ задана в некоторой ограниченной области $D \in E$, $y = f(z)$ не имеет в $\bar{D}$ особенностей и ограничена вместе со своей производной. Переменная и значение функции записываются последовательностями

$$z = (\widetilde{x}_{-j}, \ldots, \widetilde{x}_0, \widetilde{x}_1, \ldots), \quad y = (\widetilde{y}_{-j}, \ldots, \widetilde{y}_0, \widetilde{y}_1, \ldots), \tag{1}$$

где $\widetilde{x}_i, \widetilde{y}_j$ равны 0 или 1. Вычислить функцию $y = f(z)$ в точке $z = z_0 \in D$ с точностью до n знаков означает найти такое число S_n, что

$$|f(z_0) - S_n| \leqslant c2^{-n}, \tag{2}$$

где постоянная c не зависит от n.

Вычисление функции $f(z)$ в точке $z = z_0$ можно заменить ее вычислением в точке $z = z_n$, где $|z_0 - z_n| < 2^{-n}$, поскольку $f'(z)$ ограничена в $\bar{D}$. Таким образом, все участвующие в вычислениях числа можно записывать в виде конечных последовательностей, причем из (1), (2) легко видеть, что z и y можно представить в виде целой части и $C_0 n$ двоичных знаков после запятой, $C_0 = \mathrm{const}$. Поскольку целые части $[z]$, $[y]$ из (1) являются фиксированными величинами, а основным растущим параметром является точность вычисления n, $n \to +\infty$, то действия фактически производятся над числами, имеющими порядка n знаков. Такое n-значное число можно записать в виде

$$z = 2^{n-1} + \varepsilon_{-n+2} 2^{n-2} + \ldots + \varepsilon_2 2^2 + \varepsilon_1 2 + \varepsilon_0,$$

где $\varepsilon_{-n+2}, \varepsilon_{-n+3}, \ldots, \varepsilon_2, \varepsilon_1, \varepsilon_0$ равны 0 или 1.

Определение 3. Сложностью умножения двух n-значных чисел $M(n)$ называется число операций, достаточное для вычисления произведения двух n-значных чисел.

О первом быстром методе – методе умножения – см. [1–3]. Далее предполагаем, что для сложности умножения двух n-значных чисел справедлива оценка

$$M(n) = O\big(n \log^C n\big),$$

где C – константа, т.е. сложность используемого алгоритма умножения не хуже, чем сложность Шёнхаге–Штрассена (см. алгоритмы из [4, 5]).

Определение 4. Количество операций, достаточное для вычисления функции $f(z)$ в точке z_0 с точностью до n знаков посредством данного алгоритма, называется сложностью вычисления $f(z)$ в точке z_0 и обозначается $s_f(n) = s_{f,z_0}(n)$.

Определение 5. Будем называть *быстрыми* такие методы и алгоритмы вычисления функции f, что для них

$$s_f(n) = O\big(n \log^K n\big), \quad \text{где } K \text{ – константа.} \tag{3}$$

Один из таких быстрых методов – метод БВЕ (быстрого вычисления E-функций, см. [6–9]) был создан для вычисления простейших и высших трансцендентных функций со сложностью (3). Это второй после метода АГС Гаусса (см., например, [10–12]) метод быстрого вычисления классических констант π и e, а также простейших трансцендентных функций при любом аргументе. При этом, в отличие от АГС, с помощью БВЕ со сложностью, близкой к оптимальной, можно вычислить также некоторые высшие трансцендентные функции для алгебраических значений аргумента и параметров.

В [13–15] были представлены первые алгоритмы быстрого вычисления элементарных алгебраических функций, основанные на методе Ньютона. Например, самый простой алгоритм деления числа a на число b заключается в вычислении методом Ньютона обратной величины $1/b$ с точностью до n знаков с последующим "быстрым умножением" на a.

Ранее, в промежуточных вычислениях в БВЕ-алгоритмах всегда предполагалось использование метода Ньютона для вычисления элементарных алгебраических и обратных функций. В то же время, возникает вопрос о существовании других быстрых алгоритмов для вычисления этих функций. Цель настоящей статьи – построить такие алгоритмы с применением в них БВЕ-вычислений. При этом иногда там будут использоваться также конструкции метода А.А. Карацубы от 1960 г. (см. [1–3]). Заметим, что сам А.А. Карацуба не называл свой метод каким-либо именем, зато другие пользователи этого метода называли его многочисленными именами, среди которых самыми распространенными являются "Divide and Conquer" (разделяй и властвуй) и "Binary Splitting" (бинарное разбиение).

§ 2. Алгоритм быстрого деления

Пусть a и b – натуральные числа, меньшие 2^{n+1} и $b < a$. Чтобы разделить a на b с остатком, нужно найти такие целые q и r, чтобы

$$a = bq + r, \quad 0 \leqslant r < b.$$

Если будет найдено S_n, такое что

$$\left| S_n - \frac{1}{b} \right| < 2^{-(n+1)}, \tag{4}$$

то одно из трех чисел $[aS_n]$, $[aS_n] - 1$, $[aS_n] + 1$ равно q, а именно то число $d \in \in \{[aS_n] - 1, [aS_n], [aS_n] + 1\}$, для которого

$$0 \leqslant a - bd < b.$$

При этом

$$r = a - bq.$$

Если $a < b$, то для вычисления частного a/b вычисляется S_n, удовлетворяющее неравенству (4), а затем с точностью $2^{-(n+1)}$ посредством быстрого алгоритма вычисляется произведение aS_n, и в результате получаем значение a/b с точностью до n знаков. Таким образом, задача сводится к построению быстрого алгоритма вычисления обратной величины $1/b$ с точностью до n знаков.

