ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

Том 58 2022 Вып. 4

УДК 621.391 : 519.176

 Я.К. Шубин

НИЖНЯЯ ОЦЕНКА МИНИМАЛЬНОГО ЧИСЛА РЕБЕР В ПОДГРАФАХ ГРАФА ДЖОНСОНА

Доказана новая нижняя оценка минимального числа ребер в подграфах графа Джонсона в общем случае.

Ключевые слова: графы Джонсона, дистанционные графы.

DOI: 10.31857/S0555292322040088, **EDN:** NBIEMH

§ 1. Введение

В статье рассматривается специальный дистанционный граф $G(n,r,s)$, вершинами которого являются точки в n-мерном булевом кубе, у которых ровно r единиц, а ребро между такими вершинами проводится тогда и только тогда, когда скалярное произведение соответствующих векторов равно s. Данное определение можно также сформулировать в комбинаторных терминах, а именно: вершинами данного графа являются всевозможные r-элементные подмножества множества $\mathcal{R}_n = \{1,2,\ldots,n\}$, а ребро проводится между подмножествами, имеющими ровно s общих элементов. Именно вторым определением мы будем пользоваться в дальнейшем.

Граф $G(n,r,s)$ имеет большое значение для теории графов, комбинаторной геометрии и исследования кодов с запрещенными расстояниями. Именно с помощью этих графов Франкл и Уилсон установили, что хроматическое число пространства растет экспоненциально с ростом размерности (см. [1]). В 1991 г. Дж. Кан и Г. Калаи использовали результаты Франкла и Уилсона для опровержения классической гипотезы Борсука о том, что всякое ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$ мощности больше 1 может быть разбито на $n+1$ частей меньшего диаметра (см. [2–6]). В работах [7–10] исследованы некоторые свойства графа $G(n,r,s)$ и схожих с ним по структуре графов.

Обозначим через $\rho(W)$ количество ребер графа $G=(V,E)$ на множестве $W \subseteq V$. Иными словами,

$$\rho(W) = |\{(x,y) \in E \mid x \in W,\ y \in W\}|.$$

Также положим

$$\rho_G(\ell) = \min_{\substack{|W|=\ell \\ W \subseteq V}} \rho(W).$$

Отметим, что проблема оценивания количества ребер в индуцированных подграфах тесно связана с теорией расширителей и спектральной теорией графов (см. [11–13]).

Будем рассматривать величину $\rho_{G(n,r,s)}(\ell(n))$ при фиксированных r и s в зависимости от асимптотики $\ell(n)$ при $n \to \infty$.

Напомним, что независимым множеством вершин графа G называется такое подмножество его вершин, что никакие две вершины этого подмножества не соединены ребром. Числом независимости $\alpha(G)$ называется наибольшая мощность независимого множества.

Заметим, что если $\ell \leqslant \alpha$, то $\rho_G(\ell) = 0$. Таким образом, мы будем исследовать величину $\rho_{G(n,r,s)}(\ell)$ именно в случае $\alpha < \ell \leqslant |V(G(n,r,s))| = C_n^r$. Число независимости графа $G(n,r,s)$ было исследовано в работе [14].

В работах [15, 16] были доказаны следующие оценки.

Теорема 1. *Для графа $G(n,r,s)$ с фиксированными r, s и любой функции $\ell = \ell(n)$, такой что $\ell > \alpha(G(n,r,s))$, выполнено*

$$\rho_{G(n,r,s)}(\ell) \leqslant (1+o(1))\frac{\ell^2}{n^s}\frac{C_r^s r!}{2(r-s)!}.$$

Теорема 2. *Для графа $G(n,r,s)$ с фиксированными $r, s > 0$ и любой функции $\ell = \ell(n)$, такой что $n^{r-1} = o(\ell)$, выполнено*

$$\rho_{G(n,r,s)}(\ell) \geqslant (1+o(1))\frac{\ell^2}{n^s}\frac{C_r^s r!}{2(r-s)!}.$$

Обратим внимание, что вместе эти две теоремы дают точную оценку в случае "самых больших" функций ℓ для любых фиксированных r и s. При меньших ℓ верхняя оценка из теоремы 1 также верна, однако доказательство нижней оценки аналогично теореме 2 провести пока не удается.

