ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

Том 58 2022 Вып. 4

УДК 621.391 : 519.216.3

 Н.Г. Докучаев

ПРЕДИКТОРЫ ДЛЯ ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ СИГНАЛОВ НА ОСНОВЕ АППРОКСИМАЦИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ЭКСПОНЕНТ РАЦИОНАЛЬНЫМИ МНОГОЧЛЕНАМИ

Представлены линейные интегральные предикторы для высокочастотных сигналов непрерывного времени с конечным спектральным зазором. Предикторы основаны на аппроксимации комплекснозначной периодической экспоненты (комплексной синусоиды) рациональными многочленами.

Ключевые слова: прогнозирование, линейные предикторы, передаточные функции, периодические экспоненты, высокочастотные сигналы.

DOI: 10.31857/S0555292322040076, **EDN:** NAZTGC

§ 1. Введение

Мы рассматриваем прогнозирование и предикторы для сигналов непрерывного времени. Типичный подход к прогнозированию сигналов основан на удалении высокочастотной составляющей, рассматриваемой как шум, с помощью некоторых фильтров в качестве первого шага и прогнозировании плавной низкочастотной составляющей, что считается более простым. Этот подход предполагает потерю информации, содержащейся в высокочастотной составляющей, которая расценивается как шум. Но есть и работы, направленные на извлечение информации, содержащейся в высокочастотной составляющей. Эти работы основаны на различных статистических методах и моделях обучения (см., например, работы [1–6] и библиографию в них).

Мы изучаем потраекторную предсказуемость и предикторы для сигналов непрерывного времени в рамках детерминисткой модели и частотного анализа. Хорошо известно, что определенные ограничения на спектр могут обеспечить возможности прогнозирования и интерполяции сигналов (см., например, работы [7–12] и библиографию в них). В этих работах рассматривались задачи предсказания сигналов с ограниченной полосой пропускания, и полученные предикторы не были робастными по отношению к небольшому шуму на высоких частотах (см., например, обсуждение в [13, гл. 17]).

В настоящей статье мы изучаем предикторы для высокочастотных сигналов, т.е. для сигналов без каких-либо ограничений на степень затухания спектра на высоких частотах. Мы рассматриваем сигналы, спектр которых имеет конечный спектральный зазор, т.е. конечный интервал, на котором его преобразование Фурье обращается в нуль. Известно, что эти сигналы допускают однозначную экстраполяцию по своим прошлым наблюдениям. Однако из этой однозначности еще не следует существование алгоритма прогнозирования. В целом однозначность экстраполяции не обеспечивает возможности предсказания сигнала; некоторое обсуждение этого можно найти в [14, 15].

Предикторы антикаузальных сверток (т.е. интегралов, включающих будущие значения) высокочастотных сигналов были получены в [16] для сигналов с интервальным спектральным зазором, а также в [14] для сигналов с одноточечным спектральным вырождением. Предикторы в этих работах были независимы от спектральных характеристик входных сигналов из класса с определенным спектральным вырождением для низких частот. Эти предикторы зависели от ядер соответствующих антикаузальных сверток.

В настоящей статье предлагаются принципиально новые предикторы для высокочастотных сигналов. Передаточные функции для этих предикторов представляют собой многочлены от $1/\omega$, аппроксимирующие периодическую экспоненту $e^{i\omega T}$, где $\omega \in \mathbb{R}$ – частота, а $T > 0$ – предварительно выбранный горизонт прогнозирования. Эти предикторы допускают компактное явное представление во временной области и в частотной области. Кроме того, предикторы не зависят от спектральных характеристик входных сигналов с фиксированным и известным интервальным спектральным зазором. Метод основан на подходе из [17] для предсказания сигналов с быстроубывающим спектром, где использовались полиномиальные приближения периодической экспоненты.

Статья организована следующим образом. В § 2 мы формулируем определения и основные факты, связанные с линейной слабой предсказуемостью. В § 3 сформулированы основные теоремы о предсказуемости и предикторах (теоремы 1, 2). В § 4 мы обсуждаем некоторые проблемы реализации, и наконец, § 5 содержит доказательства.

§ 2. Постановка задачи и определения

Пусть $x(t)$ – наблюдаемый в текущие моменты времени $t \in \mathbb{R}$ комплекснозначный процесс с непрерывным временем. Цель состоит в том, чтобы оценить в текущие моменты времени t значения $x(t+T)$, используя исторические значения наблюдаемого процесса $x(s)|_{s \leqslant t}$. Здесь $T > 0$ – заданный горизонт прогнозирования.

Нам понадобятся некоторые обозначения и определения.