Пусть $b = z$ является $(n+1)$-значным числом, $n \geqslant 2$:

$$z = 2^n + \alpha_{n-1}2^{n-1} + \ldots + \alpha_m 2^m + \ldots + \alpha_1 2 + \alpha_0,$$

где $\alpha_m = 0$ или $\alpha_m = 1$, $m = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Отсюда

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{2^n(1 + \alpha_{n-1}2^{-1} + \ldots + \alpha_m 2^{m-n} + \ldots + \alpha_1 2^{1-n} + \alpha_0 2^{-n})}, \tag{5}$$

и нужно найти S_n, такое что

$$\frac{1}{z} = 2^{-n} S_n + \theta 2^{-2n-1}, \quad |\theta| \leqslant 1. \tag{6}$$

Заметим, что число $1 + \alpha_{n-1}2^{-1} + \ldots + \alpha_m 2^{m-n} + \ldots + \alpha_1 2^{1-n} + \alpha_0 2^{-n}$ требует для записи $n+1$ позицию, т.е. должно учитываться как $(n+1)$-значное. Обозначим

$$x = \alpha_{n-1}2^{-1} + \alpha_{n-2}2^{-2} + \ldots + \alpha_m 2^{m-n} + \ldots + \alpha_1 2^{1-n} + \alpha_0 2^{-n}, \tag{7}$$

$\alpha_m = 0$ или $\alpha_m = 1$, $m = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, и

$$\frac{1}{z} = 2^{-n} \frac{1}{1+x},$$

где с учетом (7)

$$x \leqslant \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)=1-\frac{1}{2^n}<1.$$

С другой стороны, при $x<1$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1+x}=(1-x)(1+x^2+\ldots+x^{2m}+\ldots)=\\&=(1-x)(1+x^2)(1+x^4)\ldots(1+x^{2^k})\ldots\end{aligned}\tag{8}$$

Рассмотрим равенство (7). Число α_{n-1} может принимать два значения: 0 или 1.

1) Пусть $\alpha_{n-1}=0$. Тогда из (7) имеем $x \leqslant \frac{1}{2^2}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-2}}\right)<\frac{1}{2}$. При

$$m=n+1\tag{9}$$

из (8) имеем

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1+x}-(1-x)\left(1+x^2+\ldots+x^{2(m-1)}\right)=\\&=\frac{x^{2m}}{1+x}<\frac{1}{2^{2n+2}}=\theta_0 2^{-2n-2},\quad |\theta_0|<1.\end{aligned}\tag{10}$$

2) Пусть $\alpha_{n-1}=1$. Тогда из (5) находим

$$\begin{aligned}&\frac{1}{z}=\frac{1}{2^n\left(1+\frac{1}{2}+\alpha_{n-2}2^{-2}+\ldots+\alpha_m 2^{m-n}+\ldots+\alpha_1 2^{1-n}+\alpha_0 2^{-n}\right)}=\\&=2^{-n-1}\left(1-\frac{1}{4}+\alpha_{n-2}2^{-3}+\ldots+\alpha_m 2^{m-n-1}+\ldots+\alpha_1 2^{-n}+\alpha_0 2^{-n-1}\right)^{-1}=\\&=2^{-n-1}\left(1+\frac{1}{4}\left(\alpha_0 2^{-n+1}+\alpha_1 2^{-n+2}+\ldots+\alpha_m 2^{m-n+1}+\ldots+\alpha_{n-2}2^{-1}-1\right)\right)^{-1}=\\&=\frac{2^{-n-1}}{1+\widetilde{x}},\quad |\widetilde{x}|<\frac{1}{8},\end{aligned}$$

и следовательно, с учетом (9),

$$\frac{1}{1+\widetilde{x}}-(1-\widetilde{x})\left(1+\widetilde{x}^2+\ldots+\widetilde{x}^{2(m-1)}\right)=\frac{\widetilde{x}^{2m}}{1+\widetilde{x}}=\theta_1 2^{-6n-6},\quad |\theta_1|<1.\tag{11}$$

Обозначим

$$S_n=(1-x)(1+x^2+\ldots+x^{2m})=(1-x)(1+x^2)(1+x^4)\ldots(1+x^{2^k}),\tag{12}$$

$$\widetilde{S}_n=(1-\widetilde{x})(1+\widetilde{x}^2+\ldots+\widetilde{x}^{2m})=(1-\widetilde{x})(1+\widetilde{x}^2)(1+\widetilde{x}^4)\ldots(1+\widetilde{x}^{2^k}),\tag{13}$$

при этом

$$m=1+2+2^2+\ldots+2^{k-1}=2^k-1,\tag{14}$$

и $x,\widetilde{x}$ определяются формулами

$$\begin{aligned}&x=\alpha_0 2^{-n}+\alpha_1 2^{1-n}+\ldots+\alpha_m 2^{m-n}+\ldots+\alpha_{n-2}2^{-2},\\&\widetilde{x}=\widetilde{\alpha}_0 2^{-n-1}+\widetilde{\alpha}_1 2^{-n}+\ldots+\widetilde{\alpha}_m 2^{m-n-1}+\ldots+\widetilde{\alpha}_{n-2}2^{-3}-2^{-2},\end{aligned}$$

где коэффициенты α_i, $\widetilde{\alpha}_j$ равны 0 или 1.

Легко видеть, что произведения (12), (13) содержат $k+1$ сомножителей, в которых участвуют последовательно вычисляемые числа $x^2, x^4, \ldots, x^{2^k}$, $\widetilde{x}^2, \widetilde{x}^4, \ldots, \widetilde{x}^{2^k}$, каждое последующее из которых является квадратом предыдущего. При этом на первом шаге этого процесса получаем

$$
\begin{aligned}
& y = x^2 = \\
& = 2^{-3}\left(\beta_{2n-3} + \beta_{2n-4}2^{-1} + \ldots + \beta_m 2^{m-2n+3} + \ldots + \beta_1 2^{4-2n} + \beta_0 2^{3-2n}\right), \qquad (15)\\
& \widetilde{y} = \widetilde{x}^2 = 2^{-5}\bigl(\widetilde{\beta}_{2n-1} + \widetilde{\beta}_{2n-2}2^{-1} + \ldots + \widetilde{\beta}_1 2^{-2n+2} + \widetilde{\beta}_0 2^{-2n+1}\bigr), \qquad (16)
\end{aligned}
$$

где β_i, $\widetilde{\beta}_j$ равны 0 или 1. Ясно, что для вычисления $y = x^2$ из (15) достаточно $O(M(n-2))$ операций, для вычисления же $\widetilde{y} = \widetilde{x}^2$, $\widetilde{x} = (\widetilde{\widetilde{x}} - 1)^2 = \widetilde{\widetilde{x}}^2 + 1 - 2\widetilde{\widetilde{x}}$ из (16) достаточно $O(M(n-1))$ операций. На втором шаге процесса вычисляются квадраты чисел (15), (16), однако вместо полученных величин

$$
\begin{aligned}
& u = y^2 = 2^{-5}\left(\gamma_0 2^{8-4n} + \ldots + \gamma_{4n-8}\right),\\
& \widetilde{u} = \widetilde{y}^2 = 2^{-9}\left(\widetilde{\gamma}_0 2^{8-4n} + \ldots + \widetilde{\gamma}_{4n-8}\right), \quad n \geqslant 2,
\end{aligned}
$$

