ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2023, том 87, № 2, с. 176–185

УДК 534+517.95

РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ВОЛНОВЫХ МОДЕЛЕЙ МЕХАНИКИ

О. В. Капцов[1,*], Д. О. Капцов[1,]**

[1] *Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, Россия*

**e-mail: kaptsov@icm.krasn.ru*

***e-mail: hot.dok@gmail.com*

Поступила в редакцию 24.10.2022 г.
После доработки 13.02.2023 г.
Принята к публикации 15.02.2023 г.

В работе рассматриваются одномерные нестационарные уравнения с частными производными второго порядка, описывающие волны в неоднородных и нелинейных средах. Для построения решений используются контактные преобразования и дифференциальные подстановки Эйлера. Найдены общие и частные решения некоторых нестационарных моделей механики сплошной среды.

Ключевые слова: нелинейные волновые уравнения, подстановки Эйлера, общие решения

DOI: 10.31857/S003282352302008X, **EDN:** TZNDZR

1. Введение. Волновые движения представляют большой интерес в различных разделах механики сплошной среды [1–4]. Значительные трудности для исследования представляют нелинейные модели и линейные модели неоднородных сред. Наиболее изученными являются одномерные нестационарные уравнения, для которых получен ряд точных решений, составляющих “золотой фонд” теории [3]. Основными методами построения точных решений является групповой анализ дифференциальных уравнений [5, 6], теория солитонов [7, 8] и метод дифференциальных связей [9]. Однако имеются классические методы, восходящие к Эйлеру, Амперу, Дарбу, позволяющие иногда находить общие решения уравнений с частными производными [10–12]. Напомним, что метод Монжа заключается в том, для заданного уравнения с частными производными второго порядка

$$F(t, x, u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{tx}, u_{xx}) = 0$$

нужно найти уравнение первого порядка

$$f(t, x, u, u_t, u_x) = c$$

такое, что каждое решение последнего уравнения, для любого $c \in \mathbb{R}$, является решением исходного уравнения. Ампер и Дарбу обобщили метод Монжа, предложив дополнять исходное уравнение другими уравнениями произвольного порядка так, чтобы полученная система была совместной. При этом левые части дополнительных уравнений должны быть постоянными на характеристиках исходного уравнения. Подробное описание этих методов с примерами можно найти в [11, 12].

В данной работе рассматриваются гиперболические уравнения второго порядка с частными производными

$$u_{tt} = (f(u)\,u_x)_x \tag{1.1}$$

$$u_{tt} = s(x)u_{xx} \tag{1.2}$$

$$u_{tt} = u_{xx} + g(x)u_x, \tag{1.3}$$

где f, s, g — гладкие функции своих аргументов. Уравнение (1.1) служит для описания одномерных неустановившихся движений идеального газа [3, 13] и упругопластических волн [4, 14]. Уравнение (1.2) используется в теоретической акустике [1, 15], кроме того, подобное уравнение известно, как уравнение Чаплыгина [3, 13]. Уравнение (1.3) возникает в результате применения преобразований годографа к уравнениям газовой динамики [3, 13]. В работах [16—18] найдены группы точечных и нелокальных преобразований, допускаемые этими уравнениями; проведена групповая классификация уравнений и построены инвариантные решения. С другой стороны, в работах [12, 19], методом Эйлера–Дарбу, были найдены общие решения линейных уравнений (1.2), (1.3) для особых функций $s(x)$, $g(x)$.

В работе сначала приводятся преобразования, связывающие уравнения (1.1)–(1.3). В разд. 2 изучается вопрос о том, когда решения уравнения (1.3) переводятся в решения уравнения

$$v_{tt} = v_{xx} + Ag(x)v_x; \quad A \in \mathbb{R}, \tag{1.4}$$

с помощью дифференциальной подстановки Эйлера

$$v = s(x)u_x + r(x)u$$

Кроме классического случая $g(x) = c/x$ ($c \in \mathbb{R}$), найдены еще две функции $g = c/\sin x$ и $g = c/\operatorname{sh} x$, для которых существуют такие подстановки. Дополнительно получена функция $g(x)$, не выражающаяся в элементарных функциях, но для которой соответствующее уравнение (1.3) допускает подстановку Эйлера. Отмечается, что дифференциальная подстановка