Для $p \in [1, +\infty)$ и области $G \subset \mathbb{R}$ обозначим через $L_p(G, \mathbb{R})$ и $L_p(G, \mathbb{C})$ обычные L_p-пространства функций $x\colon G \to \mathbb{R}$ и $x\colon G \to \mathbb{C}$ соответственно. Обозначим через $C(G, \mathbb{R})$ и $C(G, \mathbb{C})$ обычные линейные нормированные пространства ограниченных непрерывных функций $x\colon G \to \mathbb{R}$ и $x\colon G \to \mathbb{C}$, соответственно, с супремум-нормой.

Для $x \in L_p(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $p = 1, 2$, обозначим через $X = \mathcal{F}x$ функцию, определенную на $i\mathbb{R}$ как преобразование Фурье x:

$$X(i\omega) = (\mathcal{F}x)(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} x(t)\, dt, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

Известно, что если $x \in L_2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, то $X(i\,\cdot\,) \in L_2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Пусть $\bar{\mathcal{X}}$ – множество сигналов $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, таких что их преобразования Фурье $X(i\,\cdot\,) \in L_1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. В частности, в класс $\bar{\mathcal{X}}$ входят сигналы, образованные как $x(t) = \int_t^{t+\delta} y(s)\, ds$ для $y \in L_2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\delta \in \mathbb{R}$. Ясно, что $\bar{\mathcal{X}} \subset C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, т.е. эти сигналы ограничены и непрерывны.

Мы рассматриваем $\bar{\mathcal{X}}$ как линейное нормированное пространство, снабженное нормой $\|X(i\,\cdot\,)\|_{L_1(\mathbb{R},\mathbb{C})}$, где $X(i\,\cdot\,) = \mathcal{F}x$ для $x \in \bar{\mathcal{X}}$. Определим $\mathcal{P}$ как множество всех непрерывных отображений $p\colon \bar{\mathcal{X}} \to C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, таких что для любых $x_1, x_2 \in \bar{\mathcal{X}}$ и $\tau \in \mathbb{R}$ имеем $p(x_1(\cdot))(t) = p(x_2(\cdot))(t)$ для всех $t \leqslant \tau$, если $x_1(t) = x_2(t)$ для всех

$t \leqslant \tau$. Другими словами, это набор "каузальных" отображений; мы будем искать предикторы в этом классе.

Пусть задано $T > 0$.

Определение 1. Будем говорить, что класс $\mathcal{X} \subset \bar{\mathcal{X}}$ *линейно предсказуем с горизонтом предсказания* T, если существует последовательность $\{\widetilde{p}_d(\cdot)\}_{d=1}^{+\infty} \subset \mathcal{P}$, такая что

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |x(t+T) - \widetilde{y}_d(t)| \to 0 \quad \text{при} \quad d \to +\infty \quad \forall x \in \mathcal{X},$$

где

$$\widetilde{y}_d = \widetilde{p}_d(x(\cdot)).$$

Определение 2. Скажем, что класс $\mathcal{X} \subset \bar{\mathcal{X}}$ *равномерно линейно предсказуем с горизонтом предсказания* T, если существует последовательность $\{\widetilde{p}_d(\cdot)\}_{d=1}^{+\infty} \subset \mathcal{P}$, такая что

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |x(t+T) - \widetilde{y}_d(t)| \to 0 \quad \text{равномерно по } x \in \mathcal{X},$$

где $\widetilde{y}_d(\cdot)$ такое же, как в определении 1.

Функции $\widetilde{y}_d(t)$ в приведенном выше определении можно рассматривать как приближенные предсказания процесса $x(t+T)$.

§ 3. Основной результат

Пусть задано $\Omega > 0$. Зададим $\mathcal{X}_\Omega$ как множество всех сигналов $x(\cdot) \in \bar{\mathcal{X}}$, таких что $X(i\omega) = 0$ при $\omega \in (-\Omega, \Omega)$ для $X = \mathcal{F}x$.

Пусть $\mathcal{U}_\Omega$ – некоторое множество сигналов $x \in \mathcal{X}_\Omega$, таких что

$$\|X(i\,\cdot)\|_{L_1(\mathbb{R},\mathbb{C})} \leqslant 1 \quad \text{и} \quad \int\limits_{\omega\colon |\omega|\geqslant M} |X(i\omega)|\,d\omega \to 0 \quad \text{при } M \to +\infty$$

равномерно по $x \in \mathcal{U}_\Omega$ для $X = \mathcal{F}x$.

Теорема 1. *Для любого $T > 0$ справедливы следующие утверждения*:

(i) *Класс $\mathcal{X}_\Omega$ линейно предсказуем с горизонтом предсказания T*;

(ii) *Класс $\mathcal{U}_\Omega$ равномерно линейно предсказуем с горизонтом предсказания T.*

3.1. Семейство предикторов. В этом пункте мы введем некоторые предикторы.

Для $d = 1, 2, \ldots$ обозначим через Ψ_d множество всех функций $\sum\limits_{k=1}^{d} \dfrac{a_k}{z^k}$, определенных для $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, для всех $a_k \in \mathbb{R}$. Обозначим $\Psi := \bigcup\limits_d \Psi_d$.

