

УДК 539.4

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ТЕРМОУПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ГИБКИХ ПОЛОГИХ АРМИРОВАННЫХ ОБОЛОЧЕК

© 2023 г. А. П. Янковский^{1,*}

¹*Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН,
Новосибирск, Россия*

**e-mail: lab4nemir@rambler.ru*

Поступила в редакцию 13.10.2022 г.

После доработки 26.01.2023 г.

Принята к публикации 15.02.2023 г.

Разработана математическая модель неізотермического упруговязкопластического деформирования гибких пологих оболочек с многонаправленными структурами армирования. Волновые процессы и слабое сопротивление поперечным сдвигам в искривленных панелях моделируется в рамках теории изгиба Амбарцумяна. Геометрическая нелинейность задачи учитывается в приближении Кармана. Компоненты композиции предполагаются изотропными материалами, а их пластичность описывается теорией течения с функцией нагружения, зависящей от скорости деформирования и температуры. Учтена связанность термомеханической задачи при динамическом нагружении композитных пологих оболочек. В поперечном направлении конструкций температура аппроксимирована полиномом 7-го порядка. Сформулированная двумерная нелинейная начально-краевая задача решена с использованием явной численной схемы шагов по времени. Исследовано термоупруговязкопластическое и термоупругопластическое поведение ортогонально армированных в двух тангенциальных направлениях стеклопластиковых и металлокомпозитных пологих оболочек, нагруженных в поперечном направлении воздушной взрывной волной. Показано, что гибкие искривленные стеклопластиковые панели в отдельных точках могут дополнительно нагреваться на 14...27°C, а аналогичные металлокомпозитные конструкции – на 70°C и более. Пиковые значения температуры при этом удерживаются на кратковременных интервалах – порядка долей 1 мс. Продемонстрировано, что в отличие от гибких пластин аналогичные пологие оболочки (с такой же структурой армирования и с такими же характерными размерами) при динамическом нагружении в поперечном направлении необходимо рассчитывать не только при учете зависимости пластических свойств компонентов композиции от скорости их деформирования, но и при учете теплового отклика в таких тонкостенных конструкциях. Более интенсивное неупругое деформирование искривленных композитных панелей наблюдается при их нагружении со стороны выпуклой лицевой поверхности.

Ключевые слова: гибкие пологие оболочки, многонаправленное армирование, термоупруговязкопластичность, связанная термомеханическая задача, теория изгиба Амбарцумяна, динамическое нагружение, явная численная схема

DOI: 10.31857/S0032823523020157, EDN: UBHYJV

1. Введение. Конструкции из композитных материалов (КМ) широко используются в современной конструкторской практике [1–4] и в процессе эксплуатации часто испытывают воздействие интенсивных термосиловых нагрузок [5–8], при которых ком-

поненты их композиций деформируются пластически [5–7, 9–13]. Поэтому актуальна проблема математического моделирования неизотермического упругопластического динамического поведения тонкостенных КМ-изделий, в том числе и искривленных панелей и пологих оболочек, которая на сегодняшний день находится на стадии становления [5–7, 12–17].

Физико-механические свойства многих материалов существенно зависят от температуры [10, 18, 19], кроме того, при динамическом нагружении их пластические характеристики зависят и от скорости деформирования [18, 19], поэтому в [17] была построена модель термоупруговязкопластического деформирования многонаправленно армированного материала и проведен ряд расчетов термомеханического поведения гибких пластин из таких КМ, нагруженных в поперечном направлении воздушной взрывной волной. В работе [17] продемонстрировано, что упруговязкопластический расчет металлокомпозитных пластин необходимо проводить при учете теплового отклика в них, а пластины из стеклопластика можно рассчитывать без учета возникающего при этом температурного поля (в силу пренебрежимо малого нагрева таких композитных конструкций). Однако известно, что при высокоскоростном нагружении материалов основным источником выделения тепла в них является диссипация энергии механического происхождения, которая равна полной свертке произведения тензоров напряжений и скоростей деформаций [20]. Так как частота поперечных колебаний искривленных панелей значительно больше, чем аналогичных пластин, изготовленных из тех же материалов и имеющих те же характерные размеры, то и скорости деформаций пологих КМ-оболочек при их динамическом нагружении в поперечном направлении будут существенно больше, чем у подобных им КМ-пластин. Следовательно, при таком нагружении искривленных КМ-панелей тепловыделение в них может оказаться значительно большим, чем в аналогичных КМ-пластинах, и результаты, полученные в [17], уже нельзя будет дословно переносить на пологие КМ-оболочки.

Для расчета волновых процессов в динамически изгибаемых тонкостенных элементах КМ-конструкций и для учета их слабого сопротивления поперечным сдвигам используют неклассические теории Тимошенко–Рейсснера [5, 7, 21, 22], Амбарцумяна [17, 23], Редди [24, 25] и теории изгиба более высоких порядков [5, 26, 27].