Заметим, что если мы применим для графа $G(n,r,s)$ теорему Турана для дистанционных графов (см. [17]), то получим оценку

$$\rho_{G(n,r,s)}(\ell) \geqslant (1+o(1))\frac{\ell^2}{\alpha(G(n,r,s))}.$$

При $r \leqslant 2s+1$ мы знаем (см. [14]), что

$$n^s c(r,s) \leqslant \alpha(G(n,r,s)) \leqslant n^s d(r,s),$$

где $c(r,s)$ и $d(r,s)$ – константы, зависящие только от r и s.

Таким образом, в случае $r \leqslant 2s+1$ порядок верхней и нижней оценок одинаков, а зазор остается лишь в константу.

Теперь рассмотрим случай $r > 2s+1$. В этом режиме имеем (см. [14])

$$\alpha(G(n,r,s)) \sim \frac{n^{r-s-1}}{(r-s-1)!}.$$

Если подставить это число независимости в турановскую оценку, то в знаменателе будет n^{r-s-1}, а в верхней оценке из теоремы 1 в знаменателе находится n^s. Заметим, что $r-s-1 > s$, а значит, между оценками остается зазор по порядку.

В данной статье будет доказана следующая

Теорема 3. *Для графа $G(n,r,s)$ с фиксированными r и s, где $r > 2s+1$, $s > 1$, и любой функции $\ell = \ell(n)$, такой что $n^{r-2} = o(\ell)$, $\ell = o(n^{r-1})$, выполнено*

$$\rho_{G(n,r,s)}(\ell) \geqslant (1+o(1))\frac{\ell^2}{n^s}c(r,s),$$

где $c(r,s)$ – константа, зависящая от r и s.

Получаем, что в случае $n^{r-2} = o(\ell)$, $\ell = o(n^{r-1})$ и $r > 2s+1$ по теореме 3 мы также доказали, что нижняя и верхняя оценки отличаются лишь в константу раз.

§ 2. Доказательство теоремы 3

Для каждого n возьмем подмножество вершин W_n графа $G(n,r,s)$, такое что $|W_n| = \ell(n)$, $\ell = o(n^{r-1}), n^{r-2} = o(\ell)$.

Пронумеруем все s-элементные подмножества $\mathcal{R}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ и назовем их $S_1, S_2, \ldots S_m$, где $m = C_n^s$. Для каждого S_i определим подмножество вершин нашего множества W_n, содержащих его:

$$K_i = \{v \mid S_i \subset v,\ v \in W_n\}.$$

Данные множества будут пересекаться по вершинам. Но если две вершины нашего графа соединены ребром, то они будут одновременно входить ровно в одно из K_i, так как они имеют ровно s общих элементов. Тогда

$$\rho(W_n) = \sum_{i=1}^{m} \rho(K_i).$$

Введем обозначение $k_i = |K_i|$. Заметим, что каждая вершина входит ровно в C_r^s различных K_i, поэтому получаем

$$\sum_{i=1}^{m} k_i = \ell C_r^s.$$

Также для каждой пары множества S_i и элемента j (j не входит в S_i) возьмем множество вершин $M_{S_i,j}$ нашего подграфа, содержащее все элементы из S_i и элемент j одновременно:

$$M_{S_i,j} = \{v \mid v \in W_n, (S_i \cup \{j\}) \subset v\}.$$

Обозначим мощности таких подмножеств $m_{S_i,j} = |M_{S_i,j}|$.

Также для каждого множества S_i обозначим через M_i максимальное по мощности $M_{S_i,j}$, а сам элемент j будем обозначать через t_i. Если существует несколько максимальных $M_{S_i,j}$, то выбираем любое из них, поэтому t_i и M_i задаются однозначно. Положим $m_i = |M_i|$.