отнеся к остаточному члену малые слагаемые, запишем эти числа в виде

$$
\begin{aligned}
& u = y^2 = 2^{-5}\left(\delta_0 + \delta_1 2^{-1} + \ldots + \delta_r 2^{-r_1} + \theta_1 2^{-r_1}\right) = \\
& = 2^{-5}\left(\delta_0 + \delta_1 2^{-1} + \ldots + \delta_r 2^{-r_1}\right) + \theta_1 2^{-(r_1+5)}, \qquad (17)\\
& \widetilde{u} = \widetilde{y}^2 = 2^{-9}\bigl(\widetilde{\delta}_0 + \widetilde{\delta}_1 2^{-1} + \ldots + \widetilde{\delta}_r 2^{-r_1} + \widetilde{\theta}_1 2^{-r_1}\bigr) = \\
& = 2^{-9}\bigl(\widetilde{\delta}_0 + \widetilde{\delta}_1 2^{-1} + \ldots + \widetilde{\delta}_r 2^{-r_1}\bigr) + \widetilde{\theta}_1 2^{-(r_1+9)}, \qquad (18)
\end{aligned}
$$

где $|\theta_1| < 1$, $|\widetilde{\theta}_1| < 1$, а δ_ℓ, $\widetilde{\delta}_i$ равны 0 или 1. И так далее. На j-м шаге будем иметь

$$
\begin{aligned}
& w = v^2 = 2^{-2^j-1}\bigl(\varepsilon_0 + \varepsilon_1 2^{-1} + \ldots + \varepsilon_r 2^{-r_j} + \theta_{j-1}2^{-r_j}\bigr), \quad |\theta_{j-1}| < 1,\\
& \widetilde{w} = \widetilde{v}^2 = 2^{-2^{j+1}-1}\left(\widetilde{\varepsilon}_0 + \widetilde{\varepsilon}_1 2^{-1} + \ldots + \widetilde{\varepsilon}_r 2^{-r_j} + \widetilde{\theta}_{j-1}2^{-r_j}\right), \quad |\widetilde{\theta}_{j-1}| < 1,
\end{aligned}
$$

где ε_ℓ, $\widetilde{\varepsilon}_i$ равны 0 или 1, и

$$
r_j + 2^j + 1 = r \quad \text{или} \quad r_j + 2^{j+1} + 1 = r. \qquad (19)
$$

Принимая во внимание, что

$$
\begin{aligned}
& (a_1+\theta_1)(a_2+\theta_2)\ldots(a_n+\theta_n) = a_1 a_2 \ldots a_n \left(1 + \frac{\theta_1}{a_1}\right)\left(1 + \frac{\theta_2}{a_2}\right)\ldots\left(1 + \frac{\theta_n}{a_n}\right),\\
& (1+\alpha)(1+\beta) \approx 1 + \alpha + \beta,
\end{aligned}
$$

можно сделать вывод о том, что если $r = 2n + \log 2n$, то вычисляя квадраты (17), (18) и последующие квадраты получаемых значений $v = u^2$, $\widetilde{v} = \widetilde{u}^2$, $w = v^2$, $\widetilde{w} = \widetilde{v}^2$, $\ldots$ с точностью $2^{-2n-\log 2n}$, в результате получим произведения (12), (13) заведомо с точностью 2^{-2n-1}. В то же время, вынесенные за скобки в (15), (16) и (17), (18) и далее на каждом шаге $1, 2, \ldots, j, \ldots$ множители 2^{-2^j-1}, $2^{-2^{j+1}-1}$ сокращают значность возводимых в квадрат чисел. Учитывая (19), для вычисления последовательных квадратов на шаге j, $2 \leqslant j \leqslant k$, достаточно потратить

$$
M(2n + \log 2n - 2 - 2^j) + O(2n + \log 2n)
$$

операций. Суммируя число операций по всем шагам, получаем

$$s_{S_n}(n) = O\left(\log n(2n + \log 2n) + \sum_{j=1}^{k} M(2n + \log 2n - 2 - 2^j) + M(n)\right).$$

Ясно, что оценка сложности вычисления $\widetilde{S}_n$ будет асимптотически такая же. Отсюда и из (9)–(11), (14) и (6) следует, что доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Для сложности вычисления числа, обратного заданному n-значному числу z, справедлива оценка*

$$s_{1/z}(n) = O(M(n)\log n). \tag{20}$$

Замечание 1. Можно построить аналогичный быстрый алгоритм вычисления $1/z$ на основе метода А.А. Карацубы (см. [3]), разбивая z на две части "посередине":

$$\frac{1}{x_0 + 2x_1 + \ldots + 2^{n-1}x_{n-1}} = \frac{1}{\alpha_0 + 2^{n_1}\alpha_1} = 2^{-n_1}\alpha_1 \frac{1}{1 + 2^{-n_1}\dfrac{\alpha_0}{\alpha_1}} =$$
$$= 2^{-n_1}\frac{1}{\alpha_1}\left(1 - 2^{-n_1}\frac{\alpha_0}{\alpha_1} + 2^{-2n_1}\left(\frac{\alpha_0}{\alpha_1}\right)^2\theta\right), \quad |\theta| \leqslant 1,$$

$0 \leqslant \dfrac{\alpha_0}{\alpha_1} < 2$, $n - 1 = 2^k$, $n_1 = \dfrac{n-1}{2} = 2^{k-1}$. Далее таким же образом разбиваются на части числа α_1, и так далее.