Для интегрирования физически и геометрически нелинейных задач динамики пластин и оболочек используют явные [5, 17] и неявные [6, 28] численные схемы.

Исходя из вышеизложенного, данная работа посвящена моделированию неизотермического упруговязкопластического деформирования динамически нагружаемых в поперечном направлении пологих армированных оболочек при использовании теории изгиба Амбарцумяна. Связанная нелинейная термомеханическая задача, возникающая при этом, численно интегрируется с использованием явной схемы шагов по времени.

2. Формулировка задачи и метод ее решения. Рассмотрим пологую оболочку толщиной $2h$, с которой свяжем ортогональную систему координат x_i так, чтобы отсчетная поверхность $x_3 = 0$ была срединной ($|x_3| \leq h$), а координатные линии x_1 и x_2 совпадали с линиями главных кривизн этой поверхности (рис. 1, на котором искривленность панели не изображена в силу ее малости). Оболочка усилена N семействами волокон (возможно и пространственно) с плотностями армирования ω_k ($1 \leq k \leq N$). В поперечном направлении x_3 структура армирования однородна.

С каждым k -м семейством волокон свяжем ортогональную систему координат $x_i^{(k)}$. При этом ось $x_1^{(k)}$ направим вдоль траектории армирования, а ее ориентацию в пространстве $x_1x_2x_3$ зададим двумя углами сферической системы координат θ_k и φ_k (рис. 2).

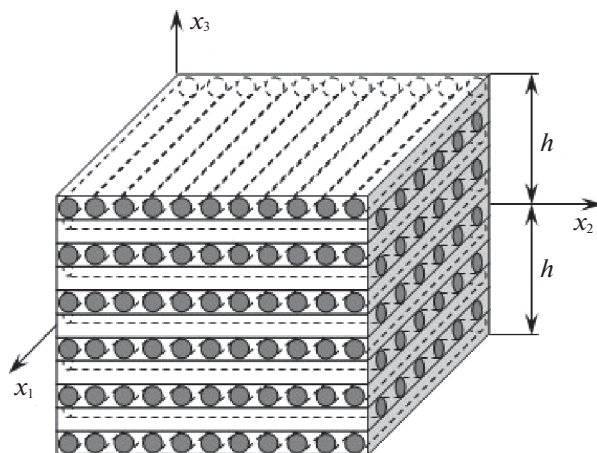


Рис. 1. Элемент полой оболочки с 2D-структурой армирования.

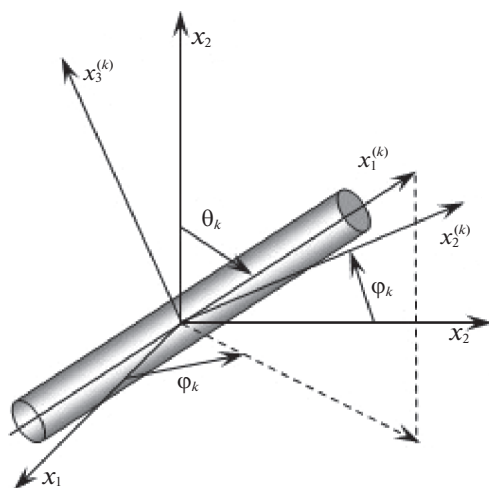


Рис. 2. Локальная система координат, связанная с волокном k -го семейства.

Направляющие косинусы $l_{ij}^{(k)}$ оси $x_i^{(k)}$ в глобальной системе координат x_j ($i, j = \overline{1,3}$, $1 \leq k \leq N$) определяются формулами [17]:

$$\begin{aligned}
 l_{11}^{(k)} &= \sin \theta_k \cos \varphi_k, & l_{12}^{(k)} &= \sin \theta_k \sin \varphi_k, & l_{13}^{(k)} &= \cos \theta_k \\
 l_{21}^{(k)} &= -\sin \varphi_k, & l_{22}^{(k)} &= \cos \varphi_k, & l_{23}^{(k)} &= 0 \\
 l_{31}^{(k)} &= -\cos \theta_k \cos \varphi_k, & l_{32}^{(k)} &= -\cos \theta_k \sin \varphi_k, & l_{33}^{(k)} &= \sin \theta_k; \quad 1 \leq k \leq N
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

Внешние касательные силы на лицевых поверхностях панели традиционно не учитываем, а в случае пространственного армирования дополнительно считаем, что выполняются требования, предъявляемые к структуре армирования, приведенные в замечании в [17]. (При многонаправленном плоском армировании (см. рис. 1) указан-

