УДК 517.538

ПРОСТРАНСТВЕННО-ОДНОМЕРНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ СВЯЗАННОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ. МЕТОД ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

© 2023 г. **Л. А. Алексеева[1,*], М. М. Ахметжанова[1,**]**

[1]*Институт математики и математического моделирования, Алма-Ата, Казахстан*
**e-mail: alexeeva@math.kz*
***e-mail: mariella80@mail.ru*

Поступила в редакцию 20.10.2019 г.
После доработки 25.02.2020 г.
Принята к публикации 29.11.2022 г.

Рассматриваются задачи определения термонапряженного состояния термоупругого стержня с использованием модели связанной термоупругости. В этом случае в уравнение теплопроводности входит дивергенция скорости движения материальных точек среды, а в уравнения упругости – градиент температуры. На основе метода обобщенных функций построены обобщенные решения нестационарных и стационарных прямых и полуобратных краевых задач при действии силовых и тепловых источников различного типа, в том числе описываемых сингулярными обобщенными функциями, при различных краевых условиях на концах стержня. Рассмотрены термоударные волны, которые возникают в таких конструкциях при действии ударных нагрузок и тепловых потоков, получены условия на их фронтах. Доказана единственность поставленных краевых задач, в том числе с учетом ударных волн. Даны регулярные интегральные представления обобщенных решений, которые дают аналитическое решение поставленных краевых задач.

Ключевые слова: связанная термоупругость, термоупругий стержень, краевые задачи, фундаментальное и обобщенное решение, преобразование Лапласа, стационарные колебания

DOI: 10.31857/S0032823523010022, **EDN:** HUDDFA

1. Введение. Стержневые конструкции широко используются в машиностроении в качестве соединительных и передаточных звеньев для конструктивных элементов самых разных машин и механизмов. В процессе эксплуатации они подвергаются переменным механическим и термическим воздействиям, которые создают сложное напряженно-деформированное состояние в конструктивных элементах, зависящее от их температуры, и влияющее на их прочность и надежность. Поэтому определение термонапряженного состояния стержневых конструкций с учетом их механических свойств (в частности, упругости) относится к числу актуальных научно-технических проблем.

При изучении термодинамических процессов в конструкциях обычно используются уравнения *несвязанной* термоупругости (теория температурных напряжений). В этой модели вначале решается задача определения температурного поля без учета деформации среды, что сводится к построению решения краевых задач для параболического уравнения теплопроводности. После определения температурного поля, решается краевая задача динамики термоупругой среды, в которой в гиперболические уравнения движения упругой среды вводится градиент уже известного температурного поля как массовая сила. Эта модель хорошо описывает термодинамические процессы при малых скоростях деформаций и совершенно непригодна для описания высокоскоростных динамических процессов, в частности, высокочастотных периодических колебаний, при которых деформации существенно влияют на тепловое состояние стержня.

Для определения термонапряженного состояния термоупругой среды при высокоскоростных силовых и тепловых воздействиях используется модель связанной термоупругости. В этом случае в уравнение теплопроводности входит дивергенция скорости движения материальных точек среды (скорость дилатации), а в уравнения упругости — градиент температуры. Это связывает уравнения в систему, которую надо решать совместно, не разделяя температурное поле и упругие деформации. Обе теории термоупругости наиболее полно изложены в книгах Новацкого В. В его работах [1—3], построены частные решения уравнений несвязанной и связанной термоупругости и решен ряд краевых задач в областях с канонической формой границ на основе метода разделения переменных и интегральных преобразований.

Отметим, что динамика термоупругих сред имеет довольно обширную библиографию, связанную с решением краевых задач на основе моделей связанной и несвязанной термоупругости и их модификаций. Библиографию по этому направлению можно найти в работах [4, 5].

В работах Купрадзе В.Д., Гегелиа Т.Г., Башелейшвили М.Г. [6] и других авторов [7—9] разработан метод граничных интегральных уравнений для решения плоских и трехмерных краевых задач термоупругости в областях с произвольной геометрией границ. Метод основан на теории потенциала, хорошо развитой для эллиптических уравнений, и который можно использовать в пространстве преобразований Лапласа (или Фурье) по времени, где уравнения для трансформан-решений являются эллиптическими. Для восстановления оригиналов необходимо привлечение численных методов обращения трансформант. Для численной реализации решений таких задач разработан [10, 11] метод граничного элемента.

Здесь рассмотрены пространственно-одномерные задачи связанной термоупругости, моделирующие динамику стержневых конструкций, подверженных осевым растяжениям и сжатиям. Рассмотрены нестационарные и стационарные краевые задачи, которые описываются системой дифференциальных уравнений смешанного параболо-гиперболического типа, при различных краевых условиях на концах стержня и действии силовых и тепловых источников различного типа, в том числе описываемых сингулярными обобщенными функциями. Рассмотрены термоударные волны, которые возникают в таких конструкциях при действии ударных нагрузок и тепловых потоков, получены условия на их фронтах ударных волн.

Поставлены четыре прямые краевые задачи с классическим типом краевых условий (по два из следующих: перемещений, напряжений, температуры, тепловых потоков) на концах. Доказана единственность решений поставленных краевых задач, в том числе с учетом ударных волн, что не исследовалось другими авторами.

Для решения краевых задач используется метод обобщенных функций (МОФ), основные идеи которого изложены в [8] для решения плоских задач термоупругости и для решения краевых задач для классического волнового уравнения в пространствах размерности $N = 1, 2, 3$ [12]. Для пространств размерности единица этот метод является обобщением метода Владимирова В.С. решения задачи Коши для гиперболических и параболических уравнений [13]. С использованием ранее построенной авторами матрицы Грина этих уравнений и МОФ, здесь построено вначале обобщенное, а затем аналитическое решение краевых задач.

В основе МОФ — сведение исходной краевой задачи к дифференциальным уравнениям в пространстве обобщенных функций, которые в качестве правых частей содержат сингулярные обобщенные функции — простые и двойные слои на границе области определения решения, плотности которых выражаются через граничные условия, часть которых задана, а часть подлежит определению. Использование свойств фундаментальных решений позволяет построить их обобщенные решения, интегральные представления которых дают классическое решение поставленной краевой задачи. А использование асимптотических свойств фундаментальных решений в нуле и на фронтах, позволяют строить разрешающие граничные уравнения для определения неизвестных граничных функций.

Здесь разработана единая методика решения не только прямых, но и ряда обратных и полуобратных краевых задач, которая дает возможность решать 35 краевых задач при заданных четырех из восьми граничных функций (перемещения, напряжения, температура, тепловой поток) на концах стержня.

2. Постановка нестационарных краевых задач термоупругости. Рассматривается термоупругий стержень длины $2L$, который характеризуется плотностью ρ, жесткостью EJ и термоупругими константами γ, η и κ [1, 2]. Перемещения сечений стержня и температурное поле стержня описывается системой гиперболо-параболических уравнений вида [1]:

$$\begin{gathered} \rho c^2 u_{,xx} - \rho u_{,tt} - \gamma\theta_{,x} + \rho F_1 = 0 \\ \theta_{,xx} - \kappa^{-1}\theta_{,t} - \eta u_{,xt} + F_2 = 0 \end{gathered} \tag{2.1}$$

Здесь $u(x,t)$ — компоненты продольных смещений, $\theta(x,t)$ — относительная температура $(\theta = T(x,t) - T_0)$, $T(x,t)$ — абсолютная температура, T_0 — абсолютная температура, при которой в стержне нет напряжений и деформаций; $F_1(x,t)$ — продольная компонента объемной силы; $c = \sqrt{EJ/\rho}$ — скорость распространения термоупругих волн в стержне, ρ — погонная плотность. Действие тепловых источников описывает $F_2(x,t) = (\lambda_0\kappa)^{-1}W(x,t)$, где W — количество выделенного (или поглощенного) тепла на единицу объема за единицу времени, λ_0 — коэффициент теплопроводности.

Предполагается, что функции $F_1(x,t)$, $F_2(x,t)$ принадлежат классу обобщенных функций медленного роста $S'(R^2)$ [5], что позволяет моделировать термодинамические процессы в стержнях при действии сосредоточенных как силовых, так и тепловых источников различного типа. Здесь и далее используем обозначения частных производных от функций и компонент: $f_{,j}$, $u_{i,j} = \partial u_i/\partial j = \partial_j u_i$; $j = x, t$.