$$v = s(x)u_x$$

переводит решения уравнения

$$u_{tt} = u_{xx} + \frac{s'}{s}u_x$$

в решения уравнения

$$v_{tt} = v_{xx} - \frac{s'}{s}v_x$$

для любой гладкой функции s. В разд. 3 показано как построить параметрические решения, зависящие от двух произвольных функций, для уравнения

$$u_{tt} = \left(u^{\frac{4n}{1-2n}}u_x\right)_x$$

при любых целых n. Кроме того, найдены общие решения уравнений

$$u_{tt} = u_{xx} + \frac{2n}{\operatorname{sh}(x)}u_x, \quad u_{tt} = u_{xx} + \frac{2n}{\sin(x)}u_x; \quad n \in \mathbb{Z}$$

2. Контактные преобразования и подстановки. Рассмотрим уравнение (1.1) и введем новую функцию v с помощью дифференциальной замены $v_x = u$. В результате получим уравнение третьего порядка, затем, интегрируя его по x, приходим к уравнению второго порядка

$$v_{tt} = f(v_x)v_{xx} \tag{2.1}$$

Последнее уравнение сводится к линейному уравнению Чаплыгина

$$w_{\tau\tau} = \frac{1}{f(y)} w_{yy} \tag{2.2}$$

преобразованием Лежандра

$$\tau = v_t, \quad y = v_x, \quad w = tv_t + xv_x - v, \quad w_\tau = t, \quad w_y = x,$$

при условии, что гессиан $v_{tt}v_{xx} - v_{tx}^2$ не равен нулю.

Введем новую независимую переменную $z = \int \sqrt{f(y)}dy$. Тогда уравнение (2.2) приводится к уравнению Дарбу

$$w_{\tau\tau} = w_{zz} + g(z) w_z, \tag{2.3}$$

где функция g сложной формулой выражается через функцию f. Обратный переход от уравнения (2.3) к уравнению (2.2) выполняется проще.

Для того чтобы найти решения уравнения (2.3), полезно решить следующую задачу: найти дифференциальные подстановки Эйлера первого порядка

$$v = s(x) u_x + r(x) u, \tag{2.4}$$

которые переводят решения уравнения (2.3) в решения уравнения (1.4). В результате подстановки функции v вида (2.4) в (1.4) получаем уравнение третьего порядка

$$\begin{gathered}(u_{ttx} - u_{xxx}) s + ru_{tt} - u_{xx}\left(Asg + r + 2s^2\right) - \\ - u_x\left(Ag(r + s') + s'' + 2r'\right) - u\left(Ar'g + r''\right) = 0\end{gathered}$$

Последнее уравнение должно быть следствием уравнения (1.3). Следовательно, если подставить производные u_{tt}, u_{ttx}, полученные из (1.3), то левая часть уравнения третьего порядка должна обратиться в ноль. Подставляя эти производные и собирая подобные члены при u_{xx}, u_x, u, имеем следующую систему из трех обыкновенных дифференциальных уравнений

$$2s' = (1 - A) sg, \quad s'' = sg' - 2r' + g(r - Ar - s'), \quad r'' = -Agr' \tag{2.5}$$

Предположим сначала, что функция r постоянна. Тогда третье уравнение системы удовлетворяется тождественно. Не ограничивая общности, можно считать, что $r = 0$ или $r = 1$. Пусть сначала $r = 1$ и $A \neq \pm 1$. Тогда из первого уравнения системы выражаем g и подставляем во второе уравнение. В результате получаем обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка на функцию s. Вводим новую функцию $y = 1/s(x)$ и приходим к уравнению