ные требования выполняются заведомо.) Тогда на основании результатов работ [17, 23] перемещения точек гибкой полой КМ-оболочки U_i и осредненные деформации ее композиции ε_{ij} в рамках теории Амбарцумяна аппроксимируются так:

$$U_i(t, \mathbf{r}) = u_i(t, \mathbf{x}) - x_3 \partial_i w + \frac{2x_3}{3h^2} (3h^2 - x_3^2) \varepsilon_{i3}^0, \quad U_3(t, \mathbf{r}) = w(t, \mathbf{x}) \quad (2.2)$$

$$i = 1, 2, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2), \quad \mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$$

$$\varepsilon_{ij}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{2} (\partial_i u_j + \partial_j u_i) - x_3 \partial_i \partial_j w + \frac{x_3}{3h^2} (3h^2 - x_3^2) (\partial_i \varepsilon_{j3}^0 + \partial_j \varepsilon_{i3}^0) +$$

$$+ \delta_{ij} \frac{w}{R_i} + \frac{1}{2} \partial_i w \partial_j w, \quad \varepsilon_{i3}(t, \mathbf{r}) = \frac{h^2 - x_3^2}{h^2} \varepsilon_{i3}^0(t, \mathbf{x}) \quad (2.3)$$

$$\mathbf{x} \in \Omega, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0, \quad i, j = 1, 2,$$

где w – прогиб конструкции; u_i – перемещения точек срединной поверхности ($x_3 = 0$) в тангенциальных направлениях x_i ; ε_{i3}^0 – деформации поперечных сдвигов в точках этой же поверхности; R_i – радиусы главных кривизн отсчетной поверхности; t_0 – начальный момент времени t ; ∂_i – оператор частного дифференцирования по переменной x_i ($i = 1, 2$); δ_{ij} – символ Кронекера; Ω – область, занимаемая КМ-панелью в плане. В выражениях (2.2) и (2.3) неизвестны двумерные функции w , u_i и ε_{i3}^0 ($i = 1, 2$), зависящие и от времени t .

В настоящем исследовании моделируется поведение искривленной КМ-панели как гибкой тонкостенной термомеханической системы, поэтому с приемлемой для практических приложений точностью напряжение $\sigma_{33}(t, \mathbf{r})$ по координате x_3 можно аппроксимировать так [17, 22]:

$$\sigma_{33}(t, \mathbf{r}) = \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t, \mathbf{x}) - \sigma_{33}^{(-)}(t, \mathbf{x})}{2h} x_3 + \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t, \mathbf{x}) + \sigma_{33}^{(-)}(t, \mathbf{x})}{2} \quad (2.4)$$

$$\mathbf{x} \in \Omega, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0$$

где $\sigma_{33}^{(\pm)}(t, \mathbf{x}) \equiv \sigma_{33}(t, \mathbf{x}, \pm h)$ – нормальные напряжения на верхней (+) и нижней (–) лицевых поверхностях конструкции, известные из соответствующих силовых граничных условий.

К соотношениям (2.2) и (2.3) необходимо присоединить уравнения движения гибкой полой КМ-оболочки, которые при учете равенства (2.4) имеют вид [23]:

$$2h\rho\ddot{w} = \sum_{i=1}^2 \left[\partial_i \left(F_{i3} + \sum_{j=1}^2 F_{ij} \partial_j w \right) + R_i^{-1} F_{ii} \right] + \sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)}$$

$$2h\rho\ddot{u}_i = \sum_{j=1}^2 \partial_j (F_{ij} - F_{j3} \partial_i w) + R_i^{-1} F_{i3} - (\sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)}) \partial_i w \quad (2.5)$$

$$\frac{2}{3} h^3 \rho \ddot{\gamma}_i = \sum_{j=1}^2 \partial_j M_{ij} - F_{i3}; \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \geq t_0, \quad i = 1, 2,$$

где

$$\rho = \rho_0 \omega_0 + \sum_{k=1}^N \rho_k \omega_k, \quad \omega_0 = 1 - \sum_{k=1}^N \omega_k, \quad F_{ij}(t, \mathbf{x}) = \int_{-h}^h \sigma_{ij}(t, \mathbf{r}) dx_3 \quad (2.6)$$

$$F_{i3}(t, \mathbf{x}) = \int_{-h}^h \sigma_{i3}(t, \mathbf{r}) dx_3, \quad M_{ij}(t, \mathbf{x}) = \int_{-h}^h \sigma_{ij}(t, \mathbf{r}) x_3 dx_3; \quad i, j = 1, 2$$

$$\gamma_i(t, \mathbf{x}) \equiv \frac{8}{5} \varepsilon_{i3}^0(t, \mathbf{x}) - \partial_i w(t, \mathbf{x}); \quad i = 1, 2, \quad (2.7)$$

ρ_0 и ρ_k – объемные плотности материалов связующего и арматуры k -го семейства; ω_0 – относительное объемное содержание связующей матрицы в представительном элементе композиции; γ_i – традиционно вводимые для удобства новые кинематические переменные; σ_{ij} – осредненные напряжения в композиции искривленной панели; F_{ij} , F_{i3} и M_{ij} – внутренние силовые факторы; точка – производная по времени t . Внешние массовые силы в уравнениях (2.5) не учитываются.