Назовем индекс i *хорошим*, если для него выполнено

$$m_i \leqslant \frac{2C_r^s - 2}{2C_r^s - 1} k_i,$$

а в противном случае будем называть его *плохим*. Множество хороших индексов назовем A, а плохих – B:

$$A = \left\{ i \;\middle|\; m_i \leqslant \frac{2C_r^s - 2}{2C_r^s - 1} k_i \right\}, \quad B = \left\{ i \;\middle|\; m_i > \frac{2C_r^s - 2}{2C_r^s - 1} k_i \right\}.$$

Лемма 1. *Для любого хорошего индекса i выполнено*

$$\rho(K_i) \geqslant c_1(r,s) k_i^2 - c_2(r,s) n^{r-s-2} k_i.$$

Доказательство. Разделим наше доказательство на два случая:

$$m_i \leqslant \frac{1}{r} k_i$$

и

$$\frac{1}{r}k_i < m_i \leqslant \frac{2C_r^s - 2}{2C_r^s - 1}k_i.$$

Покажем, что

$$\frac{1}{r} < \frac{2C_r^s - 2}{2C_r^s - 1}.$$

Мы рассматриваем $r \geqslant 6$, поэтому $\dfrac{1}{r} \leqslant \dfrac{1}{6}$, при этом

$$\frac{2C_r^s - 2}{2C_r^s - 1} = 1 - \frac{1}{2C_r^s - 1} \geqslant 1 - \frac{1}{2r - 1} \geqslant \frac{10}{11}.$$

Получаем, что

$$\frac{2C_r^s - 2}{2C_r^s - 1} > \frac{1}{r},$$

а значит, разделение имеет смысл.

1. Пусть для какого-то i выполнено $m_i \leqslant \dfrac{1}{r}k_i$. Степень каждой вершины $S_i \cup \cup \{a_1, a_2, \ldots, a_{r-s}\}$ внутри множества вершин K_i не меньше

$$k_i - m_{S_i,a_1} - m_{S_i,a_2} - \ldots - m_{S_i,a_{r-s}} \geqslant k_i - (r - s)m_i \geqslant \frac{s}{r}k_i.$$

Тогда получаем, что

$$\rho(K_i) \geqslant \frac{s}{2r}k_i^2.$$

2. Пусть для i выполнено

$$\frac{1}{r}k_i < m_i \leqslant \frac{2C_r^s - 2}{2C_r^s - 1}k_i.$$

Множество вершин K_i можно поделить на два подмножества: M_i и $Q_i = K_i \setminus M_i$. Также напомним, что все вершины множества M_i имеют еще какой-то общий элемент j по своему определению, а вершины множества Q_i элемент j не содержат. Возьмем любую вершину $v = S_i \cup \{a_1, a_2, \ldots, a_{r-s}\} \in Q_i$. Заметим, что любая вершина множества M_i, не смежная с v, должна содержать элементы S_i, j и еще хотя бы один элемент из множества $\{a_1, \ldots, a_{r-s}\}$. Тогда таких вершин не более

$$(r - s)C_{n-s-2}^{r-s-2} \leqslant (r - s)n^{r-s-2}.$$

Таким образом, количество вершин множества M_i, смежных с v, не меньше, чем $m_i - (r - s)n^{r-s-2}$. Получаем, что

$$\rho(K_i) \geqslant |Q_i|(m_i - (r - s)n^{r-s-2}) = (k_i - m_i)(m_i - (r - s)n^{r-s-2}) = \\ = (k_i - m_i)m_i - (r - s)n^{r-s-2}(k_i - m_i).$$

Оценим эту разность по частям: $k_i - m_i \leqslant \dfrac{r-1}{r}k_i$, поэтому

$$(r - s)n^{r-s-2}(k_i - m_i) \leqslant \frac{(r - s)(r - 1)}{r}n^{r-s-2}k_i.$$

Теперь рассмотрим $(k_i - m_i)m_i$ как функцию относительно m_i. Это парабола с ветвями вниз, а значит, ее минимум на интервале достигается на одном из концов: при $m_i = \frac{1}{r}k_i$ получаем $\frac{r-1}{r^2}k_i^2$, а при $m_i = \frac{2C_r^s - 2}{2C_r^s - 1}k_i$ получаем $\frac{2C_r^s - 2}{(2C_r^s - 1)^2}k_i^2$. Обозначим

$$c_1 = \min\left\{\frac{s}{2r}, \frac{2C_r^s - 2}{(2C_r^s - 1)^2}, \frac{r-1}{r^2}\right\}, \quad c_2 = \frac{(r-s)(r-1)}{r}.$$