Термоупругое напряжение в стержне определяется соотношением Дюамеля—Неймана:

$$\sigma = \rho c^2 u_{,x} - \gamma\theta \tag{2.2}$$

Рассмотрим ряд прямых краевых задач термоупругости, решения которых удовлетворяют следующим начальным и краевым условиям [2].

Начальные условия (условия Коши): при $t = 0$ смещения, скорости и температура известны:

$$\begin{gathered} u(x,0) = u_0(x), \quad \theta(x,0) = \theta_0(x); \quad |x| \le L \\ \partial_t u(x,0) = \dot{u}_0(x); \quad |x| < L \end{gathered} \tag{2.3}$$

На концах стержня $(x = x_1 = -L, x = x_2 = L)$ заданы *краевые условия*, которые различны в зависимости от рассматриваемых краевых задач. Здесь приведем классические условия для четырех краевых задач:

1 краевая задача. Известны перемещения концов стержня и температура на них:

$$u(x_j,t) = w_j(t), \quad \theta(x_j,t) = \theta_j(t); \quad j = 1,2 \tag{2.4}$$

2 краевая задача. Известны напряжения на концах стержня и тепловые потоки на них:

$$\sigma(x_j,t) = p_j(t), \quad \theta_{,x}(x_j,t) = q_j(t); \quad j = 1,2 \tag{2.5}$$

3 краевая задача. Известны перемещения концов стержня и тепловые потоки на них:

$$u(x_j,t) = w_j(t), \quad \theta_{,x}(x_j,t) = q_j(t); \quad j = 1,2 \tag{2.6}$$

4 краевая задача. Известны напряжения и температура на концах стержня:

$$\sigma(x_j,t) = p_j(t), \quad \theta(x_j,t) = \theta_j(t); \quad j = 1,2 \tag{2.7}$$

Предполагается, что граничные функции удовлетворяют следующим условиям гладкости:

$$u_j(t) \in C(0,\infty), \quad \theta_j(t) \in C(0,\infty), \quad q_j(t) \in L_1(0,\infty), \quad p_j(t) \in L_1(0,\infty) \tag{2.8}$$

Очевидно, можно рассматривать комбинированные задачи с одним типом краевых условий на одном конце стержня и другим на втором конце и другие несимметричные условия по количеству заданных функций на концах стержня. Здесь мы предложим решение и такого типа полуобратных и обратных задач.

3. Ударные термоупругие волны как обобщенные решения уравнений движения. Система уравнений (2.1) смешанного гиперболо-параболического типа. В силу гиперболичности, возможно возникновение ударных термоупругих волн при ударных воздействиях на концах стержня. Для вывода условий на фронтах ударных волн рассмотрим эти уравнения в классе обобщенных вектор-функций, компоненты которых являются обобщенными функциями из $S'(R^2)$ [13].

Согласно правилам дифференцирования разрывных регулярных обобщенных функций для термоупругих ударных волн, уравнения движения примут вид:

$$\begin{gathered} \rho c^2 u_{,xx} - \rho u_{,tt} - \gamma\theta_{,x} + F_1 + \left(\left[\rho c^2 u_{,x} - \gamma\theta\right]_F \nu_x - \rho\left[u_{,t}\right]_F \nu_t\right)\delta_F(x,t) + \\ + \rho c^2 \partial_x [u]_F \delta_F - \rho\partial_t [u]_F \delta_F = 0 \\ \theta_{,xx} - \kappa^{-1}\theta_{,t} - \eta u_{,xt} + F_2 + \partial_x [\theta]_F \nu_x \delta_F + \\ + [\theta_{,x}]_F \nu_x \delta_F - \left[\kappa^{-1}\theta + \eta u_{,x}\right]_F \nu_t \delta_F - \eta\partial_t [u]_F \nu_x \delta_F = 0 \end{gathered} \tag{3.1}$$

Здесь квадратные скобки обозначают скачок указанных в них функций на фронте ударной волны (для простоты записи здесь уравнения записаны для одной ударной волны).

Сингулярная обобщенная функция $\delta_F(x,t)$ – простой слой на характеристической поверхности F в $D^- = \left\{(x,\tau) \in R^2 : |x| < L, \tau < t\right\}$, на которой производные имеют скачки. В пространстве R^1 ей соответствует фронт ударной волны F_t, который движется в стержне со скоростью c. Таких фронтов может быть несколько, что связано с действующими нагрузками и переотражением ударных волн. Тогда в этих уравнениях появятся дополнительные сингулярные слагаемые такого же типа, связанные с каждой ударной волной.

Из (2.1) следует, что на F обращается в ноль следующий определитель:

$$\begin{vmatrix} \rho\left(c^2\nu_x^2 - \nu_t^2\right) & 0 \\ \nu_x^2 & -\eta\nu_t\nu_x \end{vmatrix} = -\eta\rho\nu_t\nu_x\left(c^2\nu_x^2 - \nu_t^2\right) = 0, \tag{3.2}$$

где $\nu = (\nu_x, \nu_t)$ – нормаль к F в D^-. Из (3.2) следует, что прямые $x = \text{const}$ и $t = \text{const}$ являются характеристическими поверхностями для уравнений (2.1), а для ударных волн:

$$\nu_t = -c|\nu_x| \tag{3.3}$$

Здесь, в пространственно-одномерном случае, фронт волны имеет простой вид:

$$D_t = \left\{(x,t) : x \pm ct = x^0\right\}$$

Это точка разрыва производных на интервале $x \in (-L, L)$, которая движется со скоростью c от точки x^0, где она формируется, в ту или другую сторону.

Поскольку, в силу сплошности среды, перемещения не могут быть разрывными:

$$[u]_{F_t} = 0$$

В области дифференцируемости ударные волны являются решениями (2.1), поэтому из (3.1), с учетом (2.2), следует, чтобы ударная волна была решением уравнений (2.1) в $S'(R^2)$, необходимо, чтобы

$$\begin{gathered}\left(\left[\rho c^2 u_{,x} - \gamma\theta\right]\nu_x - \rho[u_{,t}]\nu_t\right)\delta_F = 0\\ \partial_x[\theta]\nu_x\delta_F + \left([\theta_{,x}]\nu_x - \left[\kappa^{-1}\theta + \eta u_{,x}\right]\right)\nu_t\delta_F = 0\end{gathered} \tag{3.4}$$

Отсюда, с учетом (3.3), следует, что на фронтах ударных волн должны выполняться следующие условия на скачки:

$$[u]_{F_t} = 0, \quad [\sigma]_{F_t} = -\rho c[\dot{u}]_{F_t} \tag{3.5}$$

$$[\theta]_{F_t} = 0, \quad [\theta_{,x}]_{F_t} = \eta[\dot{u}]_{F_t} \tag{3.6}$$

Первое условие непрерывности перемещений – необходимое условие для сохранения сплошности среды. Второе условие описывает скачок напряжений (удар), который приводит к скачку скоростей на фронте волны. Из третьего и четвертого условия следует, что температура непрерывна на фронте волны, а тепловой поток имеет скачок, пропорциональный скачку скорости смещений среды на фронте волн.

Из этих же соотношений следует, что скачок теплового потока в стержне также формирует термоударную волну, т.к. он вызывает скачок скоростей на фронте, который приводит к скачку напряжений на нем. Такие термоударные волны всегда формируются на концах стержня, если до фиксированного момента времени он находился в статическом состоянии, а затем к нему на концах приложить ненулевые напряжения или тепловые потоки.

4. Единственность решения начально-краевой задачи с учетом ударных волн. Покажем единственность решения начально-краевой задачи при наличии ударных волн. Предполагается, что в каждый фиксированный момент времени область определения по x можно разделить на конечное число интервалов между фронтами ударных волн F_t^k, на которых решение непрерывно и дифференцируемо согласно (2.1).

Обозначим плотность энергии стержня

$$E(x,t) = \frac{1}{2}\left\{\rho(u_{,t})^2 + c^2(u_{,x})^2 + \gamma(\eta\kappa)^{-1}\theta^2\right\},$$

и мощность внутренних сил:

$$M(x,t) = u_{,t}\left(c^2 u_{,x} - \gamma\theta\right) + \eta\gamma^{-1}\theta\theta_{,x}$$

Докажем следующую теорему.