Как уже отмечалось, для интегрирования формулируемой нелинейной задачи предполагается использовать явную численную схему, т.е. значения неизвестных функций будем вычислять в дискретные моменты времени t_n ($n = 0, 1, 2, \dots$). При этом считаем, что в моменты времени t_m уже определены величины следующих функций [17]:

$$\begin{aligned} w(\mathbf{x}) &\equiv w(t_m, \mathbf{x}), & u_l(\mathbf{x}) &\equiv u_l(t_m, \mathbf{x}), & \gamma_l(\mathbf{x}) &\equiv \gamma_l(t_m, \mathbf{x}), & \sigma_{ij}(\mathbf{r}) &\equiv \sigma_{ij}(t_m, \mathbf{r}) \\ \sigma_{33}^{(\pm)}(\mathbf{x}) &\equiv \sigma_{33}^{(\pm)}(t_m, \mathbf{x}), & \Theta(\mathbf{r}) &\equiv \Theta(t_m, \mathbf{r}), & \dot{\Theta}(\mathbf{r}) &\equiv \dot{\Theta}(t_{n-1}, \mathbf{r}), & \sigma_{ij}^{(k)}(\mathbf{r}) &\equiv \sigma_{ij}^{(k)}(t_m, \mathbf{r}) \\ \varepsilon_{ij}^{(k)}(\mathbf{r}) &\equiv \varepsilon_{ij}^{(k)}(t_m, \mathbf{r}), & \dot{\varepsilon}_{ij}^{(k)}(\mathbf{r}) &\equiv \dot{\varepsilon}_{ij}^{(k)}(t_{n-1}, \mathbf{r}), & \ddot{\varepsilon}_{ij}^{(k)}(\mathbf{r}) &\equiv \ddot{\varepsilon}_{ij}^{(k)}(t_{n-1}, \mathbf{r}) \\ \chi_k(\mathbf{r}) &\equiv \chi_k(t_m, \mathbf{r}); & l &= 1, 2, & i, j &= \overline{1, 3}, & m &= n-1, n \\ & & 0 \leq k \leq N, & \mathbf{x} \in \Omega, & |x_3| &\leq h, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где $\sigma_{ij}^{(k)}$ и $\varepsilon_{ij}^{(k)}$ – тензоры напряжений и деформаций в k -м компоненте композиции ($k = 0$ – связующая матрица, $k \geq 1$ – волокна k -го семейства); χ_k – параметр Одкивста (упрочнения) того же материала; Θ – температура КМ (пологой оболочки).

Определяющие уравнения термоупруговязкопластического деформирования армированного материала, пригодные для практического использования, получим на основе следующих предположений [29]:

1. В пределах представительного элемента КМ является макроскопически квазиоднородным телом. (При достаточно равномерном и густом наполнении связующего материала тонкими волокнами это допущение справедливо.)

2. Между связующей матрицей и волокнами имеет место идеальный термомеханический контакт.

3. В пределах представительного элемента, выделенного из КМ на миниуровне, напряжения, деформации и их скорости во всех компонентах и в композиции в целом кусочно-постоянны. Эффектами более высоких порядков, характеризующих локальные изменения полей напряжений, деформаций и их скоростей на микроуровне в малых окрестностях границ контакта связующего и волокон, пренебрегаем.

4. Поля деформаций, напряжений и их скоростей усредняем по объему репрезентативной ячейки КМ (т.е., согласно допущению 3, пропорционально ω_k , $0 \leq k \leq N$).

5. Материалы компонентов композиции являются однородными и изотропными; их пластическое течение ассоциировано с поверхностями нагружения, соответствующими условию текучести Мизеса и зависящими от параметров упрочнения, температуры и скоростей деформирования.

Повторяя на базе этих гипотез рассуждения из работы [17], получим, что в рассматриваемый дискретный момент времени t_n связь между скоростями осредненных напряжений $\dot{\sigma}_{ij}$, деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}$ и температурой композиции Θ можно записать в следующей матричной форме:

$$\overset{n}{\dot{\mathbf{c}}} = \mathbf{B} \overset{n}{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}} + \mathbf{p}; \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.9)$$

