ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

Том 58 **2022** **Вып. 4**

УДК 621.391 : 519.72

© 2022 г. **С. Гуй, И. Хуан**[1]

ЗАМЕЧАНИЯ ОБ ОБРАТНЫХ НЕРАВЕНСТВАХ ПИНСКЕРА

Предлагается простой подход к обратным неравенствам Пинскера, недавно полученным О. Бинеттом. Более конкретно, приводятся прямые доказательства оптимальных вариационных границ на f-дивергенцию с возможными ограничениями на экстремальные значения относительной информации. Предлагаемые рассуждения близки по духу к рассуждениям Сасона и Верду.

Ключевые слова: дивергенция Кульбака – Лейблера, полная вариация, обратные неравенства Пинскера, f-дивергенция, выпуклость, точные неравенства, экстремизатор.

DOI: 10.31857/S0555292322040015, **EDN:** EBBEJG

§ 1. Введение

Через $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ обозначим класс всех распределений вероятностей на дискретном пространстве $\mathcal{X}$. Для заданной выпуклой функции $f\colon [0,\infty) \to (-\infty,\infty]$, такой что $f(1)=0$, f-дивергенция между распределениями $P,Q\in\mathcal{P}(\mathcal{X})$ при условии $P \ll Q$ определяется как

$$D_f(P\,\|\,Q) = \mathbf{E}_Q\left[f\left(\frac{dP}{dQ}\right)\right].$$

Напомним определение полной вариации

$$|P-Q| = \sup_A |P(A)-Q(A)|$$

и неравенство Пинскера

$$|P-Q| \leqslant \sqrt{\frac{D_{\mathrm{KL}}(P\,\|\,Q)}{2}}.$$

Здесь дивергенция Кульбака – Лейблера D_{KL} соответствует дивергенции D_f при $f(x)=x\log x$.

В этой заметке нас будут интересовать некоторые обратные неравенства Пинскера. Точнее, мы хотим установить верхние границы на f-дивергенцию при дополнительных ограничениях. Подобные верхние границы называются *вариационными*, если в них участвует полная вариация.

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Национального фонда естественных наук Китая (грант № 11801274). Статья завершена во время визита, финансируемого программой № 202006865011 для аспирантов/приглашенных ученых Китайского совета по стипендиям, в Лабораторию анализа, геометрии и приложений (LAGA) Университета Сорбонна Париж-Север.

Пусть $\delta \geqslant 0$ и $0 \leqslant m \leqslant 1 \leqslant M < \infty$. Набор (δ, m, M) представляет собой заданные параметры ограничений. Рассмотрим следующие три класса $\mathcal{P}(\mathcal{X})$-пар (P, Q):

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{A}(\delta, m, M) = \left\{(P, Q):\ P \ll Q,\ |P-Q| = \delta,\ \inf \frac{dP}{dQ} = m,\ \sup \frac{dP}{dQ} = M\right\},\\
&\mathcal{B}(m, M) = \bigcup_{\delta \geqslant 0} \mathcal{A}(\delta, m, M),\\
&\mathcal{C}(\delta) = \bigcup_{0 \leqslant m \leqslant 1 \leqslant M < \infty} \mathcal{A}(\delta, m, M).
\end{aligned}
$$

Следующие верхние границы получены в [1].

Теорема 1 (Бинетт, 2019). *Пусть $\delta \geqslant 0$ и $0 \leqslant m \leqslant 1 \leqslant M < \infty$. Тогда*

$$
D_f(P \,\|\, Q) \leqslant \frac{(M-1)f(m) + (1-m)f(M)}{M-m}, \quad (P, Q) \in \mathcal{B}(m, M), \tag{1.1}
$$

$$
D_f(P \,\|\, Q) \leqslant \delta\left(\frac{f(m)}{1-m} + \frac{f(M)}{M-1}\right), \quad (P, Q) \in \mathcal{A}(\delta, m, M), \tag{1.2}
$$

$$
D_f(P \,\|\, Q) \leqslant \delta\left(f(0) + \lim_{M' \to \infty} \frac{f(M')}{M'-1}\right), \quad (P, Q) \in \mathcal{C}(\delta). \tag{1.3}
$$

Замечание 1. Мы используем следующие соглашения:

(i) Правая часть (1.1) считается равной 0 при $M = m$;

(ii) Правая часть (1.2) считается равной 0, когда $m = 1$ или $M = 1$ (заметим, что в этих крайних случаях $\delta = 0$).

Все три неравенства точны, что показано с помощью построенных в [1] примеров распределений, на которых достигается экстремум. Дополнительные сведения об этих неравенствах см. в [1, раздел 1]. О некоторых связанных с этим верхних границах на f-дивергенцию см. в [2, 3].