Замечание 2. Если в БВЕ-алгоритмах (см. [6–9]) вместо вычисления делений методом Ньютона использовать вышепредставленный метод деления, то общая заявленная сложность алгоритмов, основанных на БВЕ, не изменится. Причина в том, что метод БВЕ – это метод быстрого суммирования рядов, большинство из которых имеет вид

$$f_1 = f_1(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a(j)}{b(j)} z^j \tag{21}$$

при условии, что $a(j)$, $b(j)$ — целые числа, $|a(j)| + |b(j)| \leqslant (Cj)^K$, $|z| < 1$, K и C – константы, и z – алгебраическое число, причем сложность вычисления таких рядов посредством БВЕ равна

$$s_{f_1}(n) = O(M(n)\log^2 n), \tag{22}$$

т.е. превышает (20) в $\log n$ раз, и даже если деление с точностью 2^{-n} будет производиться на каждом шаге (которых в методе БВЕ всегда $\sim \log n$), это никак не поменяет оценку (22), как и вычисление на последнем шаге обратного значения числа размером $n \log n$.

Только при суммировании посредством БВЕ рядов вида

$$f_2 = f_2(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a(j)}{b(j)} \frac{z^j}{j!},$$

при условии, что $a(j)$, $b(j)$ — целые числа, $|a(j)|+|b(j)| \leqslant (Cj)^K$, $|z| < 1$, K и C – константы, и z – алгебраическое число (примером является БВЕ-вычисление числа e), сложность вычисления будет такой же, как и в (20), а именно

$$s_{f_2}(n) = O(M(n)\log n). \tag{23}$$

Однако такая пониженная сложность достигается за счет сверхбыстрой сходимости, которая позволяет достичь нужной точности 2^{-n} при суммировании не $r \sim n$, а

$$r \sim \frac{n}{\log n} \tag{24}$$

членов заданного ряда. При этом на последнем шаге происходит вычисление обратного значения числа размера $\sim r \log r$ со сложностью $\left(r \log^3 \log \log r\right)$, но с учетом (24) это не меняет оценку (23).

Замечание 3. Может показаться, что построенный выше БВЕ-алгоритм вычисления значения $1/z$ имеет сложность хуже, чем алгоритм Ньютона (см. [13–15]). Однако, как оказалось, в [13–15] сложность вычисления $1/z$ подсчитывалась по-другому. Рассмотрим ньютоновский процесс. Значение $S = 1/z$,

$$\frac{1}{2} \leqslant z \leqslant 1, \tag{25}$$

вычисляется по формуле

$$S_{2n} = -zS_n^2 + 2S_n, \quad S_1 = \frac{3}{2}. \tag{26}$$

При этом

$$\text{если} \quad |S - S_n| \leqslant 2^{-n}, \quad \text{то} \quad |S - S_{2n}| \leqslant 2^{-2n}. \tag{27}$$

Из (27) легко видеть, что вычисление по формуле (26) от S_1 до S_n происходит за $\log n$ шагов. При этом, если z – n-значное число, скажем,

$$z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^{11}} + \ldots + \frac{1}{2^n},$$

то удовлетворяя, очевидно, условию (25), оно в то же время требует $\sim n$ знаков для своей записи. Начиная со второго шага, согласно формуле (26), это число будет возводиться в квадрат. Таким образом, сложность ньютоновского алгоритма вычисления значения $1/z$, где z – n-значное число, с точностью до n знаков будет иметь ту же сложность (20), что и БВЕ-алгоритм.

§ 3. Алгоритм быстрого вычисления рациональной функции

Вычисление функции $y = z^{r/m}$, $(r, m) = 1$, r, m – натуральные числа, $m \geqslant 2$, с точностью 2^{-n} сводится к извлечению корня m-й степени из числа z с точностью до n знаков с последующим перемножением r полученных значений корня с той же точностью. Поскольку r – фиксированная константа, сложность вычисления произведения r чисел с точностью 2^{-n} оценивается как $O(M(n))$. Таким образом, задача сводится к вычислению с точностью 2^{-n} значения $y = z^{1/m}$.

Для удобства считаем, что $n = 2^k$, $k \geqslant 1$. Как и по методу А.А. Карацубы (см. [1–3]), представим n-значное число z в виде

$$\begin{aligned} z &= z_0 + 2z_1 + \ldots + 2^{n_1 - 1} z_{n_1 - 1} + 2^{n_1}\left(z_{n_1} + 2z_{n_1+1} + \ldots + 2^{n_1-1} z_n\right) = \\ &= \alpha_{10} + 2^{n_1}\alpha_{11}, \quad n_1 = \frac{n}{2} = 2^{k-1}, \end{aligned} \tag{28}$$

$$z^{1/m} = (\alpha_{10} + 2^{n_1}\alpha_{11})^{1/m} = 2^{n_1/m}\alpha_{11}^{1/m}\left(1 + 2^{-n_1}\frac{\alpha_{10}}{\alpha_{11}}\right)^{\frac{1}{m}}, \quad 0 \leqslant \frac{\alpha_{10}}{\alpha_{11}} < 2, \tag{29}$$

где α_{10}, α_{11} являются n_1-значными числами. Согласно биному Ньютона

$$\left(1+2^{-n_1}\frac{\alpha_{10}}{\alpha_{11}}\right)^{1/m} = 1+\binom{1/m}{1}2^{-n_1}\frac{\alpha_{10}}{\alpha_{11}}+\binom{1/m}{2}2^{-2n_1}\left(\frac{\alpha_{10}}{\alpha_{11}}\right)^2+$$
$$+\theta_1\binom{1/m}{3}2^{-3n_1}\left(\frac{\alpha_{10}}{\alpha_{11}}\right)^3, \quad |\theta_1|\leqslant 1. \tag{30}$$

Здесь

$$\binom{1/m}{j} = \frac{\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m}-1\right)\dots\left(\frac{1}{m}-j+1\right)}{j!}, \qquad \left|\binom{1/m}{j}\right| < \frac{1}{jm}, \quad j\geqslant 2.$$

На первом шаге с вынесением “очевидного общего множителя”, как в методе БВЕ (см. [6–9]), сумма двух чисел из (30) преобразуется следующим образом:

$$\binom{1/m}{1}2^{-n_1}\frac{\alpha_{10}}{\alpha_{11}}+\binom{1/m}{2}2^{-2n_1}\left(\frac{\alpha_{10}}{\alpha_{11}}\right)^2 = \frac{1}{m}2^{-n_1}\frac{\alpha_{10}}{\alpha_{11}}-\frac{m-1}{2m^2}2^{-2n_1}\left(\frac{\alpha_{10}}{\alpha_{11}}\right)^2 =$$
$$=\frac{2^{-2n_1}}{2m^2}\frac{\alpha_{10}}{\alpha_{11}^2}\left(2^{n_1+1}m\alpha_{11}-(m-1)\alpha_{10}\right) = \frac{2^{-2n_1}}{2m^2}\frac{\alpha_{10}}{\alpha_{11}^2}\beta_1, \quad n_1=2^{k-1},$$