$$y'' = \frac{2(A - 1)}{A + 1} yy'$$

Интегрируя один раз последнее уравнение, имеем уравнение первого порядка

$$y' = \frac{A - 1}{A + 1} y^2 + c; \quad c \in \mathbb{R} \tag{2.6}$$

Если $c = 0$, то функция y равна

$$y = \frac{1 + A}{(1 - A)x + c_1}; \quad c_1 \in \mathbb{R}$$

Значит, в этом случае функции s и g имеют вид

$$s = \frac{(1 - A)x + c_1}{A + 1}, \quad g = \frac{2}{(1 - A)x + c_1}$$

Полагая $c_1 = 0$ и используя обозначение $\alpha = \dfrac{2}{1-A}$, можно утверждать что преобразование

$$v = \frac{x}{\alpha - 1} u_x + u$$

переводит решения уравнения

$$u_{tt} = u_{xx} + \frac{\alpha}{x} u_x \tag{2.7}$$

в решения уравнения

$$v_{tt} = v_{xx} + \frac{\alpha - 2}{x} u_x$$

Данное утверждение хорошо известно [10, 11]. Уравнение (2.5) является частным случаем уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу. Полагая $\alpha = 0$ и применяя последовательно указанное преобразование, легко найти решение уравнения

$$u_{tt} = u_{xx} + \frac{2n}{x} u_x; \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{2.8}$$

зависящее от двух произвольных функций и их производных. Более общие дифференциальные подстановки для уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу изучались в работе [20].

Следует отметить, что при $r = A = 1$ решениями системы (2.5) являются постоянные функции. Пусть теперь $r = 1$ и $A = -1$. Тогда второе уравнение в системе (2.5) следует из первого. Это приводит к следующему полезному утверждению.

Дифференциальная подстановка

$$v = s(x) u_x \tag{2.9}$$

переводит решения уравнения

$$u_{tt} = u_{xx} + \frac{s'}{s} u_x$$

в решения уравнения

$$v_{tt} = v_{xx} - \frac{s'}{s} v_x$$

Пусть теперь постоянная c в уравнении (2.6) не равна нулю. Обозначим величину $(A-1)/(A+1)$ через b и предположим, что $cb > 0$. Тогда решение уравнения (10) имеет вид

$$y = \sqrt{\frac{c}{b}} \operatorname{tg}\left(x\sqrt{cb} + c_1\right); \quad c_1 \in \mathbb{R}$$

Если же $cb < 0$, то решение уравнения (2.6) есть

$$y = \sqrt{\frac{-c}{b}} \operatorname{th}\left(x\sqrt{-cb} + c_1\right); \quad c_1 \in \mathbb{R}$$

Отсюда находятся функции s и g. Вводя обозначения подобные описанным выше, можно сформулировать следующую лемму.

Лемма 1. Решения уравнения

$$u_{tt} = u_{xx} + \frac{\alpha}{\operatorname{sh} x} u_x; \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

переводятся в решения уравнения

$$u_{tt} = u_{xx} + \frac{\alpha - 2}{\operatorname{sh} x} u_x; \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

с помощью дифференциальной подстановки

$$v = \frac{2u_x}{\alpha - 1} \operatorname{th} \frac{x}{2} + u$$

Справедлив также тригонометрический аналог предыдущей леммы.

Лемма 2. Решения уравнения

$$u_{tt} = u_{xx} + \frac{\alpha}{\sin x} u_x; \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

переводятся в решения уравнения

$$u_{tt} = u_{xx} + \frac{\alpha - 2}{\sin x} u_x; \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

с помощью дифференциальной подстановки

$$v = \frac{2u_x}{\alpha - 1} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + u$$

Теперь предположим, что функция r не является постоянной и $s \neq 0$. Рассмотрим сначала случай $A = 1$. В этом случае из первого уравнения системы (2.5) следует, что функция s – постоянна. При этом система редуцируется к двум уравнениям

$$2r' = ag', \quad r'g + r'' = 0$$

где $a = s \in \mathbb{R}$. Интегрируя первое уравнение, имеем $r = ag/2 + c_1$ ($c_1 \in \mathbb{R}$). Тогда из второго уравнения получаем

$$g' + \frac{g^2}{2} + c = 0; \quad c \in \mathbb{R} \tag{2.10}$$

В зависимости от знака константы c имеются три типа решений уравнения (2.10):

$$g = -2\operatorname{tg}(x + b) \quad \text{при } c = 2$$

$$g = 2\operatorname{th}(x + b) \quad \text{при } c = -2$$

$$g = \frac{2}{x + b} \quad \text{при } c = 0$$

Здесь $b \in \mathbb{R}$, а значения константы c выбраны из соображений удобства. Соответствующие дифференциальные подстановки Эйлера имеют вид

$$v = au_x + agu; \quad a \in \mathbb{R}$$

Эти подстановки порождены симметриями соответствующих уравнений (1.3).

