ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

Том 58 **2022** **Вып. 4**

УДК 621.391 : 519.72

© 2022 г. **В.В. Прелов**

СКЛЕИВАНИЕ НЕСКОЛЬКИХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Рассматривается задача нахождения условий, при которых возможно α-склеивание нескольких случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_k$ с конечным или счетным множеством значений, имеющих заданные распределения вероятностей, т.е. возможность построения совместного распределения этих случайных величин, такого что $\Pr\{X_1 = X_2 = \ldots = X_k\} = \alpha$.

Ключевые слова: склеивание дискретных распределений вероятностей, максимальное склеивание, вероятность ошибки.

DOI: 10.31857/S0555292322040027, **EDN:** EBJQOY

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_k$, $k \geqslant 2$, – дискретные случайные величины, принимающие значения в одном и том же конечном или счетном множестве I с распределениями вероятностей

$$P_{X_1} = \{p_i^{(1)},\ i \in I\}, \quad P_{X_2} = \{p_i^{(2)},\ i \in I\}, \quad \ldots, \quad P_{X_k} = \{p_i^{(k)},\ i \in I\}$$

соответственно. В дальнейшем без ограничения общности будем считать, что $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, $n \geqslant 2$, или $I = \{1, 2, \ldots\}$ в конечномерном или счетномерном случаях соответственно. Для заданного числа α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, назовем *$\alpha$-склеиванием* случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_k$ (или их распределений вероятностей $P_{X_1}, P_{X_2}, \ldots, P_{X_k}$) совместное распределение

$$P_{X_1 X_2 \ldots X_k} = \{p_{i_1 i_2 \ldots i_k},\ i_j \in I,\ j = 1, 2, \ldots, k\}$$

этих случайных величин, такое что $\Pr\{X_1 = X_2 = \ldots = X_k\} = \alpha$. *Максимальным склеиванием* случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_k$ называется их α-склеивание при максимально возможном $\alpha = \alpha_{\max}$.

Ранее рассматривался лишь случай $k = 2$, т.е. случай склеивания двух дискретных случайных величин. Понятие α-склеивания для этого случая было введено в работе автора [1], а понятие максимального склеивания было введено ранее (см., например, работы [2–4] и библиографию в них), где, в частности, приведены примеры использования этого понятия в некоторых задачах теории информации и теории вероятностей. В [1] были получены необходимые и достаточные условия существования α-склеивания двух случайных величин X и Y с распределениями вероятностей $P_X = \{p_i,\ i \in I\}$ и $P_Y = \{q_i,\ i \in I\}$ соответственно. А именно, было показано, что следующие неравенства для α являются необходимыми и достаточными условиями для существования α-склеивания этих случайных величин:

$$\alpha_{\min} \leqslant \alpha \leqslant \alpha_{\max}, \tag{1}$$

где

$$\alpha_{\max} = \sum_{i \in I} \min\{p_i, q_i\} \tag{2}$$

и

$$\alpha_{\min} = \max\Big\{\max_{i \in I}(p_i + q_i) - 1,\ 0\Big\}. \tag{3}$$

Этот результат об условиях существования α-склеивания был использован в [1] для решения одной экстремальной задачи о нахождении явного выражения для минимума информационной дивергенции двух случайных величин при условии, что заданы распределение вероятностей одной из них и величина их склеивания.

Основная цель данной статьи – установить условия, при которых существует α-склеивание нескольких случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_k$, $k \geqslant 3$, с заданными распределениями вероятностей $P_{X_j} = \big\{p_i^{(j)},\ i \in I\big\}$, $j = 1, 2, \ldots, k$. Здесь мы устанавливаем как необходимое, так и достаточное условия для существования α-склеивания, которые, вообще говоря, различны.

Для формулировки основного утверждения введем необходимые нам величины. Для целого $k \geqslant 2$ положим

$$m_i = \min\Big\{p_i^{(1)}, p_i^{(2)}, \ldots, p_i^{(k)}\Big\}, \quad i \in I, \tag{4}$$

$$\alpha_* = \max\left\{\max_{i \in I} \sum_{j=1}^{k} p_i^{(j)} - (k-1), 0\right\}, \tag{5}$$

$$\alpha^* = \inf_{A \in I} \left| \sum_{i \in A} m_i - \sum_{i \in I \setminus A} m_i \right|, \tag{6}$$

где m_i, $i \in I$, определены в (4). Основной результат статьи представляет

Теорема. *Для любых дискретных случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_k$, $k \geqslant 3$, с распределениями вероятностей $P_{X_j} = \big\{p_i^{(j)},\ i \in I\big\}$, $j = 1, 2, \ldots, k$, и любого α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, справедливы следующие утверждения*:

- *Для максимального α-склеивания случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_k$ имеет место равенство*

$$\alpha_{\max} = \sum_{i \in I} m_i, \tag{7}$$

  где m_i, $i \in I$, определены в (4);

- *Если существует α-склеивание случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_k$, то α удовлетворяет неравенствам*

$$\alpha_* \leqslant \alpha \leqslant \alpha_{\max}, \tag{8}$$

  где α_* определено в (5);

- *Если α удовлетворяет неравенствам*

$$\alpha^* \leqslant \alpha \leqslant \alpha_{\max},\ \text{если } I \text{ конечно}, \quad \text{и} \quad \alpha^* < \alpha \leqslant \alpha_{\max},\ \text{если } I \text{ счетно}, \tag{9}$$

  где α^* определено в (6), *то существует α-склеивание случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_k$*;

- *Если существуют непересекающиеся подмножества A, B и C множества I, такие что $A \cup B \cup C = I$ и*
$$\sum_{i\in A} m_i \leqslant 2\sum_{i\in B} m_i \quad \text{и} \quad \sum_{i\in B} m_i = \sum_{i\in C} m_i, \tag{10}$$
то α-склеивание случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_k$ возможно при любых $\alpha \in \in [0, \alpha_{\max}]$.

Следствие. *Если случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_k$ имеют равномерные распределения на одном и том же конечном множестве I, то их α-склеивание возможно при всех $\alpha \in [0, 1]$.*

Прежде чем привести доказательство этой теоремы, заметим, что необходимое условие существования α-склеивания (8) в случае $k = 2$ является и достаточным, как было установлено в [1]. Заметим также, что во многих частных случаях существует α-склеивание при всех $\alpha \in [0, \alpha_{\max}]$, поскольку выполняется условие (10).

Доказательство теоремы разобьем на несколько шагов.

1. Вначале покажем, что для величины $\alpha_{\max}$ максимального склеивания случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_k$ с распределениями вероятностей $P_{X_j} = \left\{p_i^{(j)}, i \in I\right\}$, $j = 1, 2, \ldots, k$, справедливо равенство (7). Прежде всего, очевидно, что
$$\alpha_{\max} \leqslant \sum_{i\in I} m_i,$$
так как
$$\Pr\{X_1 = X_2 = \ldots = X_k\} = \sum_{i\in I} \Pr\{X_1 = X_2 = \ldots = X_k = i\} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i\in I} \min\{\Pr\{X_1 = i\}, \Pr\{X_2 = i\}, \ldots, \Pr\{X_k = i\}\} = \sum_{i\in I} m_i.$$
Поэтому нужно лишь доказать, что существуют случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_k$ с заданными распределениями вероятностей $P_{X_j} = \left\{p_i^{(j)}, i \in I\right\}$, $j = 1, 2, \ldots, k$, такие что их совместное распределение удовлетворяет условию
$$\Pr\{X_1 = X_2 = \ldots = X_k\} = \sum_{i\in I} m_i.$$

Предположим вначале, что $\sum\limits_{i\in I} m_i = 1$. В этом случае очевидно, что все распределения $P_{X_j} = \left\{p_i^{(j)},\ i \in I\right\}$, $j = 1, 2, \ldots, k$, одинаковы, так что $p_i^{(j)} = m_i$ при всех $i \in I$ и $j = 1, 2, \ldots, k$, а тогда справедливость равенства (7) следует из того, что совместное распределение случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_k$, для которого $\Pr\{X_1 = X_2 = \ldots = X_k\} = \sum\limits_{i\in I} m_i$, может быть задано равенствами
$$\Pr\{X_1 = X_2 = \ldots = X_k = i\} = m_i, \quad i \in I,$$
а остальные вероятности этого совместного распределения равны нулю.

Если же $\sum\limits_{i\in A} m_i < 1$, то совместное распределение случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_k$, для которого $\Pr\{X_1 = X_2 = \ldots = X_k\} = \sum\limits_{i\in I} m_i$, может быть определено следующим образом. Введем в рассмотрение независимые случайные величины $U, Y, Z_1, Z_2, \ldots, Z_k$, имеющие следующие распределения вероятностей:

- Случайная величина U принимает два значения 0 и 1 с вероятностями

$$\Pr\{U=0\}=\sum_{i\in I} m_i,\quad \Pr\{U=1\}=1-\sum_{i\in I} m_i; \tag{11}$$

- Случайная величина Y принимает значения в множестве I с вероятностями

$$\Pr\{Y=i\}=\frac{m_i}{\sum\limits_{i\in I} m_i},\quad i\in I; \tag{12}$$

- Случайные величины Z_j, $j=1,2,\ldots,k$, принимают значения в множестве I с вероятностями

$$\Pr\{Z_j=i\}=\frac{p_i^{(j)}-m_i}{1-\sum\limits_{i\in I} m_i},\quad i\in I,\quad j=1,2,\ldots,k. \tag{13}$$

Определим теперь случайные величины $X_1,X_2,\ldots,X_k$ следующим образом:

$$\begin{cases} X_1=X_2=\ldots=X_k=Y, & \text{если } U=0,\\ X_j=Z_j,\ j=1,2,\ldots,k, & \text{если } U=1. \end{cases} \tag{14}$$

Из (11)–(14) легко следует, что так определенные случайные величины $X_1,X_2,\ldots,X_k$ имеют заданные распределения вероятностей $\{p_i^{(j)},\ i\in I\}$, $j=1,2,\ldots,k$, а их совместное распределение таково, что $\Pr\{X_1=X_2=\ldots=X_k\}=\sum\limits_{i\in I} m_i$. Действительно,

$$\Pr\{X_1=X_2=\ldots=X_k\}=\sum_{i\in I}\Pr\{X_1=X_2=\ldots=X_k=i\}=$$
$$=\sum_{i\in I}\Big[\Pr\{U=0\}\Pr\{X_1=X_2=\ldots=X_k=i\,|\,U=0\}+$$
$$+\Pr\{U=1\}\Pr\{X_1=X_2=\ldots=X_k=i\,|\,U=1\}\Big]=$$
$$=\sum_{i\in I}\left[\left(\sum_{i\in I} m_i\right)\Pr\{Y=i\}+\left(1-\sum_{i\in I} m_i\right)\prod_{j=1}^{k}\Pr\{Z_j=i\}\right]=\sum_{i\in I} m_i,$$

поскольку из (13) и (4) следует, что $\prod\limits_{j=1}^{k}\Pr\{Z_j=i\}=0$ при любом $i\in I$. Аналогично доказывается, что эти случайные величины $X_1,X_2,\ldots,X_k$ имеют заданные распределения вероятностей $\big\{p_i^{(j)},\ i\in I\big\}$, $j=1,2,\ldots,k$.

2. Докажем теперь необходимое условие существования α-склеивания (8). Для любых $j=1,2,\ldots,k$ и $i\in I$, очевидно, имеем

$$\Pr\{X_j=i\}\leqslant\Pr\{X_1=X_2=\ldots=X_k=i\}+\Pr\{\exists\ell,\ \ell\neq j:\ X_\ell\neq i\}\leqslant$$
$$\leqslant\alpha+\sum_{\ell:\,\ell\neq j}\Pr\{X_\ell\neq i\}=\alpha+(k-1)-\sum_{\ell:\,\ell\neq j}\Pr\{X_\ell=i\},$$

т.е.

$$\alpha\geqslant\sum_{j=1}^{k}p_i^{(j)}-(k-1),$$

и так как это условие должно выполняться при любом $i \in I$, то

$$\alpha \geqslant \max_{i \in I} \left(\sum_{j=1}^{k} p_i^{(j)} \right) - (k-1),$$

а значит, необходимое условие (8) доказано.

3. Докажем теперь, что α-склеивание случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_k$ существует при любых α, удовлетворяющих условию (9). Согласно доказанному выше существует максимальное склеивание этих случайных величин с $\alpha = \alpha_{\max} = \sum_{i \in I} m_i$, где величины m_i, $i \in I$, определены в (4). Пусть $P_{X_1 X_2 \ldots X_k} = \{p_{i_1 i_2 \ldots i_k}\}$, где

$$p_{i_1 i_2 \ldots i_k} = \Pr\{X_1 = i_1, X_2 = i_2 \ldots, X_k = i_k\}, \quad i_j \in I, \quad j = 1, 2, \ldots, k,$$

– совместное распределение случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_k$, осуществляющее это максимальное склеивание. Покажем теперь, что в случае, когда имеются хотя бы две отличных от нуля компоненты этого совместного распределения $m_i = p_{ii\ldots i}$ и $m_j = p_{jj\ldots j}$, $i \neq j$, то существует α-склеивание случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_k$ при любом $\alpha \in \left[\alpha_{\max} - 2\min\{m_i, m_j\},\, \alpha_{\max}\right]$.