при этом вычисляется целое число β:

$$\beta = 2^{n_1+1}m\alpha_{11}-(m-1)\alpha_{10}.$$

На втором шаге преобразуем $\alpha_{11}^{1/m}$ в формуле (29), где α_{11} является n_1-значным числом ($n_1=n/2$), представив это значение в виде

$$\alpha_{11} = \alpha_{20}+2^{n_2}\alpha_{21}, \quad n_2=\frac{n_1}{2}=\frac{n}{4},$$

где α_{20}, α_{21} – n_2-значные числа. Следовательно,

$$\alpha_{11}^{1/m} = (\alpha_{20}+2^{n_2}\alpha_{21})^{1/m} = 2^{n_2/m}\alpha_{21}^{1/m}\left(1+2^{-n_2}\frac{\alpha_{20}}{\alpha_{21}}\right)^{1/m},$$

и учитывая, что $0\leqslant\dfrac{\alpha_{20}}{\alpha_{21}}<2$, отсюда получаем

$$\left(1+2^{-n_2}\frac{\alpha_{20}}{\alpha_{21}}\right)^{1/m} = 1+\binom{1/m}{1}2^{-n_2}\frac{\alpha_{20}}{\alpha_{21}}+\binom{1/m}{2}2^{-2n_2}\left(\frac{\alpha_{20}}{\alpha_{21}}\right)^2+$$
$$+\binom{1/m}{3}2^{-3n_2}\left(\frac{\alpha_{20}}{\alpha_{21}}\right)^3+\binom{1/m}{4}2^{-4n_2}\left(\frac{\alpha_{20}}{\alpha_{21}}\right)^4+$$
$$+\theta_2 2^{-5n_2}\left(\frac{\alpha_{20}}{\alpha_{21}}\right)^5, \quad |\theta_2|\leqslant 1. \tag{31}$$

На втором шаге методом БВЕ [6] преобразуем сумму четырех слагаемых из (31):

$$\binom{1/m}{1}2^{-n_2}\frac{\alpha_{20}}{\alpha_{21}}+\binom{1/m}{2}2^{-2n_2}\left(\frac{\alpha_{20}}{\alpha_{21}}\right)^2+\binom{1/m}{3}2^{-3n_2}\left(\frac{\alpha_{20}}{\alpha_{21}}\right)^3+$$
$$+\binom{1/m}{4}2^{-4n_2}\left(\frac{\alpha_{20}}{\alpha_{21}}\right)^4 = \frac{2^{-2n_2}\alpha_{20}}{2m^2\alpha_{21}^2}\gamma_1+\frac{2^{-4n_2}(m-1)(2m-1)\alpha_{20}^3}{4!\,m^4\alpha_{21}^4}\gamma_2 =$$
$$=\frac{2^{-4n_2}\alpha_{20}}{4!\,m^4\alpha_{21}^4}\beta_2,$$

и вычисляем целые числа

$$\gamma_1 = 2^{n_2+1} m\alpha_{21} - (m-1)\alpha_{20}, \quad \gamma_2 = 2^{n_2+2} m\alpha_{21} - (3m-1)\alpha_{20},$$
$$\beta_2 = 3 \cdot 4 \cdot 2^{2n_2} m^2 \alpha_{21}^2 \gamma_1 + (m-1)(2m-1)\alpha_{20}^2 \gamma_2.$$

И так далее. На j-м шаге ($j \leqslant k$) имеем

$$\alpha_{j-1,j-1}^{1/m} = (\alpha_{j0} + 2^{n_j}\alpha_{j1})^{1/m} = 2^{n_j/m}\alpha_{j1}^{1/m}\left(1 + 2^{-n_j}\frac{\alpha_{j0}}{\alpha_{j1}}\right)^{1/m}, \quad 0 \leqslant \frac{\alpha_{j0}}{\alpha_{j1}} < 2, \quad (32)$$

и отсюда

$$\left(1 + 2^{-n_j}\frac{\alpha_{j0}}{\alpha_{j1}}\right)^{1/m} = 1 + \binom{1/m}{1} 2^{-n_j}\frac{\alpha_{j0}}{\alpha_{j1}} + \binom{1/m}{2} 2^{-2n_j}\left(\frac{\alpha_{j0}}{\alpha_{j1}}\right)^2 +$$
$$+ \binom{1/m}{3} 2^{-3n_j}\left(\frac{\alpha_{j0}}{\alpha_{j1}}\right)^3 + \ldots + \binom{1/m}{2^{2^j}} 2^{-2^j n_j}\left(\frac{\alpha_{j0}}{\alpha_{j1}}\right)^{2^j} +$$
$$+ \theta_j 2^{-(2^j+1)n_j}\left(\frac{\alpha_{j0}}{\alpha_{j1}}\right)^{2^j+1}, \quad |\theta_j| \leqslant 1. \quad (33)$$

На j-м шаге ($j \leqslant k$) методом БВЕ вычисляем сумму 2^j слагаемых из (33). И так далее. Процесс завершается на k-м шаге ($n = 2^k$, $n_k = 1$). Таким образом, общая конструкция такова:

$$z^{1/m} = 2^{\frac{n_1+n_2+\ldots+n_k}{m}}\left(1 + 2^{-n_1}\frac{\alpha_{10}}{\alpha_{11}}\right)^{1/m}\left(1 + 2^{-n_2}\frac{\alpha_{20}}{\alpha_{21}}\right)^{1/m}\ldots$$
$$\ldots\left(1 + 2^{-n_j}\frac{\alpha_{j0}}{\alpha_{j1}}\right)^{1/m}\ldots\left(1 + 2^{-n_k}\frac{\alpha_{k0}}{\alpha_{k1}}\right)^{1/m} =$$
$$= 2^{\frac{n_1+n_2+\ldots+n_k}{m}}\left(1 + \binom{1/m}{1} 2^{-n_1}\frac{\alpha_{10}}{\alpha_{11}} + \ldots\right) \times$$
$$\times\left(1 + \binom{1/m}{1} 2^{-n_2}\frac{\alpha_{20}}{\alpha_{21}} + \ldots\right)\ldots\left(1 + \binom{1/m}{1} 2^{-1}\frac{\alpha_{k0}}{\alpha_{k1}} + \ldots\right) =$$
$$= 2^{\frac{n_1+n_2+\ldots+n_k}{m}}\left(1 + \frac{2^{-2n_1}}{2!\,m^2}\frac{\alpha_{10}}{\alpha_{11}^2}\beta_1\right)\left(1 + \frac{2^{-4n_2}\alpha_{20}}{4!\,m^4\alpha_{21}^4}\beta_2\right)\ldots, \quad (34)$$