Цель настоящей заметки – предложить относительно более простой подход к доказательству теоремы 1. Наши аргументы близки по духу к рассуждениям Сасона и Верду в [4].

§ 2. Доказательство теоремы 1

Пусть $\kappa = \dfrac{dP}{dQ}$ и, таким образом, $\mathbf{E}_Q(\kappa) = 1$. В силу выпуклости f имеем

$$
f(\kappa) \leqslant \frac{f(M) - f(m)}{M-m}(\kappa - m) + f(m).
$$

Применяя к этому $\mathbf{E}_Q$, получаем (1.1). Далее, снова благодаря выпуклости f и с учетом условия $f(1) = 0$ имеем

$$
f(\kappa) = f(\kappa)\big(\mathbf{1}_{\kappa \leqslant 1} + \mathbf{1}_{\kappa \geqslant 1}\big) \leqslant \frac{f(m)}{1-m}(1-\kappa)\mathbf{1}_{\kappa \leqslant 1} + \frac{f(M)}{M-1}(\kappa - 1)\mathbf{1}_{\kappa \geqslant 1}. \tag{2.1}
$$

Применяя $\mathbf{E}_Q$ к этому неравенству и используя тот факт, что

$$
\mathbf{E}_Q\big((1-\kappa)\mathbf{1}_{\kappa \leqslant 1}\big) = \mathbf{E}_Q\big((\kappa - 1)\mathbf{1}_{\kappa \geqslant 1}\big) = \delta, \tag{2.2}
$$

получаем (1.2). Доказательство неравенства (1.3) можно получить аналогично, замечая, что

$$f(\kappa) \leqslant f(0)(1-\kappa)\mathbf{1}_{\kappa\leqslant 1} + \left(\lim_{M'\to\infty} \frac{f(M')}{M'-1}\right)(\kappa-1)\mathbf{1}_{\kappa\geqslant 1}.$$

Замечание 2. Наш вывод границы (1.1) упрощает непрямое доказательство следствия 2 в [1]. Более того, условие $f(1)=0$ мы здесь не используем. Впрочем, само по себе неравенство (1.1) инвариантно относительно замены $f \mapsto f + \mathrm{const}$.

Замечание 3. Наше доказательство неравенства (1.1) также обосновывает его предельную версию:

$$D_f(P\,\|\,Q) \leqslant f(m) + (1-m)\left(\lim_{M'\to\infty} \frac{f(M')}{M'-m}\right), \quad (P,Q)\in\mathcal{B}(m,\infty).$$

Замечание 4. Трюк с разложением в (2.1) взят из доказательства теоремы 23 в [4] (см. также [1]). Равенства (2.2) можно найти, например, в [4, теорема 12].

Второй автор выражает благодарность проф. Ян Яну (Нанкинский научно-технологический университет) за полезные обсуждения в области теории информации и ее приложений в теории обучения.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Binette O.* A Note on Reverse Pinsker Inequalities // IEEE Trans. Inform. Theory. 2019. V. 65. № 7. P. 4094–4096. `https://doi.org/10.1109/TIT.2019.2896192`
2. *Прелов В.В.* О максимальных значениях f-дивергенции и дивергенции Реньи при заданном вариационном расстоянии // Пробл. передачи информ. 2020. Т. 56. № 1. С. 3–15. `https://doi.org/10.31857/S0555292320010015`
3. *Прелов В.В.* О максимуме f-дивергенции вероятностных распределений при заданной величине их склеивания // Пробл. передачи информ. 2021. Т. 57. № 4. С. 24–33. `https://doi.org/10.31857/S0555292321040021`
4. *Sason I., Verdú S.* f-Divergence Inequalities // IEEE Trans. Inform. Theory. 2016. V. 62. № 11. P. 5973–6006. `https://doi.org/10.1109/TIT.2016.2603151`

Сяюнь Гуй (Xiayun Gui)
Школа транспортной инженерии,
Восточно-китайский университет Цзяотун,
Наньчан, провинция Цзянси, КНР
453421770@qq.com
И Хуан✉ (Yi C. Huang)
Университет Сорбонна Париж-Север, Институт Галилея,
Лаборатория анализа, геометрии и приложений,
CNRS (UMR 7539), Вильтанёз, Франция
Школа математических наук,
Нанкинский нормальный университет, Нанкин, КНР
✉Yi.Huang.Analysis@gmail.com
ORCID: 0000-0002-1297-7674

Поступила в редакцию
24.06.2022
После доработки
23.09.2022
Принята к публикации
24.09.2022