Для этого рассмотрим новое совместное распределение

$$P'_{X_1 X_2 \ldots X_k}(x) = \{p'_{i_1 i_2 \ldots i_k}(x)\}$$

этих случайных величин, зависящее от параметра x, компоненты которого задаются равенствами

$$\begin{array}{ll}
p'_{ii\ldots ii}(x) = p_{ii\ldots ii} - kx, & p'_{jj\ldots jj}(x) = p_{jj\ldots jj} - kx, \\
p'_{ji\ldots ii}(x) = p_{ji\ldots ii} + x, & p'_{ij\ldots jj}(x) = p_{ij\ldots jj} + x, \\
p'_{iji\ldots i}(x) = p_{iji\ldots i} + x, & p'_{jij\ldots j}(x) = p_{jij\ldots j} + x, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
p'_{ii\ldots ji}(x) = p_{ii\ldots ji} + x, & p'_{jj\ldots ij}(x) = p_{jj\ldots ij} + x, \\
p'_{ii\ldots ij}(x) = p_{ii\ldots ij} + x, & p'_{jj\ldots ji}(x) = p_{jj\ldots ji} + x,
\end{array} \qquad (15)$$

а остальные компоненты распределения $P'_{X_1 X_2 \ldots X_k}(x)$ равны соответствующим компонентам распределения $P_{X_1 X_2 \ldots X_k}$, т.е. $p'_{i_1 i_2 \ldots i_k}(x) = p_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ для всех компонент $p'_{i_1 i_2 \ldots i_k}(x)$, кроме заданных в (15). Заметим, что параметр x в (15) может принимать любые значения из интервала $\left[0,\, \min\{m_i, m_j\}/k\right]$, а распределение $P'_{X_1 X_2 \ldots X_k}(x)$ задает $(\alpha_{\max} - 2kx)$-склеивание заданных случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_k$. Поэтому существует их α-склеивание при любых $\alpha \in \left[\alpha_{\max} - 2\min\{m_i, m_j\},\, \alpha_{\max}\right]$.

Теперь заметим, что в случае, когда это совместное распределение $P'_{X_1 X_2 \ldots X_k}(x)$ снова имеет хотя бы две отличные от нуля компоненты $p'_{rr\ldots r}$ и $p'_{ss\ldots s}$, $r \neq s$, то снова с помощью аналогичной процедуры можно расширить интервал возможных значений существования α-склеивания случайных величин и т.д. Отсюда легко следует, что с помощью подобных процедур можно расширить интервал возможных значений α-склеивания случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_k$ до $\left[\alpha_{\max} - 2\sum_{i \in A} m_i,\, \alpha_{\max}\right]$, где A – любое подмножество множества I, такое что

$$\sum_{i \in A} m_i \leqslant \sum_{i \in I \setminus A} m_i.$$

А из этого утверждения очевидно следует и существование любого α-склеивания этих случайных величин из интервалов, указанных в (9).

4. Докажем, наконец, что в случае выполнения условия (10) существует α-склеивание заданных случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_k$ при любом $\alpha \in [0, \alpha_{\max}]$. Предположим, что существует некоторое $\widehat{\alpha}$-склеивание $X_1, X_2, \ldots, X_k$, задаваемое совместным распределением $P_{X_1 X_2 \ldots X_k} = \{p_{i_1 i_2 \ldots i_k}\}$, у которого хотя бы две его компоненты $\beta = p_{ii\ldots i}$ и $\gamma = p_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ строго положительны, где все индексы i_j второй из этих компонент отличны от i, т.е. $i_j \neq i$, $j = 1, 2, \ldots, k$, и хотя бы два из этих индексов i_j различны. Покажем, что в этом случае существует α-склеивание $X_1, X_2, \ldots, X_k$ при любом $\alpha \in \bigl[\widehat{\alpha} - \min\{\beta, \gamma\}, \, \widehat{\alpha}\bigr]$.

Чтобы доказать это утверждение, рассмотрим новое совместное распределение $\widehat{P}_{X_1 X_2 \ldots X_k} = \{\widehat{p}_{i_1 i_2 \ldots i_k}\}$ этих случайных величин, зависящее от параметра x, компоненты которого задаются равенствами

$$
\begin{array}{ll}
\widehat{p}_{ii\ldots ii}(x) = p_{ii\ldots ii} - kx, & \widehat{p}_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} i_k}(x) = p_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} i_k} - kx, \\
\widehat{p}_{i_1 i \ldots ii}(x) = p_{i_1 i \ldots ii} + x, & \widehat{p}_{i i_2 \ldots i_{k-1} i_k}(x) = p_{i i_2 \ldots i_{k-1} i_k} + x, \\
\widehat{p}_{i i_2 i \ldots i}(x) = p_{i i_2 i \ldots i} + x, & \widehat{p}_{i_1 i i_3 \ldots i_k}(x) = p_{i_1 i i_3 \ldots i_k} + x, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\widehat{p}_{ii\ldots i_{k-1} i}(x) = p_{ii\ldots i_{k-1} i} + x, & \widehat{p}_{i_1 i_2 \ldots i i_k}(x) = p_{i_1 i_2 \ldots i i_k} + x, \\
\widehat{p}_{ii\ldots i i_k}(x) = p_{ii\ldots i i_k} + x, & \widehat{p}_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} i}(x) = p_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} i} + x,
\end{array}
\qquad (16)
$$