где

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= (\sigma_1 \ \sigma_2 \ \sigma_3 \ \sigma_4 \ \sigma_5 \ \sigma_6)^T \equiv (\sigma_{11} \ \sigma_{22} \ \sigma_{33} \ \sigma_{23} \ \sigma_{31} \ \sigma_{12})^T \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= (\varepsilon_1 \ \varepsilon_2 \ \varepsilon_3 \ \varepsilon_4 \ \varepsilon_5 \ \varepsilon_6)^T \equiv (\varepsilon_{11} \ \varepsilon_{22} \ \varepsilon_{33} \ 2\varepsilon_{23} \ 2\varepsilon_{31} \ 2\varepsilon_{12})^T \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= (p_1 \ p_2 \ p_3 \ p_4 \ p_5 \ p_6)^T \\ \mathbf{B} &\equiv \left(\omega_0 \mathbf{B}_0 + \sum_{k=1}^N \omega_k \mathbf{B}_k \mathbf{E}_k \right) \mathbf{H}^{-1}, \quad \mathbf{p} \equiv \mathbf{f} - \mathbf{B} \mathbf{g}, \quad \mathbf{f} \equiv \omega_0 \mathbf{p}_0 + \sum_{k=1}^N \omega_k \left(\mathbf{p}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{r}_k \right) \\ \mathbf{H} &\equiv \omega_0 \mathbf{I} + \sum_{k=1}^N \omega_k \mathbf{E}_k, \quad \mathbf{g} \equiv \sum_{k=1}^N \omega_k \mathbf{r}_k, \quad \mathbf{r}_k \equiv \mathbf{D}_k^{-1} \boldsymbol{\zeta}_k \\ \mathbf{E}_k &\equiv \mathbf{D}_k^{-1} \mathbf{C}_k, \quad \mathbf{B}_k \equiv \mathbf{Z}_k + \frac{2}{\Delta} \mathbf{Y}_k \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\mathbf{p}_k \equiv -\frac{2}{\Delta} \mathbf{Y}_k \overset{n}{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}_k + \frac{2}{\Delta} \left(\overset{n}{\Theta} - \overset{n-1/2}{\Theta} \right) \boldsymbol{\beta}_k, \quad \overset{n-1/2}{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}_k \equiv \overset{n-1}{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}_k + \frac{\Delta}{2} \overset{n-1}{\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}}_k, \quad \overset{n-1/2}{\Theta} \equiv \overset{n-1}{\Theta} + \frac{\Delta}{2} \overset{n-1}{\dot{\Theta}}$$

$$\mathbf{Z}_k = \bar{\mathbf{Z}}_k - G_k \bar{\bar{\mathbf{Z}}}_k, \quad \mathbf{Y}_k = \tau_H^{(k)} \bar{\bar{\mathbf{Z}}}_k,$$

Δ – шаг по времени; \mathbf{I} – единичная 6×6 -матрица; \mathbf{B} , \mathbf{B}_k , \mathbf{E}_k , \mathbf{C}_k , \mathbf{Z}_k , $\bar{\mathbf{Z}}_k$, $\bar{\bar{\mathbf{Z}}}_k$ и \mathbf{Y}_k – 6×6 -матрицы; \mathbf{D}_k^{-1} и \mathbf{H}^{-1} – матрицы, обратные 6×6 -матрицам \mathbf{D}_k и \mathbf{H} ; \mathbf{p} , \mathbf{f} , \mathbf{g} , \mathbf{r}_k , $\boldsymbol{\zeta}_k$, \mathbf{p}_k и $\boldsymbol{\beta}_k$ – шестикомпонентные векторы-столбцы; $\boldsymbol{\varepsilon}_k$ – шестикомпонентный вектор-столбец деформаций $\varepsilon_{ij}^{(k)}$ k -го компонента композиции, по структуре аналогичный вектору $\boldsymbol{\varepsilon}$ (см. выражения (2.10)). Ненулевые элементы матриц $\mathbf{C}_k = (c_{ij}^{(k)})$, $\mathbf{D}_k = (d_{ij}^{(k)})$, $\bar{\mathbf{Z}}_k = (\bar{z}_{ij}^{(k)})$, $\bar{\bar{\mathbf{Z}}}_k = (\bar{\bar{z}}_{ij}^{(k)})$ и вектор-столбцов $\boldsymbol{\zeta}_k = (\zeta_i^{(k)})$, $\boldsymbol{\beta}_k = (\beta_i^{(k)})$ вычисляются так:

$$c_{ij}^{(k)} = d_{ij}^{(k)} = q_{ij}^{(k)}, \quad c_{ij}^{(k)} = \sum_{l=1}^6 g_{il}^{(k)} b_{lj}^{(0)}, \quad d_{ij}^{(k)} = \sum_{l=1}^6 g_{il}^{(k)} b_{lj}^{(k)} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \zeta_1^{(k)} &= 0, \quad \zeta_i^{(k)} = \sum_{l=1}^6 g_{il}^{(k)} (p_l^{(0)} - p_l^{(k)}); \quad i = \overline{2, 6}, \quad j = \overline{1, 6}, \quad 1 \leq k \leq N \\ g_{11}^{(k)} &= q_{11}^{(k)} = l_{11}^{(k)} l_{11}^{(k)}, \quad g_{12}^{(k)} = q_{12}^{(k)} = l_{12}^{(k)} l_{12}^{(k)}, \dots, \quad g_{16}^{(k)} = 2q_{16}^{(k)} = 2l_{12}^{(k)} l_{11}^{(k)}, \dots \\ 2g_{61}^{(k)} &= q_{61}^{(k)} = 2l_{21}^{(k)} l_{11}^{(k)}, \dots, \quad g_{66}^{(k)} = q_{66}^{(k)} = l_{11}^{(k)} l_{22}^{(k)} + l_{12}^{(k)} l_{21}^{(k)}, \quad 1 \leq k \leq N \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\bar{\bar{z}}_{ij}^{(k)} = 2\delta_{ij} G_k + \lambda_k, \quad \bar{\bar{z}}_{ll}^{(k)} = G_k$$