Таким образом, справедливо неравенство

$$\rho(K_i) \geqslant c_1(r,s)k_i^2 - c_2(r,s)n^{r-s-2}k_i. \quad \blacktriangle$$

Лемма 2. *Справедливо неравенство*

$$\sum_{i=1}^{m} m_i \leqslant (C_r^s - 1)\ell + o(\ell).$$

Доказательство. Каждая вершина множества W_n содержит r элементов, а значит, входит в $x = C_r^s$ соответствующих K_i и не более чем в x соответствующих M_i. Оценим количество вершин, которые входят во все x множеств M_i, т.е. вместе с каждым множеством S_i содержат и элемент t_i, отвечающий ему. Пусть F – множество таких вершин.

Назовем множество A из $s+1$ элементов *самостоятельным*, если при выборе любого его s-элементного подмножества S_i будет выполнено условие $A \setminus S_i = \{t_i\}$. Заметим, что любое s-элементное множество может входить только в одно самостоятельное множество. Получаем, что два самостоятельных множества не могут пересекаться по s элементам. Назовем s-элементное множество *интересным*, если оно является подмножеством какого-то самостоятельного множества. Разобьем все вершины в F на две категории:

1) Вершины, у которых есть не интересное s-элементное подмножество;
2) Вершины, у которых все C_r^s s-элементных подмножеств являются интересными.

Докажем, что вершин первой категории не более n^{r-2}. Пусть вершина первой категории содержит не интересное множество $S_i = \{a_1, \ldots, a_s\}$. По определению F она обязательно содержит и элемент t_i. Множество элементов $a_1, \ldots, a_s, t_i$ не является самостоятельным, поэтому у него есть s-элементное подмножество S_j, такое что t_j не принадлежит ему. Снова заметим, что t_j также принадлежит выбранной вершине. Тогда вершин, содержащих $a_1, \ldots, a_s$, не больше, чем количество способов выбрать остальные $r-s-2$ вершины, т.е. C_{n-s-2}^{r-s-2}. Учитывая, что всего способов выбрать изначальное не интересное s-элементное множество не более C_n^s, то всего вершин первой категории не более

$$C_n^s C_{n-s-2}^{r-s-2} < n^{r-2} = o(\ell).$$

Теперь оценим количество вершин второй категории. Посчитаем количество вершин второй категории, которые содержат фиксированное $S_i = \{b_1, \ldots, b_s\}$. По определению F такая вершина содержит элемент t_i, причем множество $\{b_1, \ldots, b_s, t_i\}$ – самостоятельное. Пусть вершина, помимо элементов $b_1, \ldots, b_s, t_i$, содержит еще элемент q. Обратим внимание на множество $S_j = \{b_1, \ldots, b_{s-1}, q\}$. Наша вершина обязательно должна содержать элемент t_j. Опять же множество $\{b_1, \ldots, b_{s-1}, q, t_j\}$ – самостоятельное, потому что наша вершина принадлежит второй категории. Заметим, что t_j не совпадает с b_s и t_i, иначе два самостоятельных множества имели бы s общих элементов. Получаем, что рассматриваемая вершина содержит элементы $b_1, \ldots, b_s$, q, t_i, t_j. Заметим, что при условии $r > 2s+1$ и $s > 1$ выполнено $r - s - 3 > s - 2 \geqslant 0$, а значит, наша вершина содержит еще хотя бы один элемент.

Получаем, что таких вершин не больше, чем количество способов выбрать элемент q (их точно меньше n), однозначно зафиксировать t_i и t_j и далее добавить $r-s-3$ из оставшихся $n-s-3$ элементов. Иными словами, вершин второй категории, содержащих S_i, не больше, чем nC_{n-s-3}^{r-s-3}. Учитывая, что всего число способов выбрать изначальное s-элементное множество равно C_n^s, то всего вершин второй категории не более

$$C_n^s nC_{n-s-3}^{r-s-3} < n^{r-2} = o(\ell).$$

Таким образом, мы доказали, что $|F| < 2n^{r-2}$.