а остальные компоненты распределения $\widehat{P}_{X_1 X_2 \ldots X_k}(x)$ равны соответствующим компонентам распределения $P_{X_1 X_2 \ldots X_k}$, т.е. $\widehat{p}_{i_1 i_2 \ldots i_k}(x) = p_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ для всех компонент $\widehat{p}_{i_1 i_2 \ldots i_k}(x)$, кроме заданных в (16). Параметр x в (16) может принимать любые значения из интервала $\bigl[0, \, \min\{\beta, \gamma\}/k\bigr]$. Легко убедиться, что распределение $\widehat{P}_{X_1 X_2 \ldots X_k}(x)$ задает $(\widehat{\alpha} - kx)$-склеивание заданных случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_k$, а значит, существует их α-склеивание при любых $\alpha \in \bigl[\widehat{\alpha} - \min\{\beta, \gamma\}, \, \widehat{\alpha}\bigr]$.

Предположим теперь, что выполнено условие (10). Тогда, начиная с совместного распределения $P_{X_1 X_2 \ldots X_k}$ случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_k$, задающего их максимальное склеивание, и последовательно применяя метод расширения интервала существования α-склеивания, описанный выше в п. 3, к элементам из множеств B и C, мы можем утверждать, что существует α-склеивание $X_1, X_2, \ldots, X_k$ при любом $\alpha \in \bigl[\alpha_{\max} - 2 \sum\limits_{i \in B} m_i, \, \alpha_{\max}\bigr]$. При этом заметим, что совместное распределение $P_{X_1 X_2 \ldots X_k} = \{p_{i_1 i_2 \ldots i_k}\}$ случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_k$, осуществляющее $\bigl(\alpha_{\max} - 2 \sum\limits_{i \in B} m_i\bigr)$-склеивание, обладает следующим свойством: суммарное количество его компонент $p_{i_1 i_2 \ldots i_k}$, все индексы которых отличны от любого из индексов компонент $p_{ii\ldots i}$ при всех $i \in A$, не меньше $2 \sum\limits_{i \in B} m_i$. Кроме того, у всех таких компонент $p_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ имеются хотя бы два различных индекса i_j, $j = 1, 2, \ldots, k$. Это утверждение немедленно следует из свойств совместных распределений, задаваемых равенствами (15). Поэтому, применяя последовательно метод расширения интервала α-склеивания случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_k$, описанный в начале этого пункта (см. (16)), к элементам множества A и элементам, все индексы которых отличны от любого из индексов компонент $p_{ii\ldots i}$ при всех $i \in A$, описанных выше, приходим к выводу, что ввиду условия

$$\sum_{i \in A} m_i \leqslant 2 \sum_{i \in B} m_i$$

интервал существования α-склеивания случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_k$ можно расширить до $\bigl[0, \alpha_{\max}\bigr]$.

На этом доказательство теоремы заканчивается. ▲

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Прелов В.В.* Склеивание вероятностных распределений и экстремальная задача для дивергенции // Пробл. передачи информ. 2015. Т. 51. № 2. С. 114–121. http://mi.mathnet.ru/ppi2174
2. *Zhang Z.* Estimating Mutual Information via Kolmogorov Distance // IEEE Trans. Inform. Theory. 2007. V. 53. № 9. P. 3280–3282. https://doi.org/10.1109/TIT.2007.903122
3. *Sason I.* Entropy Bounds for Discrete Random Variables via Maximal Coupling // IEEE Trans. Inform. Theory. 2013. V. 59. № 11. P. 7118–7131. https://doi.org/10.1109/TIT.2013.2274515
4. *Strassen V.* The Existence of Probability Measures with Given Marginals // Ann. Math. Statist. 1965. V. 36. № 2. P. 423–439. https://doi.org/10.1214/aoms/1177700153

Прелов Вячеслав Валерьевич
Институт проблем передачи информации
им. А.А. Харкевича РАН, Москва
prelov@iitp.ru

Поступила в редакцию
25.10.2022
После доработки
03.11.2022
Принята к публикации
03.11.2022