и произведение скобок вычисляется методом БВЕ. Кроме того, нужно вычислить быстро первый множитель в формуле (34) – число $2^{\frac{n_1+n_2+\ldots+n_k}{m}}$. Это можно сделать двумя способами. Можно подобрать значение n таким образом, чтобы оно превышало заданную точность вычисления, и помимо того что $n = 2^k$, число $2^{k-1} + 2^{k-2} + \ldots + 2 = 2^k - 2$ было бы кратно m. Сложность операции возведения двойки в степень n составляет $O(n)$. Другой способ – быстрое вычисление значения $2^{1/m}$, $m \geqslant 2$. Представим сначала число $a = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/m}$ в виде ряда

$$a = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{1/m} = 1 + \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j\frac{\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m} - 1\right)\ldots\left(\frac{1}{m} - j + 1\right)}{j!}\left(\frac{1}{2}\right)^j \quad (35)$$

и просуммируем (35) с точностью 2^{-n-1} с помощью БВЕ-процесса со сложностью вычисления

$$s_{(1/2)^{1/m}} = O(M(n)\log n).$$

Затем вычислим с точностью до $n+1$ знаков значение, обратное к a, посредством БВЕ-алгоритма из предыдущего параграфа со сложностью (20). С учетом сложности деления (20) для чисел α_{ji}, α_{jl} и их степеней и роста размера чисел, общая сложность вычисления равна

$$s_{z^{1/m}} = O(M(n)\log^2 n).$$

Тем самым, доказана

Теорема 2. *Для сложности вычисления рациональной функции* $y = z^{r/m}$, $(r,m)=1$, r,m – *натуральные числа*, $m \geqslant 2$, *справедлива оценка*

$$s_{z^{r/m}}(n) = O(M(n)\log^2 n). \tag{36}$$

Замечание 4. Если в БВЕ-алгоритмах (см. [6–9]) вместо вычисления рациональных функций методом Ньютона использовать вышепредставленный метод вычисления этих функций, то общая заявленная сложность алгоритмов, основанных на БВЕ, не изменится. В алгоритмах со сложностью (23) рациональная функция не участвует, в алгоритмах со сложностью (22), если и встречается вычисление рациональной функции, то конечное количество раз, что не меняет окончательную оценку сложности вычисления.

Замечание 5. Построенный алгоритм быстрого вычисления рациональных функций является "гибридным", поскольку совмещает в себе две идеи – метода А.А. Карацубы 1960 г. и метода БВЕ 1990 г., но далее мы будем называть его просто БВЕ.

Замечание 6. Как и выше (см. замечание 3) сравним представленный БВЕ-алгоритм вычисления значения $z^{1/m}$ и алгоритм Ньютона (см. [13–15]). Как оказалось, в [13–15] сложность вычисления значения $z^{1/m}$ определялась не так, как в настоящей статье. Рассмотрим ньютоновский процесс. Значение $S = z^{1/m}$, $m \geqslant 2$, при $z \geqslant (m+1)^m$ вычисляется по формуле

$$S_{2n} = \frac{m+1}{m} S_n - \frac{S_n^{m+1}}{mz}, \tag{37}$$

причем

$$\text{если} \quad |S - S_n| \leqslant 2^{-n}, \quad \text{то} \quad |S - S_{2n}| \leqslant 2^{-2n}. \tag{38}$$

Из (38) легко видеть, что вычисление по формуле (37) от S_1 до S_n происходит за $\log n$ шагов. Если на каждом шаге вычислять соответствующие обратные значения n-значных чисел, то общая сложность алгоритма будет та же, что и для БВЕ, т.е. (36). Однако для ньютоновского процесса (37) обратное значение n-значного числа z, а вернее, значение $\alpha = 1/mz$, $m = \mathrm{const}$, можно вычислить один раз (на первом шаге), а затем вычислять только произведения $\alpha, \alpha^2, \ldots, C\alpha$, $C = \mathrm{const}$ (с нужной точностью). За S_1 берут одно из двух целых чисел M или $M+1$, таких что $M^m < z \leqslant (M+1)^m$, чтобы либо $|M - z^{1/m}|$, либо $|M + 1 - z^{1/m}|$ не превосходило $1/2$. Согласно (37) на каждом шаге j вычисляется произведение n-значных чисел (во втором слагаемом из (37)), одно из которых $1/mz$, а другое –

$$\left(\frac{m+1}{m} S_{j-1} - S_{j-1}^{m+1} \frac{1}{mz}\right)^{m+1},$$

которое представляет собой n-значное число, возведенное в степень $m+1$. Поскольку $m+1$ – постоянная, то сложность всех таких произведений на каждом шаге $j = 2, 3, \ldots$ составляет $O(M(n))$, и следовательно, сложность вычисления рациональной функции с помощью алгоритма Ньютона есть $O(M(n)\log n)$, т.е. в $\log n$ раз лучше, чем сложность вышепредставленного БВЕ-алгоритма вычисления $z^{1/m}$.

Замечание 7. В дальнейшем планируется разработать простую БВЕ-конструкцию вычисления рациональной функции с оценкой сложности $O(M(n)\log n)$.

§ 4. Быстрое вычисление обратных функций

Заметим, что алгоритмы быстрого деления и быстрого вычисления рациональной функции, представленные выше, обобщаются на случай комплексного аргумента вычисляемой функции. В этом случае аппроксимации должны быть построены как для вещественной, так и для комплексной частей аргумента, и произведут, соответственно, вещественную и комплексную части значения функции. Сложность вычисления удвоится, т.е. оценки сложности (20), (36) не изменятся.