Для $d = 0, 1, 2, \ldots$ и $s \in \mathbb{R}$ обозначим через $\mathcal{X}^{(d)}(s)$ множество всех сигналов $x \in \bar{\mathcal{X}}$, таких что $\int\limits_{-\infty}^{s} |t^d x(t)|\,dt < +\infty$. Можно отметить, что к этому классу относятся, в частности, сигналы $x \in \bar{\mathcal{X}}$, такие что $\int\limits_{\mathbb{R}} \left|\dfrac{d^k X}{d\omega^k}(i\omega)\right|^2 d\omega < +\infty$ для $k = 0, 1, \ldots, d+1$, $X = \mathcal{F}x$.

Пусть $r\colon \mathbb{R} \to (0, 1]$ – непрерывная функция, такая что $r(0) = 1$, $r(\omega) \equiv r(-\omega)$, функция $r(\omega)$ монотонно не возрастает на $(0, +\infty)$, и $r(\omega) \to 0$ при $|\omega| \to +\infty$. Пусть $r_\nu(\omega) := r(\nu\omega)$, $\nu \in (0, 1]$.

Теорема 2. *Справедливы следующие утверждения*:

(i) *Для любого* $\varepsilon_1 > 0$ *и любого* $x \in \mathcal{X}_\Omega$, *такого что* $\|X(i\,\cdot)\|_{L_1(\mathbb{R},\mathbb{C})} \leqslant 1$, *существует* $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon_1, x) > 0$, *такое что для* $X = \mathcal{F}x$ *и любого* $\nu \in (0, \nu_0]$

$$\int\limits_{\omega\colon |\omega| \geqslant \Omega} (1 - r_\nu(\omega))|X(i\omega)|\, d\omega \leqslant \varepsilon_1. \tag{1}$$

Более того, можно выбрать одно и то же $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon_1)$ *для всех* $x \in \mathcal{U}_\Omega$;

(ii) *Для любых* $\varepsilon_2 > 0$ *и* $\nu > 0$ *существуют целое число* $d = d(\nu, \varepsilon_2, T) > 0$ *и функция* $\psi_d \in \Psi_d$, *такие что*

$$\sup_{\omega\colon |\omega| \geqslant \Omega} |e^{i\omega T} r_\nu(\omega) - \psi_d(i\omega)| \leqslant \varepsilon_2; \tag{2}$$

(iii) *Предсказуемость, указанную в утверждении* (i) *теоремы* 1 *для* $x \in \mathcal{X}_\Omega$, *а также предсказуемость, указанную в утверждении* (ii) *теоремы* 1 *для* $x \in \mathcal{U}_\Omega$, *можно обеспечить с помощью последовательности предикторов*

$$p_d\colon \mathcal{X}_\Omega \to C(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \quad d = 1, 2, \ldots,$$

определяемых их передаточными функциями $\psi_d(i\omega)$. *Точнее, для любых* $\varepsilon > 0$ *и* $\widehat{y}_d(t) = p_d(x(\cdot))(t)$ *оценка*

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |x(t+T) - \widehat{y}_d(t)| \leqslant \varepsilon$$

выполняется, если ν, d *и* ψ_d *таковы, что* (1), (2) *выполняются для достаточно малых* ε_1 *и* ε_2, *таких что*

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \leqslant 2\pi\varepsilon.$$

Можно отметить, что для входных сигналов $x \in \mathcal{X}_\Omega$ *передаточные функции* $\psi_d(i\omega)$ *можно заменить функциями* $\psi_d(i\omega)\mathbb{I}_{\omega\colon |\omega| \geqslant \Omega}$, *где* $\mathbb{I}$ *обозначает индикаторную функцию*;

(iv) *Для* $x \in \mathcal{X}^{(d-1)}(t) \cap \mathcal{X}_\Omega$ *описанные выше предикторы можно представить в виде*

$$p_d(x(\cdot))(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} K(t-\tau)x(\tau)\, d\tau, \tag{3}$$

где

$$K(t) = \sum_{k=1}^{d} a_k \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Здесь $a_k \in \mathbb{C}$ – *коэффициенты при* $\psi_d(z) = \sum\limits_{k=1}^{d} a_k z^{-k}$ *из п.* (ii).

3.2. Интегральное представление предикторов для общего типа $x \in \mathcal{X}_\Omega$. Представление (3) для приведенных выше предикторов требует, чтобы $x \in \mathcal{X}^{(d-1)}(t)$. Обсудим возможности представления во временной области для общего типа $x \in \mathcal{X}_\Omega$.