Обозначим через $I(v \in M_i)$ индикатор попадания вершины v в множество M_i. Тогда

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m} m_i = \sum_{i=1}^{m} \sum_{v \in W_n} I(v \in M_i) = \sum_{v \in W_n} \sum_{i=1}^{m} I(v \in M_i) = \\
&= \sum_{v \in F} \sum_{i=1}^{m} I(v \in M_i) + \sum_{v \in (W_n \setminus F)} \sum_{i=1}^{m} I(v \in M_i) \leqslant |F| C_r^s + (\ell - |F|)(C_r^s - 1) = \\
&= (C_r^s - 1)\ell + |F| \leqslant (C_r^s - 1)\ell + o(\ell),
\end{aligned}$$

что завершает доказательство леммы 2. ▲

Л е м м а 3. *Справедливо неравенство*

$$\sum_{i \in A} k_i > \frac{1}{2}\ell - o(\ell).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что

$$k_i < \frac{2C_r^s - 1}{2C_r^s - 2} m_i$$

для плохого элемента i. Тогда

$$\sum_{i \in B} k_i < \frac{2C_r^s - 1}{2C_r^s - 2} \sum_{i \in B} m_i,$$

а по лемме 2 имеем

$$\sum_{i \in B} m_i \leqslant \sum_{i=1}^{m} m_i < (C_r^s - 1)\,\ell + o(\ell).$$

Получаем

$$\sum_{i \in B} k_i < \frac{2C_r^s - 1}{2C_r^s - 2}\big((C_r^s - 1)\ell + o(\ell)\big) = \Big(C_r^s - \frac{1}{2}\Big)\ell + o(\ell).$$

Тогда для хороших элементов имеем

$$\sum_{i \in A} k_i = \sum_{i=1}^{m} k_i - \sum_{i \in B} k_i = C_r^s \ell - \sum_{i \in B} k_i > C_r^s \ell - \bigg(\Big(C_r^s - \frac{1}{2}\Big)\ell + o(\ell)\bigg) = \frac{1}{2}\ell - o(\ell),$$

что завершает доказательство леммы 3. ▲

Наконец, мы сможем оценить общее число ребер. Используя лемму 1, получаем

$$\rho(W_n) = \sum_{i=1}^{m} \rho(K_i) \geqslant \sum_{i\in A} \rho(K_i) \geqslant \sum_{i\in A} \bigl(c_1(r,s)k_i^2 - c_2(r,s)n^{r-s-2}k_i\bigr) \geqslant$$
$$\geqslant c_1(r,s)\sum_{i\in A} k_i^2 - c_2(r,s)n^{r-s-2}C_r^s\ell.$$

По неравенству о средних и лемме 3 получаем

$$\sum_{i\in A} k_i^2 \geqslant \frac{1}{|A|}\biggl(\sum_{i\in A} k_i\biggr)^2 \geqslant \frac{1}{C_n^s}\biggl(\sum_{i\in A} k_i\biggr)^2 \geqslant \frac{\left(\frac{1}{2}\ell - o(\ell)\right)^2}{n^s}.$$

Тогда

$$\rho(W_n) \geqslant c_1(r,s)\frac{\left(\frac{1}{2}\ell - o(\ell)\right)^2}{n^s} - c_2(r,s)n^{r-s-2}C_r^s\ell = \frac{c_1(r,s)}{4}\frac{\ell^2}{n^s} + o\biggl(\frac{\ell^2}{n^s}\biggr).$$