Поскольку все обратные гиперболические и обратные тригонометрические функции выражаются через логарифм, в последнем случае комплексный и с комплексным аргументом, как, например,

$$\operatorname{arctg} z = \frac{1}{2i}\ln\frac{1+iz}{1-iz} = \frac{1}{2i}\ln\left(\frac{1-z^2}{1+z^2} + i\frac{2z}{1+z^2}\right),$$

то важно построить быстрый алгоритм для вычисления логарифма, а вычисления других обратных тригонометрических и гиперболических функций можно свести к вычислению логарифма, подобно тому как в [6] вычисление тригонометрических функций косинуса и синуса сводится к вычислению вещественной и мнимой частей экспоненциальной функции с мнимым аргументом. Заметим, что вычисление логарифма с комплексным аргументом использует известные значения $\ln(i)$, $\ln(-1)$, $\ln(-i)$ и разложение комплексного логарифма в ряд вблизи известных значений.

Пусть нужно вычислить натуральный логарифм $y = \log z$, где z – n-значное число, $z = z_0 + 2z_1 + \ldots + 2^{n-1}z_{n-1}$, с точностью 2^{-n}. Предполагая для простоты, что $n = 2^k$, подобно тому как это делается по методу А.А. Карацубы, разобьем аргумент логарифма z на две части, как в формуле (28). Тогда

$$\log z = \log 2^{n_1}\alpha_{11} + \log\left(1 + 2^{-n_1}\frac{\alpha_{10}}{\alpha_{11}}\right) = n_1\log 2 + \log\alpha_{11} + a_1, \tag{39}$$

где

$$a_1 = \log\left(1 + 2^{-n_1}\frac{\alpha_{10}}{\alpha_{11}}\right), \tag{40}$$

а α_{10}, α_{11} являются n_1-значными числами. Поскольку

$$0 \leqslant \frac{\alpha_{10}}{\alpha_{11}} < 2, \quad n_1 = \frac{n}{2} \geqslant 1, \quad \left|2^{-n_1}\frac{\alpha_{10}}{\alpha_{11}}\right| < 1,$$

то справедливо следующее разложение в ряд Тейлора:

$$a_1 = 2^{-n_1}\frac{\alpha_{10}}{\alpha_{11}} - \frac{1}{2}\left(2^{-n_1}\frac{\alpha_{10}}{\alpha_{11}}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(2^{-n_1}\frac{\alpha_{10}}{\alpha_{11}}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(2^{-n_1}\frac{\alpha_{10}}{\alpha_{11}}\right)^4 +$$
$$+\theta_1\frac{1}{5}\left(2^{-n_1}\frac{\alpha_{10}}{\alpha_{11}}\right)^5, \quad |\theta_1| \leqslant 1. \tag{41}$$

На первом шаге методом БВЕ вычисляется сумма первых четырех слагаемых из (41). На втором шаге аналогично разбиваем на две части $n_1 = \dfrac{n}{2} = 2^{k-1}$-значное число α_{11}, получая для $\log\alpha_{11}$ выражение

$$\log\alpha_{11} = n_2\log 2 + \log\alpha_{21} + a_2, \quad a_2 = \log\left(1 + 2^{-n_2}\frac{\alpha_{20}}{\alpha_{21}}\right), \tag{42}$$

где α_{20}, α_{21} являются n_2-значными числами, $n_2 = \dfrac{n_1}{2} = \dfrac{n}{4} = 2^{k-2}$. Поскольку

$$0 \leqslant \frac{\alpha_{20}}{\alpha_{21}} < 2, \quad n_2 = \frac{n}{4} \geqslant 1, \quad \left|2^{-n_2}\frac{\alpha_{20}}{\alpha_{21}}\right| < 1,$$

то справедливо следующее разложение в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned}a_2 = {} & 2^{-n_2}\frac{\alpha_{20}}{\alpha_{21}} - \frac{1}{2}\left(2^{-n_2}\frac{\alpha_{20}}{\alpha_{21}}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(2^{-n_2}\frac{\alpha_{20}}{\alpha_{21}}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(2^{-n_2}\frac{\alpha_{20}}{\alpha_{21}}\right)^4 + \\ & + \frac{1}{5}\left(2^{-n_2}\frac{\alpha_{20}}{\alpha_{21}}\right)^5 - \frac{1}{6}\left(2^{-n_2}\frac{\alpha_{20}}{\alpha_{21}}\right)^6 + \frac{1}{7}\left(2^{-n_2}\frac{\alpha_{20}}{\alpha_{21}}\right)^7 - \frac{1}{8}\left(2^{-n_2}\frac{\alpha_{20}}{\alpha_{21}}\right)^8 + \\ & + \theta_2\frac{1}{9}\left(2^{-n_2}\frac{\alpha_{20}}{\alpha_{21}}\right)^9, \quad |\theta_2| \leqslant 1.\end{aligned} \tag{43}$$

На втором шаге методом БВЕ вычисляется сумма первых восьми слагаемых из (43). И так далее. На j-м шаге ($1 \leqslant j \leqslant k$) имеем

$$\log\alpha_{j-1,1} = n_j\log 2 + \log\alpha_{j1} + a_j, \tag{44}$$

и 2^{j+1} первых слагаемых a_j суммы

$$\begin{aligned}a_j = {} & 2^{-n_j}\frac{\alpha_{j0}}{\alpha_{j1}} - \frac{1}{2}\left(2^{-n_j}\frac{\alpha_{j0}}{\alpha_{j1}}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(2^{-n_j}\frac{\alpha_{j0}}{\alpha_{j1}}\right)^3 - \ldots - \frac{1}{2^{j+1}}\left(2^{-n_j}\frac{\alpha_{j0}}{\alpha_{j1}}\right)^{2^{j+1}} + \\ & + \frac{\theta_j}{2^{j+1}+1}\left(2^{-n_j}\frac{\alpha_{j0}}{\alpha_{j1}}\right)^{2^{j+1}+1}, \quad |\theta_j| \leqslant 1,\end{aligned} \tag{45}$$

суммируются методом БВЕ. Из (45) на вычисление всех слагаемых a_j по всем шагам j, $1 \leqslant j \leqslant k$, посредством БВЕ, достаточно

$$O(M(n)\log^2 n) \tag{46}$$

операций. Из (39), (42) и (44) следует, что кроме a_j, $1 \leqslant j \leqslant k$, нужно также вычислить

$$b = \sum_{j=1}^{k} n_j \log 2 = \log 2\sum_{j=1}^{k} 2^{k-j} = (n-1)\log 2,$$

для чего нужно вычислить с точностью до n знаков значение $\log 2$. Воспользовавшись известным разложением (см., например, [16])

$$\log p = \log q + 2\left(\frac{p-q}{p+q} + \frac{1}{3}\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^5 + \ldots\right),$$

где p, q – натуральные числа, получаем

$$\log 2 = \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^4 + \ldots\right),$$

т.е. ряд вида (21), для сложности суммирования которого справедлива оценка (22). Учитывая (39), (40), (44), (45), а также (22) и (46), получаем доказательство следующего утверждения.