Рассмотрим операторы h_k, определенные на $\mathcal{X}_\Omega$ своими передаточными функциями $(i\omega)^{-k}$, $k = 1, 2, \ldots$ Другими словами, если $y = h_k(x)$ для $x \in \mathcal{X}_\Omega$, то $Y(i\omega) = (i\omega)^{-k}X(i\omega)$ для $Y = \mathcal{F}y$ и $X = \mathcal{F}x$. Очевидно, что $h_k(x(\cdot)) \in \mathcal{X}_\Omega$, преобразования Фурье процессов $h_k(x(\cdot))$ равны нулю на $[-\Omega, \Omega]$, а операторы $h_k\colon \mathcal{X}_\Omega \to C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

непрерывны. Из определений следует, что

$$p_d(x(\cdot))(t) = \sum_{k=1}^{d} a_k h_k(x(\cdot))(t).$$

Можно заметить, что $p_d(\cdot)$ зависит от T через коэффициенты a_k, определенные для функций $\psi_d(\omega)$, аппроксимирующих $e^{i\omega T}$.

Формально оператор $h_k(x(\cdot)$ можно представить в виде

$$h_k(x(\cdot))(s_k) = \int\limits_{-\infty}^{s_k} ds_{k-1} \int\limits_{-\infty}^{s_{k-1}} ds_{k-2} \ \ldots \int\limits_{-\infty}^{s_2} ds_1 \int\limits_{-\infty}^{s_1} x(s)\, ds, \tag{4}$$

т.е.

$$h_1(x(\cdot))(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} x(s)\, ds, \quad h_k(x(\cdot))(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} h_{k-1}(x(\cdot))(s)\, ds, \quad k = 2, 3, \ldots$$

Для $x \in \mathcal{X}_\Omega$ общего типа нет гарантии, что $x \in L_1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ или $h_k(x(\cdot)) \in L_1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Однако приведенные выше интегралы определены корректно, поскольку их можно заменить интегралами по конечным интервалам времени

$$h_1(x(\cdot))(t) = \int\limits_{R_1}^{t} x(s)\, ds, \quad h_k(x(\cdot))(t) = \int\limits_{R_k}^{t} h_{k-1}(x(\cdot))(s)\, ds, \quad k > 1, \tag{5}$$

где R_k – корни сигналов $h_k(x(\cdot))(t)$. Это возможно из-за особых свойств сигналов со спектральным зазором, т.е. с преобразованием Фурье, обращающимся в нуль на отрезке: при любом $\tau < 0$ эти сигналы имеют бесконечно много корней на отрезке $(-\infty, \tau)$ (см., например, [18]). Следовательно, предикторы, определенные в теореме 2 для $x \in \mathcal{X}_\Omega$, допускают альтернативное интегральное представление через (4) или (5).

§ 4. О численной реализации предикторов

Непосредственная реализация предиктора, введенного в теореме 2, требует вычислений интегралов по полубесконечным интервалам, которые могут быть численно сложными. Однако эта теорема может привести к методам прогнозирования, обходящим такие расчеты. Обсудим эти возможности.

Пусть $t_1 \in \mathbb{R}$ задано. Пусть $x_k := h_k(x)$ для $x \in \mathcal{X}_\Omega$, $k = 1, 2, \ldots$, и пусть $\eta_k := x_k(t_1)$.

Лемма 1. *В обозначениях теоремы 2 для любого $t \geqslant t_1$ предсказания $\widehat{y}_d = p_d(x(\cdot))$ можно представить в виде*

$$\widehat{y}_d(t) = \sum_{k=1}^{d} a_k \left(\sum_{\ell=1}^{k} c_\ell(t) \eta_\ell + f_k(t) \right), \tag{6}$$

где $c_\ell(t) := (t - t_1)^{(\ell-1)}/(\ell-1)!$ и

$$f_k(t) := \int\limits_{t_1}^{t} d\tau_1 \int\limits_{t_1}^{\tau_1} d\tau_2 \ldots \int\limits_{t_1}^{\tau_k} x(s)\, ds. \tag{7}$$

Эта лемма показывает, что предсказание $\widehat{y}_d(t)$ для $x(t+T)$ легко вычислить для $t > t_1$, если мы знаем все η_k и наблюдаем $x|_{[t_1,t]}$.

Обсудим возможные способы вычисления η_k в обход прямого интегрирования по бесконечным интервалам.

Во-первых, заметим, что (6) подразумевает следующее полезное свойство.

С л е д с т в и е 1. *Для любого $\varepsilon > 0$ существуют целое число $d = d(\varepsilon) > 0$ и числа $a_1, \dots, a_d \in \mathbb{R}$, такие что для любых $x \in \mathcal{X}_\Omega$ и $t_1 \in \mathbb{R}$ существуют $\bar{\eta}_1, \dots, \bar{\eta}_d \in \mathbb{R}$, такие что $|x(t+T) - y_d(t)| \leqslant \varepsilon$ для всех $t \geqslant t_1$, где*

$$y_d(t) = y_d(t, \bar{\eta}_1, \dots, \bar{\eta}_d) := \sum_{k=1}^{d} a_k \left(\sum_{\ell=1}^{k} c_\ell(t)\bar{\eta}_\ell + f_k(t) \right). \tag{8}$$

В этом следствии $d = d(\varepsilon)$ можно выбрать, как указано в утверждениях (i), (ii) теоремы 2, где ε_1 и ε_2 таковы, что $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \leqslant 2\pi\varepsilon$.