Теперь предположим, что функции r и s не постоянные. Тогда из первого и третьего уравнений системы (2.5) выражаем функцию g и получаем соотношения

$$g = \frac{2s'}{(A - 1)s} = \frac{r''}{Ar'} \tag{2.11}$$

Интегрируя последнее соотношение, имеем

$$s = k(r')^m, \quad m = \frac{A - 1}{2A},$$

где k – произвольная константа. Подставляя g и s во второе уравнение системы (2.5), приходим (при $m \neq 1/3$) к уравнению третьего порядка

$$r''' + \frac{(m-1)^2}{3m-1}\frac{(r'')^2}{r'} + \frac{2mrr''}{k(3m-1)(r')^m} + \frac{2(r')^{2-m}}{(3m-1)k} = 0$$

В общем случае решить это уравнение не удается. Однако при $m = -1$ можно свести его к уравнению первого порядка. Действительно, при $m = -1$, оно обладает первым интегралом

$$\frac{rr'' - (r')^2}{r'}\exp\left(r^2/4k\right) = c_2$$

Последнее выражение также имеет первый интеграл

$$\frac{r'}{r} - c_2\pi\,\mathrm{erf}\left(\frac{r}{2\sqrt{k}}\right) - \frac{2\sqrt{k}c_2}{r\exp\left(-r^2/4k\right)} = c_1,$$

где $\mathrm{erf}(z)$ – функция ошибок. Таким образом, для нахождения функции r необходимо обращать интеграл, который не выражается через элементарные функции. В свою очередь, функции g, s выражаются через функцию r.

3. Построение решений. Рассмотрим сначала уравнение (1.3). Мы хотим перейти от этого уравнения к уравнениям (1.1) и (1.2). Для этого введем новую независимую переменную $y = \alpha(x)$ в уравнении (1.3), т.е. положим $u(t,x) = v(t,\alpha(x))$. В результате замены новое уравнение будет иметь вид

$$v_{tt} = (\alpha')^2 v_{xx} + (\alpha'' + \alpha' g)v_x$$

Приравнивая к нулю второе слагаемое в правой части последнего уравнения, получаем уравнение на функцию $\alpha(x)$

$$\alpha'' + \alpha' g = 0$$

Его решение имеет вид

$$\alpha = c_1\int\exp\left(-\int g dx\right)dx + c_2; \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Если взять уравнение Эйлера–Пуассона

$$u_{tt} = u_{xx} + \frac{2n}{x}u_x,$$

то функция замены переменной $y = \alpha(x)$ задается формулой $c_1 x^{1-2n} + c_2$. Для простоты полагая $c_2 = 0$, $c_1 = 1$, обращая функцию α и подставляя в α', получаем уравнение

$$v_{tt} = y^{\frac{4n}{2n-1}} v_{yy} \tag{3.1}$$

Заметим, что общее решение этого уравнения, для целых n, получены Эйлером ([10], задача 55). Приведем решения для некоторых n.

Если $n = 1$, то

$$v = y\left(Y\left(\frac{1}{y} + t\right) + T\left(\frac{1}{y} - t\right)\right)$$

Если $n = 2$, то

$$v = y\left(Y(z_1) + T(z_2)\right) - \frac{1}{2}y^{\frac{2}{3}}\left(Y'(z_1) + T'(z_2)\right),$$

где $z_1 = 3y^{\frac{1}{3}} - t$, $z_2 = 3y^{\frac{1}{3}} + t$. Если $n = -1$, то

$$v = Y(z_1) + T(z_2) - \frac{1}{2} y^{\frac{1}{3}} \left(Y'(z_1) + T'(z_2)\right),$$