Положим $c(r,s) = \dfrac{c_1(r,s)}{4}$. Утверждение теоремы 3 доказано. ▲

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Frankl P., Wilson R.M.* Intersection Theorems with Geometric Consequences // Combinatorica. 1981. V. 1. № 4. P. 357–368. https://doi.org/10.1007/BF02579457
2. *Kahn J., Kalai G.* A Counterexample to Borsuk's Conjecture // Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.). 1993. V. 29. № 1. P. 60–62. https://doi.org/10.1090/S0273-0979-1993-00398-7
3. *Raigorodskii A.M.* Cliques and Cycles in Distance Graphs and Graphs of Diameters // Discrete Geometry and Algebraic Combinatorics (AMS Special Session on Discrete Geometry and Algebraic Combinatorics. San Diego, CA, USA. Jan. 11, 2013). Contemp. Math. V. 625. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2014. P. 93–109.
4. *Boltyanski V., Martini H., Soltan P.S.* Excursions into Combinatorial Geometry. New York: Springer, 1997.
5. *Райгородский А.М.* Вокруг гипотезы Борсука // Геометрия и механика. Современная математика. Фундаментальные направления. Т. 23. М: РУДН, 2007. С. 147–164. http://mi.mathnet.ru/cmfd96
6. *Hinrichs A., Richter C.* New Sets with Large Borsuk Numbers // Discrete Math. 2003. V. 270. № 1–3. P. 137–147. https://doi.org/10.1016/S0012-365X(02)00833-6
7. *Balogh J., Cherkashin D., Kiselev S.* Coloring General Kneser Graphs and Hypergraphs via High-Discrepancy Hypergraphs // Europ. J. Combin. 2019. V. 79. P. 228–236. https://doi.org/10.1016/j.ejc.2019.03.004
8. *Бердников А.В., Райгородский А.М.* Оценки чисел Борсука по дистанционным графам специального вида // Пробл. передачи информ. 2021. Т. 57. № 2. С. 44–50. https://doi.org/10.31857/S0555292321020030
9. *Огарок П.А., Райгородский А.М.* Об устойчивости числа независимости некоторого дистанционного графа // Пробл. передачи информ. 2020. Т. 56. № 4. С. 50–63. https://doi.org/10.31857/S0555292320040051
10. *Balogh J., Krueger R.A., Luo H.* Sharp Threshold for the Erdős–Ko–Rado Theorem // Random Structures Algorithms. 2022. Early View Research Article. https://doi.org/10.1002/rsa.21090
11. *Delsarte P.* An Algebraic Approach to the Association Schemes of Coding Theory // Philips Res. Rep. Suppl. 1973. № 10 (97 pp.).

12. *Brouwer A.E., Cioabă S.M., Ihringer F., McGinnis M.* The Smallest Eigenvalues of Hamming Graphs, Johnson Graphs and Other Distance-Regular Graphs with Classical Parameters // J. Combin. Theory Ser. B. 2018. V. 133. P. 88–121. `https://doi.org/10.1016/j.jctb.2018.04.005`
13. *Lovász L.* On the Shannon Capacity of a Graph // IEEE Trans. Inform. Theory. 1979. V. 25. № 1. P. 1–7. `https://doi.org/10.1109/TIT.1979.1055985`
14. *Frankl P., Füredi Z.* Forbidding Just One Intersection // J. Combin. Theory Ser. A. 1985. V. 39. № 2. P. 160–176. `https://doi.org/10.1016/0097-3165(85)90035-4`
15. *Шубин Я.К.* О минимальном числе ребер в индуцированных подграфах специальных дистанционных графов // Матем. заметки. 2022. Т. 111. № 6. С. 929–939. `https://doi.org/10.4213/mzm13370`
16. *Пушняков Ф.А.* О числе ребер в индуцированных подграфах специальных дистанционных графов: Дисс. … канд. физ.-мат. наук: 01.01.09. Москва: МФТИ, 2020.
17. *Михайлов К.А., Райгородский А.М.* О числах Рамсея для полных дистанционных графов с вершинами в $\{0,1\}^n$ // Матем. сб. 2009. Т. 200. № 12. С. 63–80. `https://doi.org/10.4213/sm6373`

Шубин Яков Константинович
Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова,
механико-математический факультет,
кафедра математической статистики
и случайных процессов
`shubin.yakoff@gmail.com`

Поступила в редакцию
18.10.2022
После доработки
04.11.2022
Принята к публикации
05.11.2022