Далее обсуждается использование соотношения (6) для оценки η_k и прогнозирования. Пусть $\theta > t_1$. Предположим, что цель состоит в том, чтобы спрогнозировать значение $x(\theta + T)$ для наблюдений в моменты времени $t \leqslant \theta$. Если $\theta > t_1 + T$, то следствие 1 дает возможность построить предикторы через подгоночные параметры $\eta_1, \dots, \eta_d$, используя прошлые наблюдения, доступные для $t \in [t_1, \theta - T]$: можно сопоставить значения $y_d(t, \bar{\eta}_1, \dots, \bar{\eta}_d)$ с прошлыми наблюдениями $x(t+T)$. Начиная с этого момента, мы предполагаем, что $\theta > t_1 + T$.

Пусть d достаточно велико, чтобы $x(t+T)$ аппроксимировалось величиной $\widehat{y}_d(t)$, как описано в теореме 2, т.е. $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |x(t+T) - \widehat{y}_d(t)| \leqslant \varepsilon$ для некоторого достаточно малого $\varepsilon > 0$ при некотором выборе a_k.

В качестве приближения истинного набора $\eta_1, \dots, \eta_d$ мы можем принять набор $\bar{\eta}_1, \dots, \bar{\eta}_d$, такой что

$$|x(t+T) - y_d(t, \bar{\eta}_1, \dots, \bar{\eta}_d)| \leqslant \varepsilon \quad \forall t \in [t_1, \theta - T]. \tag{9}$$

(Напомним, что в момент времени θ значения $x(t+T)$ и $y_d(t, \bar{\eta}_1, \dots, \bar{\eta}_d)$ наблюдаемы для этих $t \in [t_1, \theta - T]$.) Если выполняется (9), то можно заключить, что $y_d(t, \bar{\eta}_1, \dots, \bar{\eta}_d)$ дает приемлемое предсказание $x(t+T)$ для этих t. Ясно, что из теоремы 2 следует, что множество $\bar{\eta}_1, \dots, \bar{\eta}_d$, обеспечивающее (9), существует, так как это неравенство выполняется при $\bar{\eta}_k = \eta_k$.

Соответствующее значение $y_d(\theta, \bar{\eta}_1, \dots, \bar{\eta}_d)$ мы можем рассматривать как оценку для $\widehat{y}_d(\theta)$ и, соответственно, для $x(\theta + T)$.

Далее, набор $\bar{\eta}_1, \dots, \bar{\eta}_d$, обеспечивающий (9), все еще может быть сложно найти. Вместо этого можно рассматривать подходящие предсказания и наблюдения в конечном числе точек $t \in [t_1, T - \theta]$.

Пусть целое число $\bar{d} \geqslant d$ и множество $\{t_m\}_{m=1}^{\bar{d}} \subset \mathbb{R}$ выбраны так, что

$$t_1 < t_2 < t_3 < \ldots < t_{\bar{d}-1} < t_{\bar{d}} \leqslant \theta - T.$$

Мы предлагаем использовать наблюдения $x(t)$ в моменты времени $t = t_m$. Рассмотрим систему уравнений

$$\sum_{k=1}^{d} a_k \left(\sum_{\ell=1}^{k} c_\ell(t_m)\bar{\eta}_\ell + f_k(t_m) \right) = \zeta_m, \quad m = 1, \dots, \bar{d}. \tag{10}$$

Рассмотрим сначала случай, когда $\bar{d} = d$. В этом случае можно выбрать $\zeta_m = x(t_m + T)$; эти значения наблюдаемы непосредственно, без вычисления интегралов на полубесконечных интервалах, необходимых для $\widehat{y}_d(t_m)$. Соответствующий выбор $\bar{\eta}_k$ обеспечивает нулевую ошибку предсказания для $x(t_m+T)$, $m=1,\ldots,\bar{d}$.

Включение в рассмотрение большего количества наблюдений, т.е. выбор большего $\bar{d}>d$ и более широкого интервала $[t_1,\theta-T]$ приведет к улучшению оценки η_k. Если мы рассмотрим $\bar{d}>d$, то в общем случае невозможно добиться, чтобы $y_d(t,\bar{\eta}_1,\ldots,\bar{\eta}_d)=x(t_m+T)$ для всех m, так как нельзя гарантировать, что система (10) разрешима для $\zeta_m\equiv x(t_m+T)$ – система будет переопределена. Тем не менее оценка, представленная в (9), все еще может быть достигнута для любого сколь угодно большого $\bar{d}$, поскольку (9) выполняется. Решение может быть найдено с помощью методы подгонки линейных моделей.