Теорема 3. *Для сложности вычисления логарифмической функции* $y = \log z$ *справедлива оценка*

$$s_{\log z}(n) = O(M(n)\log^2 n).$$

Замечание 8. Построенный алгоритм быстрого вычисления логарифмической функции также является “гибридным”, совмещая особенности метода А.А. Карацубы 1960 г. и метода БВЕ 1990 г.

Замечание 9. Первый “гибридный” алгоритм быстрого вычисления логарифмической функции построил С.В. Яхонтов (см. [17]), при этом метод А.А. Карацубы 1960 г. упоминается в [17] как “Binary Splitting”.

§ 5. Заключение

Метод БВЕ получил известность (см. [18]) раньше, чем получил свое наименование. Настоящая статья показывает, что метод БВЕ (или БВЕ совместно с методом А.А. Карацубы) подобно методу Ньютона пригоден также для построения быстрых алгоритмов вычисления элементарных алгебраических функций, а также обратных функций. При этом в построенных алгоритмах сохраняется возможность частичного распараллеливания, что является особой характеристикой метода БВЕ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Карацуба А., Офман Ю.* Умножение многозначных чисел на автоматах // ДАН СССР. 1962. Т. 145. № 2. С. 293–294. `http://mi.mathnet.ru/dan26729`
2. *Dynkin E.B., Kolmogorov A.N., Kostrikin A.I., Pjateckiĭ-Šapiro I.I., Šafarevič I.R., Sinaĭ Ja.G.* Six Lectures Delivered at the International Congress of Mathematicians in Stockholm, 1962. Providence, R.I.: Amer. Math. Soc., 1963.
3. *Карацуба А.А.* Сложность вычислений // Оптимальное управление и дифференциальные уравнения. Сб. статей. Тр. МИАН. 1995. Т. 211. С. 186–202. `http://mi.mathnet.ru/tm1120`
4. *Schönhage A., Strassen V.* Schnelle Multiplikation großer Zahlen // Computing. 1971. V. 7. № 3–4. P. 281–292. `https://doi.org/10.1007/BF02242355`
5. *Fürer M.* Faster Integer Multiplication // SIAM J. Comput. 2009. V. 39. № 3. P. 979–1005. `https://doi.org/10.1137/070711761`
6. *Карацуба Е.А.* Быстрые вычисления трансцендентных функций // Пробл. передачи информ. 1991. Т. 27. № 4. С. 76–99. `http://mi.mathnet.ru/ppi584`
7. *Карацуба Е.А.* Быстрое вычисление дзета-функции Римана $\zeta(s)$ при целых значениях аргумента s // Пробл. передачи информ. 1995. Т. 31. № 4. С. 69–80. `http://mi.mathnet.ru/ppi294`
8. *Karatsuba E.A.* Fast Computation of Some Special Integrals of Mathematical Physics // Scientific Computing, Validated Numerics, Interval Methods. Boston: Springer, 2001. P. 29–41. `https://doi.org/10.1007/978-1-4757-6484-0_3`
9. *Карацуба Е.А.* О вычислении функции Бесселя путем суммирования рядов // Сиб. журн. вычисл. матем. 2019. Т. 22. № 4. С. 453–472. `https://doi.org/10.15372/SJNM20190405`
10. *Salamin E.* Computation of π Using Arithmetic-Geometric Mean // Math. Comp. 1976. V. 30. № 135. P. 565–570. `https://doi.org/10.2307/2005327`
11. *Carlson B.C.* Algorithms Involving Arithmetic and Geometric Means // Amer. Math. Monthly. 1971. V. 78. № 5. P. 496–505. `https://doi.org/10.2307/2317754`

12. *Borwein J.M., Borwein P.B.* Pi and the AGM: A Study in Analytic Number Theory and Computational Complexity. New York: Wiley, 1987.

13. *Cook S.A.* On the Minimum Computation Time of Functions. Doct. Thesis. Harvard Univ., Cambridge, MA, USA, 1966.

14. *Бендерский Ю.В.* Быстрые вычисления // ДАН СССР. 1975. Т. 223. № 5. С. 1041–1043. http://mi.mathnet.ru/dan39204

15. *Brent R.P.* Fast Multiple-Precision Evaluation of Elementary Functions // J. ACM. 1976. V. 23. № 2. P. 242–251. https://doi.org/10.1145/321941.321944

16. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. М.: Физматгиз, 1959.

17. *Яхонтов С.В.* Эффективное по времени и памяти вычисление логарифмической функции вещественного аргумента на машине Шёнхаге // Прикл. дискр. матем. 2013. № 2 (20). С. 101–114. http://mi.mathnet.ru/pdm414

18. *Lozier D.W., Olver F.W.J.* Numerical Evaluation of Special Functions // Mathematics of Computation 1943–1993: A Half-Century of Computational Mathematics (Proc. 48th Symp. in Applied Mathematics. Aug. 9–13, 1993. Vancouver, B.C., Canada). Providence, R.I.: Amer. Math. Soc., 1995. P. 79–125. https://doi.org/10.1090/psapm/048/1314844

Карацуба Екатерина Анатольевна
Вычислительный центр им. А.А. Дородницына
Федерального исследовательского центра
“Информатика и управление” РАН, Москва
ekaratsuba@gmail.com

Поступила в редакцию
13.06.2022
После доработки
27.07.2022
Принята к публикации
27.07.2022