Теорема 1 **(**закон сохранения энергии**)**

$$\int_{-L}^{L}\left(E(x,t)-E(x,0)\right)dx=\int_0^t dt\int_{-L}^{L}\left(u_{,t}F_1+\eta\gamma^{-1}\theta F_2\right)dx+$$
$$+\int_0^t\left(M(L,t)-M(-L,t)\right)dt-\eta\gamma^{-1}\int_0^t dt\int_{-L}^{L}(\theta_{,x})^2dx$$

Доказательство. Фиксируем произвольное время $t>0$. Умножая первое уравнение (2.1) в области дифференцируемости на $u_{,t}$, а второе уравнение на $\alpha\theta$, после ряда эквивалентных преобразований, получим равенства:

$$\rho c^2u_{,t}u_{,xx}-u_{,t}u_{,tt}-\gamma u_{,t}\theta_{,x}+\rho F_1u_{,t}=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\partial_x\left(u_{,t}\left(\rho c^2u_{,x}-\gamma\theta\right)\right)-0.5\partial_t\left\{(u_{,t})^2+\rho c^2(u_{,x})^2\right\}+\gamma u_{,tx}\theta+u_{,t}\rho F_1=0$$
$$\theta\theta_{,xx}-\kappa^{-1}\theta\theta_{,t}-\eta\theta u_{,xt}+\theta F_2=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow-\frac{1}{2}\kappa^{-1}\partial_t\theta^2+\partial_x(\theta\theta_{,x})-\eta\theta u_{,xt}-(\theta_{,x})^2+\theta F_2=0$$

Складывая их, имеем

$$\partial_x\left(u_{,t}\left(\rho c^2u_{,x}-\gamma\theta\right)+\alpha\theta\theta_{,x}\right)-0.5\partial_t\left\{\rho(u_{,t})^2+c^2(u_{,x})^2+\alpha\kappa^{-1}\theta^2\right\}-\alpha(\theta_{,x})^2+$$
$$+\theta u_{,xt}(\gamma-\alpha\eta)+u_{,t}\rho F_1+\alpha\theta F_2=0$$

В результате получим:

$$\partial_tE(x,t)-\partial_xM(x,t)+\eta\gamma^{-1}(\theta_{,x})^2=u_{,t}F_1+\eta\gamma^{-1}\theta F_2\tag{4.1}$$

Проинтегрируем (4.1) по D^- с учетом деления области интегрирования фронтами ударных волн $F_k(x,t)$, на подобласти, где решение дифференцируемо. В результате, используя теорему Остроградского–Гаусса, получим следующее интегральное равенство:

$$\int_{-L}^{L}\left(E(x,t)-E(x,0)\right)dx+\alpha\int_0^t dt\int_{-L}^{L}(\theta_{,x})^2dx=$$
$$=\int_0^t\left(M(L,t)-M(-L,t)\right)dt+\int_0^t dt\int_{-L}^{L}\left(u_{,t}\rho F_1+\alpha\theta F_2\right)dx+$$
$$+\left\{\int_{F_k}\sum_k\left[\nu_xM(x,t)-\nu_tE(x,t)\right]_{F_k}dS(F_k)\right\}\tag{4.2}$$

Здесь ν – нормаль к характеристической поверхности в R^2: $\|\nu\|=1$. Из (3.3) следует: $\nu=(\nu_x,\nu_t)=(1,-c)\sqrt{1+c^2}$.

Покажем, что в силу условий на фронтах ударных волн (3.5)–(3.6), скачки в правой части этого равенства равны нулю. Для этого сделаем ряд преобразований:

$$[M(x,t)]_{F_k}=[u_{,t}\sigma]_{F_k}+\alpha[\theta\theta_{,x}]_{F_k}=u^-_{,t}[\sigma]_{F_k}+\sigma^+[u_{,t}]_{F_k}+\alpha\theta[\theta_{,x}]_{F_k}=$$
$$=\left(\sigma^+-\rho cu^-_{,t}+\gamma\theta\right)[u_{,t}]_{F_k}=\rho c\left(cu^+_{,x}-u^-_{,t}\right)[u_{,t}]_{F_k}$$

(здесь знаки в верхнем индексе означают значения соответствующих функций с правой или левой стороны фронта волны). Следовательно,

$$\sqrt{1+c^2}\left[\nu_x M(x,t) - \nu_t E(x,t)\right]_{F_k} = \left[M(x,t) + cE(x,t)\right]_{F_k} =$$
$$= \rho c\left(cu_{,x}^{+} - u_{,t}^{-}\right)\left[u_{,t}\right]_{F_k} - \rho c\left[u_{,t}\right]_{F_k}\left(cu_{,x}^{-} - u_{,t}^{+}\right) = \rho c\left[cu_{,x} + u_{,t}\right]\left[u_{,t}\right]_{F_k} = 0$$

т.к. $\left[cu_{,x} + u_{,t}\right] = 0$ в силу второго равенства (3.6). Следовательно, из (4.2) получим формулу теоремы. Теорема доказана.

Теорема 2. Решение поставленных начально-краевых задач единственно.

Доказательство. Пусть существуют два решения рассматриваемой краевой задачи из поставленных. Тогда их разность, в силу линейности, тоже будет решением (2.1) при $F_j = 0$, $j = 1,2$, и будет удовлетворять нулевым начальным и граничным условиям. Запишем для такого решения закон сохранения энергии. Согласно теореме 1:

$$\int_{-L}^{L} E(x,t)dx + \eta\gamma^{-1}\sqrt{1+c^{-2}}\int_0^t dt\int_{-L}^{L}(\theta_{,x})^2 dx = \int_0^t \left(M(L,t) - M(-L,t)\right)dt$$

$$\int_0^t M(\pm L,t)dt = \int_0^t \left(u_{,t}(\pm L,t)\sigma(\pm L,t) + \eta\gamma^{-1}\theta(\pm L,t)\theta_{,x}(\pm L,t)\right)dt = 0$$

т.к. один из сомножителей в каждом подынтегральном слагаемом, в силу нулевых граничных условий (2.4), равен нулю. Поэтому

$$\int_{-L}^{L} E(x,t)dx + \eta\gamma^{-1}\int_0^t dt\int_{-L}^{L}(\theta_{,x})^2 dx = 0$$

В силу нулевых начальных условий и положительной определенности подынтегральных функций, получим $u \equiv 0$, $\theta \equiv 0$. Т.е. решения совпадают. Теорема доказана.

5. Решение начально-краевой задачи. Метод обобщенных функций. Для определения решения задачи поставим краевую задачу в пространстве двухмерных обобщенных вектор-функций, компоненты которых являются обобщенными функциями медленного роста:

$$S_2'(R^2) = \left\{\hat{f} = \left(\hat{f}_1(x,t), \hat{f}_2(x,t)\right); \quad (x,t)\in R^2, \quad \hat{f}_j \in S'(R^2)\right\}$$

Для этого введем обобщенную вектор-функцию (помечаем их крышкой):

$$(\hat{u}_1, \hat{u}_2) = \left\{\hat{u}, \hat{\theta}\right\} = \left\{u(x,t)H(x)H(t), \theta(x,t)H(x)H(t)\right\},$$

где u, θ – решение рассматриваемой краевой задачи, $H(x)$ – функция Хевисайда,

Обозначим $\hat{U}_i^j(x,t)$ $(j = 1,2)$ – матрицу фундаментальных решений. Это решение (2.1) при действии импульсных сосредоточенных источников вида:

$$(F_1, F_2) = \left\{\delta_1^j\delta(x)\delta(t), \delta_1^j\delta(x)\delta(t)\right\}; \quad j = 1,2$$

Здесь $\delta(t)$ – дельта-функция Дирака, δ_i^j – символ Кронекера.

В $S_2'(R^2)$ решение с учетом правил дифференцирования разрывных функций [13] удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$c_1^2\hat{u}_{,xx} - \hat{u}_{tt} - \breve{\gamma}\hat{\theta}_{,x} + \hat{F}_1 = -\left\{\dot{u}_0(x)\delta(t) + u_0(x)\delta'(t)\right\}H(L-|x|) +$$
$$+ c_1^2 H(t)\left\{\left(p_1(t) - \gamma\theta_1(t)\right)\delta(x+L) - \left(p_2(t) - \gamma\theta_2(t)\right)\delta(x-L)\right\} +$$
$$+ c_1^2 H(t)\left\{u_1(t)\delta'(x+L) - u_2(t)\delta'(x-L)\right\}$$

$$\hat{\theta}_{,xx} - \kappa^{-1}\hat{\theta}_{,t} - \eta\hat{u}_{,xt} + \hat{F}_2 =$$
$$= H(t)\,\delta(L+x)\left(q_1(t) - \eta\dot{u}_1(t)\right) - H(t)\,\delta(L-x)\left(q_2(t) - \eta\dot{u}_2(t)\right) +$$
$$+ \left(\hat{\theta}_1(t)H(t)\,\delta'(L+x)\right) - \left(\hat{\theta}_2(t)H(t)\,\delta'(L-x)\right) - \kappa^{-1}\hat{\theta}_0(x)\delta(t)\,H(L-|x|) -$$
$$- \eta\delta(t)\,H(L-|x|)\,\partial_x\dot{u}_0(x) - \eta u_1(0)\delta(t)\,\delta(L+x) + \eta u_2(0)\delta(t)\,\delta(L-x) \qquad (5.1)$$

Решение этого уравнения в $S_2'(R^2)$ называется *обобщенным решением*.