где $z_1 = 3y^{\frac{1}{3}} - t$, $z_2 = 3y^{\frac{1}{3}} + t$. Если $n = -2$, то

$$v = Y(z_1) + T(z_2) - \frac{1}{2} y^{\frac{1}{5}} \left(Y'(z_1) + T'(z_2)\right) + \frac{1}{12} y^{\frac{2}{5}} \left(Y''(z_1) + T''(z_2)\right),$$

где $z_1 = 5y^{\frac{1}{5}} - t$, $z_2 = 5y^{\frac{1}{5}} + t$.

С помощью преобразования Лежандра

$$x = v_y, \quad \tau = v_t, \quad \omega = tv_t + yv_y - v, \tag{3.2}$$

уравнение (3.1) преобразуется в уравнение

$$\omega_{\tau\tau} = (\omega_x)^{\frac{4n}{1-2n}} \omega_{xx} \tag{3.3}$$

Вводя новую функцию $z = \omega_x$, получаем уравнение

$$z_{\tau\tau} = \left(z^{\frac{4n}{1-2n}} z_x\right)_x$$

Преобразование Лежандра (3.2) позволяет найти параметрические решения последнего уравнения для всех $n \in \mathbb{Z}$. В качестве примера рассмотрим уравнение

$$v_{tt} = y^4 v_{yy},$$

имеющее решение

$$v = y\left(f\left(t + \frac{1}{y}\right) + g\left(t - \frac{1}{y}\right)\right),$$

где f, g — произвольные гладкие функции. Используя преобразование Лежандра (3.2), находим параметрическое решение уравнения (3.3) при $n = 1$

$$x = X = f + g - \frac{f'}{y} + \frac{g'}{y}, \quad \tau = T = y(f' + g'), \quad \omega = tT - f' + g'$$

Тогда параметрическое решение уравнения

$$z_{\tau\tau} = (z^{-4} z_x)_x$$

задается формулой

$$x = X, \quad \tau = T, \quad z = \frac{J(\omega, X)}{J(T, X)},$$

здесь $J(h, k)$ — определитель матрицы $\begin{pmatrix} D_t h & D_y h \\ D_t k & D_y k \end{pmatrix}$, а $D_t h$, $D_y h$ — полные производные от функции h по t и y соответственно. Совершенно аналогично находятся параметрические решения для других уравнений вида (3.3) при целых значениях параметра n.

Используя Лемму 1 можно построить решения уравнения

$$u_{tt} = u_{xx} - \frac{2n}{\operatorname{sh} x} u_x; \quad n \in \mathbb{N} \tag{3.4}$$

Действительно, пусть $n = 0$. Тогда $u = T(t + x) + X(t - x)$ — общее решение этого уравнения, где T, X — произвольные гладкие функции. Значит, функция

$$u_1 = u - 2u_x \operatorname{th}\frac{x}{2}$$

удовлетворяет уравнению

$$(u_1)_{tt} = (u_1)_{xx} - \frac{2}{\operatorname{sh} x}(u_1)_x$$

Последовательно применяя дифференциальную подстановку, указанную в лемме, получаем формулу для решения

$$u_n = \prod_{k=0}^{n-1}\left(1 - \frac{2}{1+2k}\operatorname{th}\frac{x}{2}\frac{\partial}{\partial x}\right)u$$

уравнения

$$(u_n)_{tt} = (u_n)_{xx} - \frac{2(n+1)}{\operatorname{sh} x}(u_n)_x; \quad n \in \mathbb{N} \tag{3.5}$$

Если взять функцию

$$g = \frac{2n}{\operatorname{sh} x}; \quad n \in \mathbb{Z}$$

то в этом случае функция замены переменной имеет вид

$$\alpha = x - 2\sum_{i=1}^{n}\frac{\operatorname{cth}(x/2)}{2i-1}$$

Обратная функция для α не является элементарной, поэтому функция s в соответствующем уравнении (1.2) не элементарная. Переход от уравнения (1.2) к уравнению (1.1) тоже осуществляется с использованием преобразования Лежандра. Однако само уравнение (1.1) и его параметрические решения не выражаются с помощью элементарных функций.