Далее, вместо вычисления коэффициентов a_k путем решения задачи аппроксимации комплексной экспоненты, описанной в утверждениях (i), (ii) теоремы 2, можно найти эти коэффициенты, рассматривая их как дополнительные неизвестные в системе (10) с $\bar{d}\geqslant 2d$. Из теоремы 2 снова следует, что существуют $\bar{\eta}_k=\eta_k\in\mathbb{R}$ и $a_k\in\mathbb{R}$, такие что (10) выполняется с $\zeta_m=\widehat{y}_d(t_m)$. Это привело бы к нелинейной задаче подбора неизвестных $a_1,\ldots,a_d,\bar{\eta}_1,\ldots,\bar{\eta}_d$.

Состоятельность этих оценок пока неясна, поскольку выбор меньшего ε приводит к большему d. Мы оставляем анализ этих методов для будущих исследований.

§ 5. Доказательства

Теорема 1 непосредственно вытекает из теоремы 2.

Доказательство теоремы 2. Докажем утверждение (i). Выберем $M>0$ так, чтобы

$$\int\limits_{\omega\colon |\omega|>M} |X(i\omega)|\,d\omega<\varepsilon_1/2 \quad \forall x\in\mathcal{U}_\Omega.$$

Тогда $r_\nu(\omega)\to 1$ равномерно на $\omega\in[-M,M]$, так как

$$0<1-r_\nu(\omega)\leqslant 1-r_\nu(M) \quad \text{для} \quad \omega\in[-M,M].$$

Следовательно, можно выбрать $\nu>0$ так, что

$$\int\limits_{-M}^{M}(1-r_\nu(\omega))|X(i\omega)|\,d\omega\leqslant\varepsilon_1/2.$$

Это означает, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}(1-r_\nu(\omega))|X(i\omega)|\,d\omega=$$

$$=\int\limits_{-M}^{M}(1-r_\nu(\omega))|X(i\omega)|\,d\omega+\int\limits_{\omega\colon |\omega|>M}(1-r_\nu(\omega))|X(i\omega)|\,d\omega\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{-M}^{M}(1-r_\nu(\omega))|X(i\omega)|\,d\omega+\int\limits_{\omega\colon |\omega|>M}|X(i\omega)|\,d\omega\leqslant\frac{\varepsilon_1}{2}+\frac{\varepsilon_1}{2}\leqslant\varepsilon_1.$$

Это завершает доказательство утверждения (i).

Докажем утверждение (ii). Из теоремы Стоуна – Вейерштрасса для вещественных непрерывных функций на локально компактных пространствах следует, что существуют $\psi_d^c(\omega) \in \Psi_d$ и $\psi_d^s(\omega) \in \Psi_d$, такие что

$$\sup_{\omega\colon |\omega|\geqslant\Omega} |\cos(T\cdot)r_\nu(\cdot) - \psi_d^c(\cdot)| \leqslant \varepsilon_2/2, \qquad \sup_{\omega\colon |\omega|\geqslant\Omega} |\sin(T\cdot)r_\nu(\cdot) - \psi_d^s(\cdot)| \leqslant \varepsilon_2/2$$

(см., например, [19, теорема 12, с. 240–241]).

Легко видеть, что достаточно выбрать нечетные функции $\psi_d^c(\omega) = \sum\limits_{k=1}^{d} \gamma_k^c \omega^{-k}$ и четные функции $\psi_d^s(\omega) = \sum\limits_{k=1}^{d} \gamma_k^s \omega^{-k}$, т.е. $\gamma_{2m+1}^c = 0$ и $\gamma_{2m}^s = 0$ для целых чисел $m \geqslant 0$. Здесь γ_k^c и γ_k^s вещественные.

Построим искомые функции как

$$\psi_d(i\omega) = \psi_d^c(\omega) + i\psi_d^s(\omega) = \sum_{k=1}^{d} \gamma_k^c \omega^{-k} + i\sum_{k=1}^{d} \gamma_k^s \omega^{-k} = \sum_{k=1}^{d} a_k (i\omega)^{-k},$$

где коэффициенты $a_k \in \mathbb{R}$ определяются следующим образом:

- Если $k = 2m$ для целого числа m, то $a_k = (-1)^m \gamma_k^c$;
- Если $k = 2m+1$ для целого числа m, то $a_k = -(-1)^m \gamma_k^s$.

Такой выбор ψ_d гарантирует выполнение оценки (2). Это завершает доказательство утверждения (ii).