Используя свойство матрицы фундаментальных решений $\hat{U}_j^k(x,t)$ системы (2.1), обобщенное решение (5.1) можно представить в виде следующей тензорно-функциональной свертки:

$$u(x,t)\,H(t)\,H(L-|x|) = \hat{F}_1^*\hat{U}_1^1 + \hat{F}_2^*\hat{U}_1^2 +$$
$$+ c^2\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k+1}\left\{\left(p_k(t) - \gamma\theta_k(t)\right)_t^* U_1^1(x+L,t) + u_k(t)_t^* U_{1,x}^1(x+L,t)\right\} +$$
$$+ H(t)\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k+1}\left(q_k(t) - \eta\dot{u}_k(t)\right)_t^* \hat{U}_1^2\left(x - (-1)^k L\right) +$$
$$+ \theta_k(t)H(t)_t^* U_{1,x}^2(x+L) - \left\{\dot{u}_0(x)_x^*\hat{U}_1^1 + u_0(x))_x^*\hat{U}_{1,t}^1\right\}H(L-|x|) -$$
$$- \eta u_1(0)U_1^2(L+x,t) + \eta u_2(0)U_1^2(x-L,t) -$$
$$- \kappa^{-1}\theta_0(x)H(L-|x|)_x^* U_1^2 - \eta H(L-|x|)\,\partial_x\dot{u}_0(x)_x^* U_1^2 \qquad (5.2)$$

$$\theta(x,t)\,H(t)\,H(L-|x|) = \hat{F}_1^*\hat{U}_2^1 + \hat{F}_2^*\hat{U}_2^2 +$$
$$+ c^2 H(L-|x|)\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k+1}H(t)\left(p_k(t) - \tilde{\gamma}\theta_k(t)\right)_t^* U_2^1\left(x - (-1)^k L, t\right) +$$
$$+ c^2 H(L-|x|)\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k+1}H(t)u_k(t)_t^* U_{2,x}^1\left(x - (-1)^k L, t\right) +$$
$$+ H(L-|x|)\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k+1}H(t)\left(q_k(t) - \eta\dot{u}_k(t)\right)_t^* U_2^2\left(x - (-1)^k L, t\right) +$$
$$+ H(L-|x|)\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k+1}H(t)\theta_k(t)H(t)_t^* U_{2,x}^2\left(x - (-1)^k L, t\right) -$$
$$- \left\{\dot{u}_0(x)\,H(L-|x|)_x^* U_2^1(x,t) + u_0(x)\,H(L-|x|)_x^*\hat{U}_{2,t}^1(x,t)\right\} -$$
$$- \eta u_1(0)\,U_2^2(L+x,t) + \eta u_2(0)\,U_2^2(x-L,t) -$$
$$- \kappa^{-1}\theta_0(x)\,H(L-|x|)_x^* U_2^2(x,t) - \eta H(L-|x|)\,\dot{u}_0(x)_x^* U_{2,x}^2(x,t) \qquad (5.3)$$

Интегральная запись этих сверток имеет вид:

$$u(x,t)\,H(|x|-L)H(t) = \hat{F}_1^*\hat{U}_1^1 + \hat{F}_2^*\hat{U}_1^2 +$$
$$+ c^2 H(t)H(L-|x|)\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k+1}\int_0^t\left\{\left(p_k(\tau) - \tilde{\gamma}\theta_k(\tau)\right)U_1^1(x-(-1)^k L, t-\tau) +\right.$$
$$\left.+ u_k(\tau)U_{1,x}^1\left(x - (-1)^k L, t-\tau\right)\right\}d\tau +$$

$$+ H(t)\,H(L-|x|)\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k+1}\int_0^t\Big\{\big(q_k(\tau)-\eta\dot u_k(\tau)\big)\,U_1^2\left(x-(-1)^k L, t-\tau,\right)+$$

$$+\,\theta_k(\tau)U_{1},_x^2\left(x-(-1)^k L, t-\tau\right)\Big\}\,d\tau-$$

$$-\int_{-L}^{L}\Big\{\dot u_0(y)U_1^1(x-y,t)+u_0(y))U_{1},_t^1(x-y,t)\Big\}dy-$$

$$-\,\eta u_1(0)U_1^2\left(L+x,t\right)+\eta u_2(0)U_1^2\left(x-L,t\right)-$$

$$-\int_{-L}^{L}\Big\{\kappa^{-1}U_1^2(x-y,t)\theta_0(y)-\eta\,U_{1,y}^2(x-y,t)\partial_y\dot u_0(y)\Big\}dy$$

$$\theta(x,t)\,H(t)\,H\left(L-|x|\right)=\hat F_1^*\hat U_2^1+\hat F_2^*\hat U_2^2+$$

$$+\,c^2H\left(L-|x|\right)\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k+1}\int_0^t\Big\{\big(p_k(\tau)-\tilde\gamma\theta_k(\tau)\big)\,U_2^1\left(x-(-1)^k\,L, t-\tau\right)+$$

$$+\,u_k(t)U_{2},_x^1\left(x-(-1)^k\,L, t-\tau\right)\Big\}\,d\tau+$$

$$+\;H(t)\,H\left(L-|x|\right)\int_0^t\left\{\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k+1}\left(q_k(\tau)-\eta\dot u_k(\tau)\right)U_2^2\left(x-(-1)^k L, t-\tau\right)+\right.$$

$$\left.+\,\theta_k(\tau)U_{2},_x^2\left(x-(-1)^k\,L, t-\tau\right)\right\}d\tau-$$

$$-\int_{-L}^{L}\Big\{\dot u_0(y)U_2^1(x-y,t)+u_0(y))U_{2},_t^1\left(x-y,t\right)+$$

$$+\,\eta u_1(0)U_2^2\left(L+x-y,t\right)+\eta u_2(0)U_2^2\left(x-y-L,t\right)\Big\}\,dy-$$

$$-\int_{-L}^{L}\Big\{\kappa^{-1}\theta_0(y)U_2^2(x-y,t)-\eta\,U_{2,y}^2(x-y,t)\dot u_0(y)\Big\}dy$$

Для регулярных $\hat F_j$ свертка имеет вид:

$$\hat F_j^*\hat U_i^j\;=\;H(t)H\left(|x|-L\right)\int_0^t\int_{-L}^{L}F_j(y,\tau)U_i^j(x-y,t-\tau)dyd\tau$$

Для сингулярных $\hat F_j$, характерных для физических приложений, следует использовать определение свертки обобщенных функций [13].

Если до начального момента времени стержень покоился, и температура была постоянна, тогда начальные условия нулевые и формулы упрощаются.

$$u(x,t)\,H\left(|x|-L\right)H(t)=\hat F_1^*\hat U_1^1+\hat F_2^*\hat U_1^2+$$

$$+\,c^2H(t)H\left(L-|x|\right)\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k+1}\int_0^t\Big\{\big(p_k(\tau)-\tilde\gamma\theta_k(\tau)\big)\,U_1^1(x-(-1)^k L, t-\tau)+$$

$$+\,u_k(\tau)U_{1},_x^1\left(x-(-1)^k L, t-\tau\right)\Big\}\,d\tau+$$

$$+\ H(t)\,H(L-|x|)\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k+1}\int_0^t\Big\{\big(q_k(\tau)-\eta\dot{u}_k(\tau)\big)U_1^2\left(x-(-1)^kL,t-\tau,\right)+$$

$$+\ \theta_k(\tau)U_{1}^2{,}_x\left(x-(-1)^kL,t-\tau\right)\Big\}\,d\tau \tag{5.4}$$

$$\theta(x,t)\,H(t)\,H(L-|x|)=\hat{F}_1^*\hat{U}_2^1+\hat{F}_2^*\hat{U}_2^2+$$

$$+\ c^2H(L-|x|)\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k+1}\int_0^t\Big\{\big(p_k(\tau)-\tilde{\gamma}\theta_k(\tau)\big)U_2^1\left(x-(-1)^k\,L,t-\tau\right)+$$

$$+\ u_k(t)U_{2}^1{,}_x\left(x-(-1)^k\,L,t-\tau\right)\Big\}\,d\tau+$$

$$+\ H(t)\,H(L-|x|)\int_0^t\left\{\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k+1}\big(q_k(\tau)-\eta\dot{u}_k(\tau)\big)U_2^2\left(x-(-1)^kL,t-\tau\right)+\right.$$

$$\left.+\ \theta_k(\tau)U_{2}^2{,}_x\left(x-(-1)^k\,L,t-\tau\right)\right\}d\tau \tag{5.5}$$

Формулы (5.4) и (5.5) определяют перемещение и температуру внутри стержня по известным перемещениям, напряжениям, температуре и тепловым потокам на его концах.