Следует отметить, что уравнение (2.1) обладает двумя промежуточными интегралами (инвариантами характеристик первого порядка) вида

$$v_t \pm \int\sqrt{f(v_x)}\,dv_x = \text{const}$$

В частности, уравнение

$$v_{tt} = v_x^{2n} v_{xx}; \quad n \in \mathbb{R} \tag{3.6}$$

имеет два промежуточных интеграла

$$v_t \pm \frac{1}{n+1}v_x^{n+1} = \text{const}$$

Таким образом, после выбора знака плюс или минус, мы приходим к уравнению с частными производными первого порядка

$$v_t \pm \frac{1}{n+1}v_x^{n+1} + c = 0; \quad c \in \mathbb{R},$$

любое решение которого удовлетворяет уравнению (3.6). Интегральными поверхностями данного уравнения первого порядка являются специальные развертывающиеся поверхности, образованные из прямых. Подробности построения этих поверхностей можно найти в [21].

Заключение. Применяемые в работе методы можно распространить на другие типы математических моделей. Прежде всего, следует рассмотреть эллиптические и параболические уравнения. Особенно интересно развить эти методы для многомерных уравнений. Некоторые примеры представлены в [12].

В последние годы появился новый способ построения решений уравнений с частными производными — метод инвариантных подпространств. Подробное описание этого метода можно найти в [22].

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2022-873).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бреховских Л.М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973.
2. *Куликовский А.Г., Свешникова Е.И.* Нелинейные волны в упругих средах. М.: Московский лицей, 1998.
3. *Овсянников Л.В.* Лекции по основам газовой динамики. Ижевск: Ин-т компьют. исслед., 2003.
4. *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988.
5. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
6. *Ибрагимов Н.Х.* Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983.
7. *Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П.* Теория солитонов: метод обратной задачи. М.: Наука, 1980.
8. *Абловиц М., Сегур Х.* Солитоны и метод обратной задачи М.: Мир, 1987.
9. *Сидоров А.Ф., Шапеев В.П., Яненко Н.Н.* Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике. Новосибирск: Наука, 1984.
10. *Эйлер Л.* Интегральное исчисление. Т. 3. М.: ГИФМЛ, 1958.
11. *Дарбу Ж.Г.* Лекции по общей теории поверхностей и геометрические приложения анализа бесконечно малых. В 4 тт. Том 2. Ижевск: Ин-т компьют. исслед., 2013.
12. *Капцов О.В.* Методы интегрирования уравнений с частными производными. М.: Физматлит, 2009.
13. *Черный Г.Г.* Газовая динамика. М.: Наука, 1988.
14. *Новацкий В.К.* Волновые задачи теории пластичности. М.: Мир, 1978.
15. *Medwin H., Clay C.* Fundamentals of Acoustical Oceanography. Acad. Press, 1997.
16. *Ames W.F., Lohner R.J., Adams E.* Group properties of $u_{tt} = [f(u)u_x]_x$ // Int. J. Nonlin. Mech. 1981. V. 16. P. 439–447.
17. *Bluman G.W., Kumei S.* On invariance properties of the wave equation // J. Math. Phys. 1987. V. 28. P. 307–318.
18. *Bluman G.W., Cheviakov A.F.* Nonlocally related systems, linearization and nonlocal symmetries for the nonlinear wave equation // J. Math. Anal. Appl. 2007. V. 333. P. 93–111.
19. *Pelinovsky E., Kaptsov O.* Traveling waves in shallow seas of variable depths // Symmetry. 2022. V. 14(7). P. 1448.
20. *Аксенов А.В.* Симметрии и соотношения между решениями класса уравнений Эйлера–Пуассона–Дарбу // Докл. РАН. 2001. Т. 381. № 2. С. 176–179.
21. *Камке Э.* Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка. М.: Наука, 1966.
22. *Galaktionov V., Svirshchevskii S.* Exact Solutions and Invariant Subspaces of Nonlinear PDEs in Mechanics and Physics. Chapman&Hall/CRC Appl. Math.&Nonlin. Sci., 2006.