Докажем утверждение (iii). Предположим, что оценки (1), (2) выполнены для данных d, ν, ψ_d. Имеем

$$2\pi(x(t+T) - \widehat{y}_d(t)) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}(e^{i\omega T} - \psi_d(i\omega))X(i\omega)\, d\omega = A(t) + B(t),$$

где

$$A(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}(e^{i\omega T} - e^{i\omega T} r_\nu(\omega))X(i\omega)\, d\omega,$$

$$B(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}(e^{i\omega T} r_\nu(\omega) - \psi_d(i\omega))X(i\omega)\, d\omega.$$

Очевидно, что

$$|A(t)| \leqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty} (1 - r_\nu(\omega))|X(i\omega)|\, d\omega \leqslant \varepsilon_1$$

и

$$|B(t)| \leqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty} |e^{i\omega T} r_\nu(\omega) - \psi_d(i\omega)||X(i\omega)|\, d\omega \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\omega\colon |\omega|\geqslant\Omega} |e^{i\omega T} r_\nu(\omega) - \psi_d(i\omega)| \int\limits_{-\infty}^{\infty} |X(i\omega)|\, d\omega \leqslant \varepsilon_2.$$

Следовательно,

$$2\pi|x(t+T)-\widehat{y}_d(t)|\leqslant \varepsilon_1+\varepsilon_2.$$

Это доказывает равномерную предсказуемость, указанную в утверждении (ii) теоремы 1 для сигналов $x\in\mathcal{U}_\Omega$. Предсказуемость, указанная в утверждении (i) теоремы 1, следует из вышеприведенного доказательства, примененного к одноэлементному множеству $\mathcal{U}_\Omega=\{x(\cdot)\}$, возможно, умноженному на константу, чтобы удовлетворить ограничению $\|X(\cdot)\|_{L_1(\mathbb{R},\mathbb{C})\leqslant 1}$. Это доказывает утверждение (iii).

Докажем утверждение (iv). Во-первых, из известных свойств преобразований Фурье производных и первообразных вытекают представления (4), (5) (см. некоторые пояснения в п. 3.2). Утверждение (iv) можно получить последовательным применением теоремы Фубини к интегрируемым в $L_1((-\infty,t],\mathbb{R})$ сигналам $(\tau-s)^\ell x(s)$, представленным в (4) для $\ell=1,2,\dots,$ $\tau\in(\infty,s]$. ▲

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы 1. В обозначениях теоремы 2 для всех $t\geqslant t_1$ имеем $y_d(t)=\sum\limits_{k=1}^{d}a_kx_k(t)$, т.е.

$$y_d(t)=\sum_{k=1}^{d}a_k\left(\eta_k+\int\limits_{t_1}^{t}x_{k-1}(s)\,ds\right) \tag{11}$$

(мы предполагаем здесь что $x_0:=x$). Далее, имеем

$$\int\limits_{t_1}^{t}x_1(t)\,dt=\int\limits_{t_1}^{t}\left(\eta_1+\int\limits_{t_1}^{\tau}x_0(s)\,ds\right)d\tau=\eta_1(t-t_1)+\int\limits_{t_1}^{t}d\tau\int\limits_{t_1}^{\tau}x(s)\,ds$$

и

$$\int\limits_{t_1}^{t}x_2(t)\,dt=\int\limits_{t_1}^{t}\left(\eta_2+\int\limits_{t_1}^{\tau_1}x_1(s)\,ds\right)d\tau_1=\eta_2(t-t_1)+\int\limits_{t_1}^{t}d\tau_1\int\limits_{t_1}^{\tau_1}x_1(s)\,ds=$$
$$=\eta_2(t-t_1)+\int\limits_{t_1}^{t}d\tau_1\left[\eta_1(\tau_1-t_1)+\int\limits_{t_1}^{\tau_1}d\tau_2\int\limits_{t_1}^{\tau_2}x(s)\,ds\right]=$$
$$=\eta_2(t-t_1)+\frac{\eta_1^2}{2}(t-t_1)+\int\limits_{t_1}^{t}d\tau_1\int\limits_{t_1}^{\tau_2}x(s)\,ds.$$

Аналогично получаем, что

$$\int\limits_{t_1}^{t}x_k(t)\,dt=\eta_k(t-t_1)+\frac{\eta_{k-1}}{2}(t-t_1)^2+\ldots+\frac{\eta_1}{k!}(t-t_1)^k+$$
$$+\int\limits_{t_1}^{t}d\tau_1\int\limits_{t_1}^{\tau_1}d\tau_2\;\ldots\int\limits_{t_1}^{\tau_k}x(s)\,ds.$$

Из этого следует, что

$$\eta_k + \int\limits_t^t x_{k-1}(s)\,ds = \sum_{\ell=1}^{k} c_\ell(t)\eta_\ell + f_k(t).$$