Для вычисления требуется матрица фундаментальных решений.

6. Матрица фундаментальных решений и ее преобразования Фурье и Лапласа по времени. Аналитически матрицу фундаментальных решений $U_k^j(x,t)$ в исходном пространстве-времени удается построить только для уравнений несвязанной термоупругости (см. [14]), что в нашем случае соответствует $\eta=0$.

Для уравнений связанной термоупругости такую матрицу можно построить только в пространстве преобразований Фурье или преобразований Фурье–Лапласа. Так для решения задач стационарных колебаний с фиксированной частотой ω нами в работе [15] построено преобразование Фурье по времени этой матрицы, которое имеет следующий вид:

$$\tilde{U}_1^j(x,\omega)=\frac{\delta_1^j\,\mathrm{sgn}(x)}{2(\lambda_1-\lambda_2)}\left\{i\omega\kappa^{-1}\left(\frac{\sin x\sqrt{\lambda_2}}{\sqrt{\lambda_2}}-\frac{\sin x\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{\lambda_1}}\right)+\left(\sqrt{\lambda_1}\sin x\sqrt{\lambda_1}-\sqrt{\lambda_2}\sin x\sqrt{\lambda_2}\right)\right\}-$$

$$-\frac{\gamma\delta_2^j\,\mathrm{sgn}(x)}{2(\lambda_1-\lambda_2)}\left(\cos x\sqrt{\lambda_1}-\cos x\sqrt{\lambda_2}\right);\quad j=1,2$$

$$\tilde{U}_2^j(x,\omega)=\frac{\mathrm{sgn}(x)}{2(\lambda_1-\lambda_2)}\left\{i\omega\eta\delta_1^j\left(\cos x\sqrt{\lambda_1}-\cos x\sqrt{\lambda_2}\right)-\omega^2\left(\frac{\sin x\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{\lambda_1}}-\frac{\sin x\sqrt{\lambda_2}}{\sqrt{\lambda_2}}\right)\delta_2^j+\right. \tag{6.1}$$

$$\left.+\ c^2\left(\sqrt{\lambda_1}\sin x\sqrt{\lambda_1}-\sqrt{\lambda_2}\sin x\sqrt{\lambda_2}\right)\delta_2^j\right\};\quad j=1,2$$

Здесь $\lambda_{1,2}(\omega)$ – корни характеристического уравнения системы (2.1),

$$\Delta(\xi,\omega)=0 \tag{6.2}$$

биквадратного относительно ξ имеют вид:

$$\Delta(\xi,\omega)=\left(\xi^2-ik^{-1}\omega\right)\left(c^2\xi^2-\omega^2\right)-i\tilde{\gamma}\eta\xi^2\omega=c^2\left(\xi^2-\lambda_1\right)\left(\xi^2-\lambda_2\right)$$

Они зависят только от трех *термодинамических параметров* среды: c, α, β:

$$\lambda_{1,2}(\omega) = \frac{\omega}{2c^2}\left\{\omega + i(\alpha+\beta) \pm \sqrt{(\omega + i(\alpha-\beta))^2 - 4\alpha\beta}\right\}$$

$$\Delta(\xi,\omega) = \left(\xi^2 - ik^{-1}\omega\right)\left(c^2\xi^2 - \omega^2\right) - i\gamma\eta\xi^2\omega = c^2\left(\xi^2 - \lambda_1\right)\left(\xi^2 - \lambda_2\right) \tag{6.3}$$

$$\lambda_{1,2}(\omega) = \frac{\omega}{2c^2}\left\{\omega + i(\alpha+\beta) \pm \sqrt{(\omega + i(\alpha-\beta))^2 - 4\alpha\beta}\right\},$$

где $\alpha = \tilde{\gamma}\eta$, $\beta = c^2k^{-1}$. Их асимптотика по частоте ω следующая:

$$\text{а) при } \omega \to \infty: \lambda_1 \sim \frac{\omega^2}{c^2}, \quad \lambda_2 \sim \frac{i\omega\beta}{c^2} \tag{6.4}$$

$$\text{б) при } \omega \to 0: \lambda_1 \sim \frac{3i\omega(\alpha+\beta)}{2c^2}, \quad \lambda_2 \sim \frac{i\omega(\alpha+\beta)}{2c^2} \tag{6.5}$$

Заметим, что риманова поверхность матрицы по ω однолистная, т.к. значения компонент $\tilde{U}_k^j$ не зависят от выбора знака радикалов $\sqrt{\lambda_j(\omega)}$.

Компоненты $\tilde{U}_k^j$ являются регулярными обобщенными функциями и непрерывны в точке $x = 0$:

$$\tilde{U}_k^j(\pm 0,\omega) = \tilde{U}_k^j(0,\omega) = 0; \quad k, j = 1,2, \tag{6.6}$$

а ее производные

$$\partial_x \tilde{U}_1^j(x,\omega) = \left[\frac{\left(\lambda_1 - i\omega\kappa^{-1}\right)}{(\lambda_1 - \lambda_2)}\left(\cos x\sqrt{\lambda_1} - \cos x\sqrt{\lambda_2}\right) + \cos x\sqrt{\lambda_2}\right]\frac{\operatorname{sgn}(x)}{2}\delta_1^j -$$

$$+ \frac{\gamma}{2(\lambda_1 - \lambda_2)}\left(\sqrt{\lambda_1}\sin|x|\sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2}\sin|x|\sqrt{\lambda_2}\right)\delta_2^j$$

$$\partial_x \tilde{U}_2^j(x,\omega) = -\delta_1^j\,\frac{i\omega\eta\left(\sqrt{\lambda_1}\sin|x|\sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2}\sin|x|\sqrt{\lambda_2}\right)}{2(\lambda_1 - \lambda_2)} + \tag{6.7}$$

$$- \delta_2^j\operatorname{sgn}(x)\left\{\frac{\omega^2 - \lambda_1 c^2}{2(\lambda_1 - \lambda_2)}\left(\cos x\sqrt{\lambda_1} - \cos x\sqrt{\lambda_2}\right) - c^2\cos x\sqrt{\lambda_2}\right\}$$

$$\tilde{U}_1^j{}_{,x}(\pm 0,\omega) = \pm\frac{1}{2}\delta_1^j, \quad \tilde{U}_2^j{}_{,x}(\pm 0,\omega) = \pm\frac{c^2}{2}\delta_2^j$$

в этой точке терпят разрыв первого рода (верхнему знаку соответствует левый предел в нуле, нижнему — правый).

Для решения нестационарных краевых задач следует использовать преобразование Лапласа фундаментальной матрицы $\overline{U}_1^j(x,p)$, которое получим, используя связь между преобразованием Фурье и преобразованием Лапласа по времени ($p \leftrightarrow -i\omega$, $\omega \leftrightarrow ip$) [13]:

$$\tilde{U}_1^j(x,p) = \frac{\delta_1^j\operatorname{sgn}(x)}{2(\lambda_1 - \lambda_2)}\left\{-p\kappa^{-1}\left(\frac{\sin x\sqrt{\lambda_2}}{\sqrt{\lambda_2}} - \frac{\sin x\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{\lambda_1}}\right) + \left(\sqrt{\lambda_1}\sin x\sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2}\sin x\sqrt{\lambda_2}\right)\right\} -$$

$$-\frac{\gamma\delta_2^j\,\mathrm{sgn}(x)}{2(\lambda_1-\lambda_2)}\left(\cos x\sqrt{\lambda_1}-\cos x\sqrt{\lambda_2}\right);\quad j=1,2$$

$$\tilde{U}_2^j(x,p)=-\frac{\mathrm{sgn}(x)}{2(\lambda_1-\lambda_2)}\left\{p\eta\delta_1^j\left(\cos x\sqrt{\lambda_1}-\cos x\sqrt{\lambda_2}\right)-p^2\left(\frac{\sin x\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{\lambda_1}}-\frac{\sin x\sqrt{\lambda_2}}{\sqrt{\lambda_2}}\right)\delta_2^j+\right.$$
$$\left.+c^2\left(\sqrt{\lambda_1}\sin x\sqrt{\lambda_1}-\sqrt{\lambda_2}\sin x\sqrt{\lambda_2}\right)\delta_2^j\right\};\quad j=1,2, \tag{6.8}$$

где $\lambda_{1,2}(p)=-\frac{p}{2c^2}\left\{p+\alpha+\beta\pm\sqrt{(p+(\alpha-\beta))^2+4\alpha\beta}\right\}$.