$$\beta_i^{(k)} = \frac{K_\Theta^{(k)}}{3K_k} \sum_{m=1}^3 \sigma_{mm}^{(k)} + 3K_k \alpha_k + \frac{s_i^{(k)}}{G_k} \left[G_\Theta^{(k)} - \tau_s^{(k)} (\tau_s^{(k)} G_\Theta^{(k)} - \tau_\Theta^{(k)} G_k) A_k \right]$$

$$\beta_l^{(k)} = \frac{s_l^{(k)}}{G_k} \left[G_\Theta^{(k)} - \tau_s^{(k)} (\tau_s^{(k)} G_\Theta^{(k)} - \tau_\Theta^{(k)} G_k) A_k \right]$$

$$(i, j = \overline{1, 3}, l = \overline{4, 6}), \quad \bar{\bar{z}}_{ij}^{(k)} = A_k s_i^{(k)} s_j^{(k)} \quad (i, j = \overline{1, 6}), \quad A_k = \frac{\gamma_k G_k}{(G_k + \bar{G}_k) \tau_s^{(k)2}}$$

$$\begin{aligned}
K_{\Theta}^{(k)} &= \frac{dK_k}{d\Theta}, \quad G_{\Theta}^{(k)} = \frac{dG_k}{d\Theta}, \quad \tau_{\Theta}^{(k)} = \frac{\partial \tau_s^{(k)}}{\partial \Theta}, \quad \tau_H^{(k)} = \frac{\partial \tau_s^{(k)}}{\partial H_k}, \quad \bar{G}_k = \frac{\partial \tau_s^{(k)}}{\partial \chi_k} \\
\lambda_k &= \frac{\nu_k E_k}{(1 + \nu_k)(1 - 2\nu_k)}, \quad 2G_k = \frac{E_k}{1 + \nu_k}, \quad 3K_k = \frac{E_k}{1 - 2\nu_k} \\
\gamma_k &= \begin{cases} 0 & \text{при } T_k < \tau_s^{(k)} \quad \text{или} \quad T_k = \tau_s^{(k)}, \quad W_k \leq 0 \\ 1 & \text{при } T_k = \tau_s^{(k)}, \quad W_k > 0 \end{cases} \quad (2.14) \\
W_k &= G_k \mathbf{s}_k^T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k + \tau_s^{(k)} G_k^{-1} (\tau_s^{(k)} G_{\Theta}^{(k)} - \tau_{\Theta}^{(k)} G_k) \dot{\Theta} - 2\tau_s^{(k)} \tau_H^{(k)} H_k^{-1} \xi_k^T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k \\
T_k^2 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 s_i^{(k)2} + \sum_{i=4}^6 s_i^{(k)2}, \quad H_k^2 = 2 \sum_{i=1}^3 \xi_i^{(k)2} + 4 \sum_{i=4}^6 \xi_i^{(k)2}, \quad \chi_k = \int_{t_0}^{t_n} \sqrt{2 p_{ij}^{(k)} \dot{p}_{ij}^{(k)}} dt \\
\mathbf{s}_k &= (s_1^{(k)} \ s_2^{(k)} \ s_3^{(k)} \ s_4^{(k)} \ s_5^{(k)} \ s_6^{(k)})^T \equiv (s_{11}^{(k)} \ s_{22}^{(k)} \ s_{33}^{(k)} \ s_{23}^{(k)} \ s_{31}^{(k)} \ s_{12}^{(k)})^T \\
\xi_k &= (\xi_1^{(k)} \ \xi_2^{(k)} \ \xi_3^{(k)} \ \xi_4^{(k)} \ \xi_5^{(k)} \ \xi_6^{(k)})^T \equiv (\xi_{11}^{(k)} \ \xi_{22}^{(k)} \ \xi_{33}^{(k)} \ \xi_{23}^{(k)} \ \xi_{31}^{(k)} \ \xi_{12}^{(k)})^T \\
\xi_{ij}^{(k)} &= \dot{e}_{ij}^{(k)} + \dot{p}_{ij}^{(k)}, \quad s_{ij}^{(k)} = \sigma_{ij}^{(k)} - \frac{\delta_{ij}}{3} \sum_{m=1}^3 \sigma_{mm}^{(k)}, \quad \bar{e}_{ij}^{(k)} = e_{ij}^{(k)} - \frac{\delta_{ij}}{3} \sum_{m=1}^3 \varepsilon_{mm}^{(k)} \\
&(i, j = 1, 2, 3), \quad 0 \leq k \leq N,
\end{aligned}$$