Solutions of Some Wave Mechanics Models

O. V. Kaptsov[a,#] and D. O. Kaptsov[a,##]

[a]*Institute of Computational Modelling SB RAS, Krasnoyarsk, Russia*
[#]*e-mail: kaptsov@icm.krasn.ru*
[##]*e-mail: hot.dok@gmail.com*

We consider one-dimensional second order partial differential equations describing waves in inhomogeneous and nonlinear media. Contact transformations and Euler differential substitution are used to construct general solutions. General and partial solutions of some nonstationary continuum mechanics models are found.

REFERENCES

1. *Brekhovskikh L.M.* Waves in Layered Media. Moscow: Nauka, 1973. (in Russian)
2. *Kulikovskii A.G., Sveshnikova Elena I.* Nonlinear Waves in Elastic Media. Boca Raton. CRC Press, 1995.
3. *Ovsyannikov L.V.* Lectures on Basic Gas Dynamics., Moscow; Izhevsk: Inst. Comput. Sci., 2003. (in Russian)
4. *Rabotnov Yu.N.* Elements of Hereditary Mechanics of Solids. Moscow: Nauka, 1977. (in Russian)
5. *Ovsyannikov L.V.* Group analysis of differential equations. Moscow: Nauka, 1978. (in Russian)
6. *Ibragimov N.* Transformation Groups in Mathematical Physics. Dordrecht: Reidel, 1985.
7. *Zakharov V.E., Manakov S.V., Novikov S.P., Pitaevskii L.P.* Soliton Theory: Inverse Scattering Method. Moscow: Nauka, 1980.
8. *Ablowitz M.J., Segur H.* Solitons and the Inverse Scattering Transform. Philadelphia: Soc. Industr.&Appl. Math., 1981.
9. *Sidorov A.F., Shapeev V.P., Yanenko N.N.* Method of Differential Relations and Its Applications in Gas Dynamics. Novosibirsk: Nauka, 1984.
10. *Euler L.* Integral Calculus. Vol. 3. Moscow: GIFML, 1958.
11. *Darboux J.G.* Lectures on the General Theory of Surfaces and Geometrical Applications of the Analysis of Infinitesimals. Vol. 2. Izhevsk: Inst. Comput. Sci., 2013.
12. *Kaptsov O.V.* Methods for Integrating Partial Differential Equations. Moscow: Fizmatlit, 2009. (in Russian)
13. *Cherny G.G.* Gas Dynamics. Moscow: Nauka, 1988. (in Russian)
14. *Novatsky V.K.* Wave Problems of the Theory of Plasticity. Moscow, Mir, 1978.
15. *Medwin H., Clay C.* Fundamentals of Acoustical Oceanography. Acad. Press, 1997.
16. *Ames W.F., Lohner R.J., Adams E.* Group properties of $u_{tt} = [f(u)u_x]_x$ // Int. J. Nonlin. Mech., 1981, vol. 16, pp. 439–447.
17. *Bluman G.W., Kumei S.* On invariance properties of the wave equation // J. Math. Phys., 1987, vol. 28, pp. 307–318.
18. *Bluman G.W., Cheviakov A.F.* Nonlocally related systems, linearization and nonlocal symmetries for the nonlinear wave equation// J. Math. Anal. Appl., 2007, vol. 333, pp. 93–111.
19. *Pelinovsky E., Kaptsov O.* Traveling waves in shallow seas of variable depths // Symmetry, 2022, vol. 14 (7), pp. 1448.
20. *Aksenov A.V.* Symmetries and relations between solutions of the class Euler–Poisson–Darboux equations // Dokl. Math., 2001, vol. 64, no. 3, pp. 421–424.
21. *Kamke E.* Handbook on First Order Partial Differential Equations. Moscow: Nauka, 1966.
22. *Galaktionov V., Svirshchevskii S.* Exact Solutions and Invariant Subspaces of Nonlinear PDEs in Mechanics and Physics. Chapman&Hall/CRC Appl. Math.&Nonlin. Sci., 2006.