7. Преобразование Лапласа по времени решения начально-краевых задач. Здесь рассмотрим начально краевую задачу с нулевыми начальными условиями, решение которой имеет вид (5.4)–(5.5). Его трансформанта Лапласа по времени имеет вид:

$$\bar{u}(x,p)\,H(|x|-L)=\bar{F}_1(x,p)*\bar{U}_1^1(x,p)+\bar{F}_2(x,p)*\bar{U}_1^2(x,p)+$$
$$+c^2\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k+1}\left\{\left(\bar{p}_k-\breve{\gamma}\bar{\theta}_k\right)\bar{U}_1^1\left(x-(-1)^kL,p\right)+\bar{u}_k(\tau)\bar{U}_{1,x}^1\left(x-(-1)^kL,p\right)\right\}+$$
$$+\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k+1}\left\{\left(\bar{q}_k-\eta p\bar{u}_k\right)\bar{U}_1^2\left(x-(-1)^kL,p\right)+\bar{\theta}_k\bar{U}_{1,x}^2\left(x-(-1)^kL,p\right)\right\} \tag{7.1}$$

$$\bar{\theta}(x,p)\,H(L-|x|)=\bar{F}_1(x,p)*\bar{U}_2^1(x,p)+\bar{F}_2(x,p)*\bar{U}_2^2(x,p)+$$
$$+c^2\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k+1}\left\{\left(\bar{p}_k-\gamma\theta_k\right)\bar{U}_2^1(x+L,p)+\bar{u}_k\bar{U}_{2,x}^1(x+L,p)\right\}+$$
$$+H(t)\left\{\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k+1}\left(\bar{q}_k-\eta p\bar{u}_k\right)\bar{U}_2^2\left(x-(-1)^kL,p\right)+\bar{\theta}_k\bar{U}_{2,x}^2(x+L,p)\right\} \tag{7.2}$$

здесь черточкой над функцией обозначено его преобразование Лапласа.

Используя асимптотические свойства фундаментальной матрицы $\bar{U}_j^i$ в нуле (6.7), в работе [16] получена система из четырех линейных уравнений в граничных точках для определения трансформант Фурье по времени неизвестных граничных функций, соответственно решаемой краевой задаче. Она совпадает с трансформантой Фурье по времени решений (5.7), (5.8) в предположении, что в точке разрыва $H(0)=1/2$.

В пространстве преобразований Лапласа по времени она преобразуется к виду:

$$\frac{1}{2}\bar{u}(-L,p)=\left(\bar{F}_{1x}^*\bar{U}_1^1+\bar{F}_{2x}^*\bar{U}_1^2\right)_{x=L}+$$
$$+c^2\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k+1}\left\{\left(\bar{p}_k(p)-\breve{\gamma}\bar{\theta}_k(p)\right)\bar{U}_1^1\left(-L-(-1)^kL,p\right)+\bar{u}_k(p)\bar{U}_{1,x}^1\left(-L-(-1)^kL,p\right)\right\}+$$
$$+\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k+1}\left\{\left(\bar{q}_k(p)+i\omega\eta\bar{u}_k(p)\right)\bar{U}_1^2\left(-L-(-1)^kL,p\right)+\bar{\theta}_k(p)\bar{U}_{1,x}^2\left(-L-(-1)^kL,p\right)\right\} \tag{7.3}$$

$$-\frac{1}{2}\bar{u}(L,p)=\left(\bar{F}_{1x}^*\bar{U}_1^1+\bar{F}_{2x}^*\bar{U}_1^2\right)_{x=L}+$$
$$+c^2\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k+1}\left\{\left(\bar{p}_k(p)-\breve{\gamma}\bar{\theta}_k(p)\right)\bar{U}_1^1\left(L-(-1)^kL,p\right)+\bar{u}_k(p)\bar{U}_{1,x}^1\left(L-(-1)^kL,p\right)\right\}+$$
$$+\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k+1}\left\{\left(\bar{q}_k(p)-p\eta\bar{u}_k(\omega)\right)\bar{U}_1^2\left(L-(-1)^kL,p\right)+\bar{\theta}_k(p)\bar{U}_{1,x}^2\left(L-(-1)^kL,p\right)\right\} \tag{7.4}$$

$$\frac{1}{2}\overline{\theta}(-L,p) = \left(\overline{F}^*_{1x}\overline{U}^1_2 + \overline{F}^*_{2x}\overline{U}^2_2\right)\Big|_{x=-L} +$$
$$+ c^2\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k+1}\left\{\left(\overline{p}_k(p) - \gamma\overline{\theta}_k(p)\right)\overline{U}^1_2(0,p) + \overline{u}_k(p)\overline{U}^1_{2},_x(0,p)\right\} +$$
$$+ \sum_{k=1}^{2}(-1)^{k+1}\left(\overline{q}_k(p) - p\eta\overline{u}_k(p)\right)\overline{U}^2_2\left(-L-(-1)^k L,p\right) + \overline{\theta}_k(\omega)\overline{U}^2_{2},_x(0,p) \tag{7.5}$$

$$-\frac{1}{2}\overline{\theta}(L,p) = \left(\overline{F}^*_{1x}\overline{U}^1_2 + \overline{F}^*_{2x}\overline{U}^2_2\right)\Big|_{x=L} +$$
$$+ c^2\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k+1}\left\{\left(\overline{p}_k(p) - \gamma\overline{\theta}_k(p)\right)\overline{U}^1_2(2L,p) + \overline{u}_k(p)\overline{U}^1_{2},_x(2L,p)\right\} +$$
$$+ \sum_{k=1}^{2}(-1)^{k+1}\left(\overline{q}_k(p) - p\eta\overline{u}_k(p)\right)\overline{U}^2_2\left(L-(-1)^k L,p\right) + \overline{\theta}_k(p)\overline{U}^2_{2},_x(2L,p) \tag{7.6}$$

Из этой системы можно получить разрешающие уравнения для любой из четырех поставленных задач.

8. Разрешающие уравнения начально-краевых задач в пространстве преобразований Лапласа. Разрешающую систему линейных алгебраических уравнений (7.3)–(7.6) представим в матричном виде:

$$\{\mathbf{A1}\}\times\begin{Bmatrix}\overline{u}_1\\ \overline{p}_1\\ \overline{\theta}_1\\ \overline{q}_1\end{Bmatrix} + \{\mathbf{A2}\}\begin{Bmatrix}\overline{u}_2\\ \overline{p}_2\\ \overline{\theta}_2\\ \overline{q}_2\end{Bmatrix} = \mathbf{b} \tag{8.1}$$

или более точно

$$\mathbf{A1} = \begin{Bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0\\ -\left(c^2\overline{U}^1_{1},_x - p\eta U^2_1\right)_{(x=2L)} & -c^2\overline{U}^1_1(2L,p) & \left(\breve{\gamma}c^2\overline{U}^1_1 - \overline{U}^2_{1},_x\right)_{(x=2L)} & -\overline{U}^2_1(2L,p)\\ 0 & 0 & 0.5 & 0\\ -\left(c^2\overline{U}^1_{2},_x - p\eta\overline{U}^2_2\right)_{(x=2L)} & -c^2\overline{U}^1_2(2L,p) & \left(\gamma c^2\overline{U}^1_2 - \overline{U}^2_{2},_x\right)_{(x=2L)} & -\overline{U}^2_2(2L,p) \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{A2} = \begin{Bmatrix} \left(c^2\overline{U}^1_{1},_x - p\eta\overline{U}^2_1\right)_{(x=-2L)} & c^2\overline{U}^1_1(-2L,p) & -\left(\breve{\gamma}c^2\overline{U}^1_1 - \overline{U}^2_{1},_x\right)_{(x=-2L)} & \overline{U}^2_1(-2L,p)\\ 0.5 & 0 & 0 & 0\\ \left(c^2\overline{U}^1_{2},_x - p\eta U^2_2\right)_{(x=-2L)}, & c^2\overline{U}^1_2(-2L,p) & -\left(\gamma c^2\overline{U}^1_2 - \overline{U}^2_{2},_x\right)_{(x=-2L)} & U^2_2(-2L,p)\\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{Bmatrix} \overline{F}^*_1\overline{U}^1_1 + \overline{F}^*_2\overline{U}^2_1|_{-L}\\ \overline{F}^*_1\overline{U}^1_1 + \overline{F}^*_2\overline{U}^2_1|_{L}\\ \overline{F}^*_1\overline{U}^1_2 + \overline{F}^*_2\overline{U}^2_2|_{-L}\\ \overline{F}^*_1\overline{U}^1_2 + \overline{F}^*_2\overline{U}^2_2|_{L} \end{Bmatrix}$$

Здесь в нижнем индексе в скобках стоят значения x, при которых вычисляются функции в компонентах матриц.