где $e_{ij}^{(k)}$ и $p_{ij}^{(k)}$ – упругие и пластические деформации k -го материала композиции; $E_k = E_k(\Theta)$ и $\nu_k = \nu_k(\Theta)$ – модуль Юнга и коэффициент Пуассона того же компонента; $\alpha_k = \alpha_k(\Theta)$ – коэффициент линейного температурного расширения; $\tau_s^{(k)} = \tau_s^{(k)}(\chi_k, H_k, \Theta)$ – мгновенный предел текучести при чистом сдвиге, зависящий от уровня накопленной пластической деформации χ_k и значений интенсивности скорости деформаций H_k и температуры Θ в текущий момент времени t_n ; $p_l^{(k)}$ и $b_{ij}^{(k)}$ ($0 \leq k \leq N$) – элементы вектор-столбцов \mathbf{p}_k и матриц \mathbf{B}_k , определенных равенствами (2.10) и (2.11); γ_k – параметр переключения, определяющий при $\gamma_k = 0$ условия термоупругого деформирования, разгрузки или нейтрального нагружения, а при $\gamma_k = 1$ – активного нагружения при пластическом деформировании k -го материала композиции; индекс “Т” – операция транспонирования. По повторяющимся индексам k и l в выражениях (2.14) суммирование нет. В равенствах (2.14) опущен верхний индекс n , означающий рассматриваемый дискретный момент времени $t = t_n$. Между вектор-столбцами $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ и $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k$ (см. соотношения (2.9)–(2.11)) существует матричная связь [17]:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 = \mathbf{H}^{-1} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \mathbf{H}^{-1} \mathbf{g}, \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k = \mathbf{E}_k \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 + \mathbf{r}_k; \quad 1 \leq k \leq N \quad (2.15)$$

где матрицы \mathbf{H} , \mathbf{E}_k и вектор-столбцы \mathbf{g} , \mathbf{r}_k определены выражениями (2.11). Для материалов композиции выполняются определяющие соотношения, записанные в матричной форме [17]:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_k = \mathbf{B}_k \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k + \mathbf{p}_k; \quad 0 \leq k \leq N, \quad (2.16)$$

где $\dot{\sigma}_k$ – шестикомпонентный вектор-столбец скоростей напряжений $\dot{\sigma}_{ij}^{(k)}$ в k -й фазе композиции, по структуре аналогичный вектору σ в соотношениях (2.10); матрица \mathbf{B}_k и вектор \mathbf{p}_k определены равенствами (2.11).

Вектор-столбец $\dot{\epsilon}_k$ в соотношениях (2.14) необходимо выразить его конечно-разностным аналогом, используя формулу трапеций [17]:

$$\dot{\epsilon}_k^n = \frac{2}{\Delta} \left(\epsilon_k^n - \epsilon_k^{n-1/2} \right); \quad 0 \leq k \leq N, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

где последнее слагаемое определено в (2.11).

Не выписанные в соотношениях (2.13) элементы 6×6 -матриц $\mathbf{G}_k = (g_{ij}^{(k)})$ и $\mathbf{Q}_k = (q_{ij}^{(k)})$ представлены в табл. (21.40) и (21.44) в [29]. Эти матрицы \mathbf{G}_k и \mathbf{Q}_k задают преобразования векторов-столбцов $\dot{\sigma}_k$ и $\dot{\epsilon}_k$ (см. равенство (2.16)) при переходе от глобальной ортогональной системы координат x_j к локальной системе $x_i^{(k)}$ (см. рис. 2). Направляющие косинусы $l_{ij}^{(k)}$ ($i, j = \overline{1,3}, 1 \leq k \leq N$) между указанными осями вычисляются по формулам (2.1).

Согласно условиям соответствия (2.10), из третьего уравнения системы (2.9), линеаризованной по методу переменных параметров упругости [17, 30], выразим скорость поперечной деформации полой КМ-оболочки:

$$\dot{\epsilon}_{33}^n \equiv \dot{\epsilon}_3^n = \frac{1}{b_{33}} \left(\dot{\sigma}_3^n - \sum_{i=1}^6 (1 - \delta_{3i}) b_{3i}^n \dot{\epsilon}_i^n - p_3^n \right), \quad (2.17)$$

где b_{3i} и p_3 ($i = \overline{1,6}$) – элементы матрицы \mathbf{B} и вектора \mathbf{p} в равенстве (2.9); скорость $\dot{\sigma}_3$ получается из соотношения (2.4) дифференцированием по времени t . Производные $\dot{\epsilon}_i$ в правой части равенства (2.17) определяются путем дифференцирования по t кинематических соотношений (2.3), т.е. характеризуются двумерными функциями w, \dot{w}, \dot{u}_i и $\dot{\epsilon}_{i3}^0$ ($i = 1, 2$).