Вместе с (11) это доказывает (8), что завершает доказательство леммы 1. ▲

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Brooks C., Hinich M.J.* Detecting Intraday Periodicities with Application to High Frequency Exchange Rates // J. Roy. Statist. Soc. Ser. C. 2006. V. 55. № 2. P. 241–259. https://doi.org/10.1111/j.1467-9876.2006.00534.x
2. *Christensen H.L., Murphy J., Godsill S.J.* Forecasting High-Frequency Futures Returns Using Online Langevin Dynamics // IEEE J. Sel. Top. Signal Process. 2012. V. 6. № 4. P. 366–380. https://doi.org/10.1109/JSTSP.2012.2191532
3. *Granger C.W.J.* Extracting Information from Mega-panels and High-Frequency Data // Statist. Neerlandica. 1998. V. 52. № 3. P. 258–272. https://doi.org/10.1111/1467-9574.00084
4. *Li Z., Han J., Song Y.* On the Forecasting of High-Frequency Financial Time Series Based on ARIMA Model Improved by Deep Learning // J. Forecast. 2020. V. 39. № 7. P. 1081–1097. https://doi.org/10.1002/for.2677
5. *Luo S., Tian C.* Financial High-Frequency Time Series Forecasting Based on Sub-step Grid Search Long Short-Term Memory Network // IEEE Access. 2020. V. 8. P. 203183–203189. https://doi.org/10.1109/ACCESS.2020.3037102
6. *Engle R.F.* The Econometrics of Ultra-high-Frequency Data // Econometrica. 2000. V. 68. № 1. P. 1–22. https://doi.org/10.1111/1468-0262.00091
7. *Knab J.J.* Interpolation of Band-Limited Functions Using the Approximate Prolate Series // IEEE Trans. Inform. Theory. 1979. V. 25. № 6. P. 717–720. https://doi.org/10.1109/TIT.1979.1056115
8. *Lyman R.J., Edmonson W.W., McCullough S., Rao M.* The Predictability of Continuous-Time, Bandlimited Processes // IEEE Trans. Signal Process. 2000. V. 48. № 2. P. 311–316. https://doi.org/10.1109/78.823959
9. *Lyman R.J., Edmonson W.W.* Linear Prediction of Bandlimited Processes with Flat Spectral Densities // IEEE Trans. Signal Process. 2001. V. 49. № 7. P. 1564–1569. https://doi.org/10.1109/78.928709
10. *Papoulis A.* A Note on the Predictability of Band-limited Processes // Proc. IEEE. 1985. V. 73. № 8. P. 1332–1333. https://doi.org/10.1109/PROC.1985.13284
11. *Marvasti F.* Comments on "A Note on the Predictability of Band-limited Processes" // Proc. IEEE. 1986. V. 74. № 11. P. 1596. https://doi.org/10.1109/PROC.1986.13674
12. *Vaidyanathan P.P.* On Predicting a Band-limited Signal Based on Past Sample Values // Proc. IEEE. 1987. V. 75. № 8. P. 1125–1127. https://doi.org/10.1109/PROC.1987.13856
13. *Higgins J.R.* Sampling Theory in Fourier and Signal Analysis: Foundations. Oxford: Clarendon; New York: Oxford Univ. Press, 1996.
14. *Dokuchaev N.* On Linear Weak Predictability with Single Point Spectrum Degeneracy // Appl. Comput. Harmon. Anal. 2021. V. 53. P. 116–131. https://doi.org/10.1016/j.acha.2021.01.005
15. *Докучаев Н.Г.* К однозначности восстановления данных при ограничениях на множество спектральных значений // Пробл. передачи информ. 2021. Т. 57. № 4. С. 74–78. https://doi.org/10.31857/S0555292321040069
16. *Dokuchaev N.G.* The Predictability of Band-limited, High-Frequency, and Mixed Processes in the Presence of Ideal Low-Pass Filters // J. Phys. A: Math. Theor. 2008. V. 41. № 38. P. 382002 (7 pp.). https://doi.org/10.1088/1751-8113/41/38/382002

17. *Dokuchaev N.* Limited Memory Predictors Based on Polynomial Approximation of Periodic Exponentials // J. Forecast. 2022. V. 41. № 5. P. 1037–1045. https://doi.org/10.1002/for.2843
18. *Blank N., Ulanovskii A.* Paley–Wiener Functions with a Generalized Spectral Gap // J. Fourier Anal. Appl. 2011. V. 17. № 5. P. 899–915. https://doi.org/10.1007/s00041-010-9160-3
19. *Stone M.H.* The Generalized Weierstrass Approximation Theorem // Math. Mag. 1948. V. 21. № 4. P. 167–184; № 5. P. 237–254 (continued). https://doi.org/10.2307/3029750; https://doi.org/10.2307/3029337

Докучаев Николай Геннадьевич
Институт ZJU-UIUC (Чжэцзянский университет / Иллинойский университет в Урбане-Шампейне),
Чжэцзянский университет, Хайнин,
провинция Чжэцзян, Китай
Dokuchaev@intl.zju.edu.cn

Поступила в редакцию
01.08.2022
После доработки
12.11.2022
Принята к публикации
14.11.2022