Из этой системы нужно строить линейную систему алгебраических уравнений для любой из рассмотренных краевых задач, оставляя в левой части слагаемые с неизвестными краевыми значениями искомых функций и перенося в правую часть с известными. Для несобственных колебаний решение системы единственно и его определяем методом Крамера.

После определения недостающих граничных функций по формулам (7.1), (7.2), определяем перемещения, температуру в стержне. Для определения термоупругих напряжений подставим решение в закон Дюамеля—Неймана (2.3), где все входящие функции определены выше. Полученные решения позволяют определять термонапряженное состояние стержневых конструкций при разнообразных геометрических размерах и термоупругих параметрах. При этом можно исследовать воздействие на них сосредоточенных тепловых и силовых источников, описываемых сингулярными обобщенными функциями.

9. Полуобратные и обратные краевые задачи. Рассмотренные выше краевые задачи с любым из краевых условий на левом и правом концах стержня называют *прямыми задачами*. В этом случае на каждом конце задаются два из приведенных краевых условий. Будем называть краевые условия *симметричными*, если они одного типа на концах стержня. Например, на концах стержня заданы перемещения и температура (1).

К прямым задачам относятся также задачи с *несимметричными* краевыми условиями. Например, на левом конце два условия одной краевой задачи, а на правом — другой.

Все другие способы задания 4-х краевых условий определяют класс обратных задач, который тоже многообразен. Например, на одном конце можно задавать только тепловые характеристики, а на другом только упругие. Другие задачи, в которых задаются 4 классических краевых условия из 8 возможных будем называть полуобратными и обратными, когда все известно лишь на одном конце. Для любой из них следует члены, содержащие 4 неизвестные граничные функции оставить в левой части уравнений, а известные перенести в их правую часть. Далее решение уравнений системы 4 линейных алгебраических определяется правилом Крамера.

Для построения оригиналов следует использовать обратное преобразование Лапласа по времени, т.е. обратного преобразования Лапласа у фундаментальных решений не существует. При $\eta = 0$ (несвязанная термоупругость) обратное преобразование Лапласа у фундаментальных решений существует (см. [14]) и возможно обращение преобразования Лапласа на основе численных методов и, соответственно, построение решений этих краевых задач в пространстве оригиналов. Однако полученные решения позволяют решать задачи колебаний стержней с учетом взаимовлияния силовых и тепловых полей.

10. Обратная краевая задача и ее решение. Рассмотрим здесь обратную задачу стационарных колебаний стержня, у которого известны все краевые значения на левом конце:

$$\begin{aligned} u(x_1,t) &= w_1(\omega)\exp(-i\omega t), \quad \theta(x_1,t) = \theta_1(\omega)\exp(-i\omega t) \\ \sigma(x_1,t) &= p_1(\omega)\exp(-i\omega t), \quad q(x_1,t) = q_1(\omega)\exp(-i\omega t) \end{aligned} \tag{10.1}$$

Система уравнений для определения амплитуд колебаний в этом случае имеет простой вид:

$$\begin{aligned} \bar{u}(x_1,\omega) &= w_1(\omega), \quad \bar{\sigma}(x_1,\omega) = \rho c^2 p_1(\omega) \\ \bar{\theta}(x_1,\omega) &= \theta_1(\omega), \quad \bar{\theta}_{,x}(x_1,\omega) = \bar{q}_1(\omega) \end{aligned} \tag{10.2}$$

Для определения краевых условий на правом конце надо решить систему уравнений:

$$\mathbf{A2}(-i\omega)\times\begin{Bmatrix}\bar{u}_2\\ \bar{p}_2\\ \bar{\theta}_2\\ \bar{q}_2\end{Bmatrix} = b(-i\omega) - \mathbf{A1}(-i\omega)\times\begin{Bmatrix}\bar{u}_1\\ \bar{p}_1\\ \bar{\theta}_1\\ \bar{q}_1\end{Bmatrix}, \tag{10.3}$$

где правая часть известна, а недостающие краевые значения определятся ее решением, которое строится по правилу Крамера.

11. Собственные колебания термоупругого стержня. Одной из наиболее важных инженерных задач является определение спектра собственных колебаний термоупругого стержня (*резонансных частот*). Как известно, внешние воздействия на резонансных частотах часто приводят к разрушительным последствиям для конструкций, содержащих такие элементы.

Для определения спектра термоупругих колебаний стержня следует исследовать определитель разрешающей матрицы A_{ij}. А именно резонансные частоты должны удовлетворять характеристическому уравнению

$$\det\left\{A_{ij}(L, \omega_k)\right\} = 0; \quad k = 1, 2, \ldots,$$

которое имеет вид трансцендентного уравнения, поскольку компоненты фундаментальной матрицы выражаются через тригонометрические функции от сложного аргумента. Его корни и их поведение можно определить только численно с помощью различных стандартных программ. В случае нулевого определителя существование решения на этой частоте определяется рангом расширенной матрицы системы, который зависит от действующих источников возмущений.

Заключение. По термодинамике стержневых конструкций очень мало работ. В основном они связаны с разработкой численных методов расчета их термонапряженного состояния, которые таких возможностей не дают. Отметим в этом направлении работы Кудайкулова А. и его учеников [17], [18], в которых разрабатываются численные методы на основе МКЭ для расчета термодинамики однородных и неоднородных стержней и стержней переменного сечения.

В настоящей работе разработана методика и построена система разрешающих уравнений для решения 35 прямых и полуобратных краевых задач связанной термодинамики упругого стержня. Полученные решения позволяют определять термонапряженное состояние стержневых конструкций при разнообразных геометрических размерах и термоупругих параметрах. При этом можно исследовать воздействие на них сосредоточенных тепловых и силовых источников, описываемых сингулярными обобщенными функциями.

Формулы (5.4) и (5.5) определяют перемещение и температуру внутри стержня по известным перемещениям, напряжениям, температуре и тепловым потокам на его концах. Последнее очень важно для инженерных приложений, т.к. все граничные функции на концах можно просто измерять. Кроме того, они позволяют исследовать влияние каждого краевого условия в отдельности на термодинамику стержня, что очень важно при проектировании конструкций, т.к. обычно исследуется динамика конструкций при определенном диапазоне внешних воздействий. Никакой другой метод построения решений таких краевых задач такой возможности не дает.

Разработанная методика позволяет также решать краевые задачи при связанных краевых условиях на левом и правом концах стержня. Если систему из 4-х уравнений (8.1) дополнить четырьмя линейными алгебраическими уравнениями, связывающими 8 неизвестных граничных значений искомых функций, то получим замкнутую систему из 8-ми линейных уравнений относительно этих функций, разрешая которую, найдем их значения.

Разработанный алгоритм следует использовать при расчете термонапряженного состояния стержневых конструкций при периодических внешних воздействиях, которые так распространены на практике. Разлагая их в ряды Фурье, получим решенную здесь задачу стационарных колебаний для каждой гармоники ряда. Сумма этих решений дает решение периодической задачи. Можно также исследовать резонансные явления в стержневых конструкциях, связанные с повышением амплитуды колебаний на определенных частотах, что может привести к потере прочности и разрушению конструкций, содержащих такие стержневые элементы.

Разработанная методика должна найти много полезных инженерных приложений. в частности для исследования термонапряженного состояния колонн, стенок и опор зданий при одноосном расширении и сжатии и приближенных к ним состояний. На ее основе можно создавать информационные технологии для исследования сетевых систем, моделируя их системой термоупругих графов различного строения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки Министерства образования и науки Респ. Казахстан (гранты AP05132272, AP09261033).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
2. *Новацкий В.* Динамические задачи термоупругости. М.: Мир, 1970. 256 с.
3. *Новацкий В.* Вопросы термоупругости. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 364 с.
4. Encyclopedia of Thermal Stresses / Ed. by *Hetnarski R.B.* Netherlands: Springer, 2014. https://doi.org/10.1007/978-94-007-2739-7
5. *Awrejcewicz J., Krysko V.A., Krysko A.V.* Thermo-Dynamics of Plates and Shells. Berlin: Springer, 2007. 468 c.
6. *Купрадзе В.Д., Гегелиа Т.Г., Башелешвили М.О., Бурчуладзе Т.В.* Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. М.: Наука, 1976. 664 с.
7. *Suh I.J., Tasaka N.* Boundary element analysis of dynamic coupled thermoelasticity problems // Comput. Mech. 1991. Т. 8. № 1. С. 313–342.
8. *Алексеева Л.А., Жанбырбаев Н.Б., Дадаева А.Н.* Метод граничных интегральных уравнений в краевых задачах несвязанной термоэластодинамики // ПММ. 1999. Т. 63. № 5. С. 853–859.
9. *Алексеева Л.А., Купесова Б.Н.* Метод обобщенных функций в краевых задачах связанной термоэластодинамики // ПММ. 2001. Т. 65. № 2. С. 334–345.
10. *Dargush E., Banerdjee P.K.* The development of a boundary element methods for time-dependent thermoelasticity // Solid&Struct. 1989. V. 9. № 5. P. 999–1021.
11. *Dargush G.E., Banerdjee P.K.* Boundary element methods in three-dimensional thermoelasticity // Solid&Struct. 1990. V. 10. № 2. P. 199–216.
12. *Алексеева Л.А.* Метод обобщенных функций в нестационарных краевых задачах для волнового уравнения // Матем. ж. Алматы. 2006. Т. 6. № 1. С. 16–32.
13. *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1978. 270 с.
14. *Алексеева Л.А., Дадаева А.Н., Айникеева Н.Ж.* Фундаментальные и обобщенные решения уравнений нестационарной динамики термоупругих стержней // Вестн. ЕНУ им. Л.Н. Гумилева: Матем., компьют. науки, мех. 2018. № 2 (123). С. 56–65.
15. *Алексеева Л.А., Ахметжанова М.М.* Фундаментальные и обобщенные решения уравнений динамики термоупругих стержней. 1. Стационарные колебания // Матем. ж. 2014. Т. 14. № 2. С. 5–20.
16. *Алексеева Л.А.* Стационарные краевые задачи динамики термоупругих стержней // Изв. НАН РК. Сер. Физ.-мат. 2014. № 3. С. 144–152.
17. *Kudaykulov A., Zhumadillayeva A.* Numerical simulation of temperature distribution field in beam bulk in the simultaneous presence of heat insulation, heat flux and heat exchange // Acta Phys. Polon. A. 2016. V. 130. № 1. P. 335–336.
18. *Kudaykulov A., Tashev A., Zhumadillayeva A., Askarova A.* Investigation of the steady nonlinear thermomechanical state of a rod of limited length and constant cross-section in the presence of symmetrical local thermal insulation, lateral heat exchanges and end heat fluxes // J. Adv. Phys. 2018. № 7. P. 522–526.

One-Dimensional Spatial Boundary Value Problems of the Connected Thermoelasticity. Generalized Functions Method

L. A. Alexeyeva[a,#] and M. M. Ahmetzhanova[a,##]

[a] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Alma-Ata, Kazakhstan*
[#] *e-mail: alexeeva@math.kz*
[##] *e-mail: mariella80@mail.ru*

Problems of definition of thermotension of a thermoelastic core with use of model of the connected thermoelasticity are considered. In this case in the equation of heat conductivity there is the divergence of speed of the movement of material points of the rod, and the elasticity equations contains the temperature gradient. On the basis of generalized functions method the generalized solutions of non-stationary and stationary boundary value problems have been solved at action of the power and thermal sources of various type including ones described singular generalized functions, under various boundary conditions on the ends of a core. Thermoshock waves which arise in such designs at action of impact loads and heat fluxes are considered, conditions on their fronts are received. The uniqueness of the set boundary tasks, including taking into account shock waves has been proved. Regular integral representation of the generalized solutions are given, which give the analytical solution of the tasks. Numerical implementation of solutions of a number of direct, return and semi-return boundary value problems of stationary fluctuations is carried out and results of computer experiments are presented

Keywords: coupled thermoelasticity, thermoelastic rod, boundary value problems, fundamental and generalized solution, Laplace transform, stationary oscillations

REFERENCES

1. *Nowacki W.* Teoria Spręystości. Warszawa: Paiistwowe Wydawnictwo Naukowe, 1970. (in Polish)
2. *Nowacki W.* Dynamiczne Zagadnienia Termosprężystosci. Warszawa: PWN, 1966. (in Polish)
3. *Nowacki W.* Zagadnienia Termosprężystości. Warszawa: PWN, 1960. (in Polish)
4. Encyclopedia of Thermal Stresses / Ed. by *Hetnarski R.B.* Netherlands: Springer, 2014. https://doi.org/10.1007/978-94-007-2739-7
5. *Awrejcewicz J.. Krysko V.A., Krysko A.V.* Thermo-Dynamics of Plates and Shells. Berlin: Springer, 2007. 468 c.
6. *Kupradze V.D., Gegelia T.G., Basheleshvili M.O., Burchuladze T.V.* 3D Problems of the Mathematical Theory of Elasticity and Thermoelasticity. Moscow: Nauka, 1976. 664 p.
7. *Suh I.J., Tasaka N.* Boundary element analysis of dynamic coupled thermoelasticity problems // Comput. Mech., 1991, vol. 8, no. 1, pp. 313–342.
8. *Alekseyeva L.A., Dadayeva A.N., Zhanbyrbayev N.B.* The method of boundary integral equations in unsteady boundary-value problems of uncoupled thermoelasticity // JAMM, 1999, vol. 63, no. 5, pp. 803–808.
9. *Alekseyeva L.A., Kupesova B.N.* The method of generalized functions in boundary-value problems of coupled thermoelastodynamics // JAMM, 2001, vol. 65, no. 2, pp. 327–337.
10. *Dargush E., Banerdjee P.K.* The development of a boundary element methods for time-dependent thermoelasticity // Solid&Struct., 1989, vol. 9, no. 5, pp. 999–1021.
11. *Dargush G.E., Banerdjee P.K.* Boundary element methods in threedimensional thermoelasticity // Solid&Struct., 1990, vol. 10, no. 2, pp. 199–216.
12. *Alekseeva L.A.* Method of generalized functions in nonstationary boundary value problems for solutions of the wave equation // Kaz. Math. J., 2006, vol. 6, no. 1, pp. 16–32.
13. *Vladimirov V.S.* Generalized Functions in Mathematical Physics. Moscow: Mir, 1979.
14. *Alekseeva L.A., Dadaeva A.N., Ainikeeva N.Zh.* Fundamental and generalized solutions of the equations of non-stationary dynamics of thermoelastic rods // Bull. Gumilyov Euras. Nat. Univ. Ser. Math., Comput. Sci., Mech., 2018, no. 2 (123), pp. 56–65.

15. *Alexeyeva L.A., Akhmetzhanova M.M.* Fundamental and generalized solutions of the equations of dynamics of thermoelastic cores. 1 Stationary fluctuations // Kaz. Math. J., 2014, vol. 14, no. 2, pp. 5–20.

16. *Alexeyeva L.A.* Stationary boundary value problem of dynamics of thermoelastic cores // News of NAS RK. Ser. Phys.&Math., 2014, no. 3, pp. 144–152.

17. *Kudaykulov A., Zhumadillayeva A.* Numerical simulation of temperature distribution field in beam bulk in the simultaneous presence of heat insulation, heat flux and heat exchange // Acta Phys. Polon. A, 2016, vol. 130, no. 1, pp. 335–336.

18. *Kudaykulov A., Tashev A., Zhumadillayeva A., Askarova A.* Investigation of the steady nonlinear thermomechanical state of a rod of limited length and constant cross-section in the presence of symmetrical local thermal insulation, lateral heat exchanges and end heat fluxes // J. Adv. Phys., 2018, no. 7, pp. 522–526.