Как и в [17], температуру Θ аппроксимируем по толщине искривленной панели полиномом порядка L :

$$\Theta(t, \mathbf{r}) - \Theta^0 = \sum_{l=0}^L \Theta_l(t, \mathbf{x}) x_3^l; \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0, \quad (2.18)$$

где $\Theta^0 = \text{const}$ – температура естественного состояния конструкции; Θ_l – искомые двумерные функции, зависящие и от времени t .

Согласно известным экспериментальным данным [10, 18], удельную теплоемкость k -го материала композиции c_k вполне допустимо представить полиномом второго порядка от температуры:

$$c_k(\Theta - \Theta^0) = c_0^{(k)} + c_1^{(k)}(\Theta - \Theta^0) + c_2^{(k)}(\Theta - \Theta^0)^2; \quad 0 \leq k \leq N, \quad (2.19)$$

где $c_l^{(k)}$ ($l = \overline{0,2}$) – известные коэффициенты.

Так как метрику в полой оболочке с приемлемой для практических приложений точностью можно отождествить с метрикой в декартовой прямоугольной системе координат [23], используя результаты работы [17], в качестве разрешающих двумерных уравнений теплофизической составляющей рассматриваемой задачи, соответствующих разложению (2.18), получим равенства

$$\rho \dot{U}^{(m)} = -\partial_1 Q_1^{(m)} - \partial_2 Q_2^{(m)} - \bar{Q}_3^{(m)} + W^{(m)}; \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \geq t_0, \quad 0 \leq m \leq L - 2 \quad (2.20)$$

$$-\sum_{l=0}^L (-1)^l h^{l-1} (l\lambda_{33}^{(-)} + h\alpha^{(-)}) \Theta_l(t, \mathbf{x}) = \alpha^{(-)} (\Theta_\infty^{(-)} - \Theta^0) + q_\infty^{(-)}(t, \mathbf{x}) \quad (2.21)$$

$$\sum_{l=0}^L h^{l-1} (l\lambda_{33}^{(+)} + h\alpha^{(+)}) \Theta_l(t, \mathbf{x}) = \alpha^{(+)} (\Theta_\infty^{(+)} - \Theta^0) - q_\infty^{(+)}(t, \mathbf{x}); \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \geq t_0$$

$$C_0 \sum_{i=0}^L H(i+m) \Theta_i + \frac{C_1}{2} \sum_{i=0}^L \sum_{j=0}^L H(i+j+m) \Theta_i \Theta_j +$$

$$+ \frac{C_2}{3} \sum_{i=0}^L \sum_{j=0}^L \sum_{l=0}^L H(i+j+l+m) \Theta_i \Theta_j \Theta_l = U^{(m)}(t, \mathbf{x}) \quad (2.22)$$

$$\mathbf{x} \in \Omega, \quad t \geq t_0, \quad 0 \leq m \leq L-2,$$

где

$$U^{(m)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h U(t, \mathbf{r}) x_3^m dx_3, \quad Q_i^{(m)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h q_i(t, \mathbf{r}) x_3^m dx_3 \quad (i = \overline{1,3})$$

$$\bar{Q}_3^{(m)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h \partial_3 q_3(t, \mathbf{r}) x_3^m dx_3 = h^m [q_3^{(+)} - (-1)^m q_3^{(-)}] - m Q_3^{(m-1)}(t, \mathbf{x}) \quad (2.23)$$

$$W^{(m)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} x_3^m dx_3, \quad C_l(\mathbf{x}) \equiv \frac{1}{\rho} \sum_{k=0}^N c_l^{(k)} \rho_k \omega_k(\mathbf{x}) \quad (l = 0, 1, 2)$$

$$H(s) \equiv \frac{h^{s+1}}{s+1} [1 - (-1)^{s+1}], \quad \lambda_{33}^{(\pm)} \equiv \lambda_{33}|_{\Theta=\Theta(t, \mathbf{x}, \pm h)}, \quad q_3^{(\pm)} \equiv q_3(t, \mathbf{x}, \pm h) = q_\infty^{(\pm)},$$

U – удельная внутренняя энергия материала конструкции; q_i – компоненты вектора теплового потока в КМ, связанные с $\text{grad } \Theta$ законом Фурье для волокнистого материала (см. соотношения (3.1) и (3.2) в [17]); $q_\infty^{(\pm)}$ – заданные тепловые потоки через верхнюю (+) и нижнюю (–) лицевые поверхности оболочки; $\Theta_\infty^{(\pm)}$ – температуры окружающей среды со стороны тех же поверхностей; $\alpha^{(\pm)}$ – коэффициенты теплоотдачи на тех же поверхностях; λ_{33} – коэффициент теплопроводности композиции в направлении x_3 , определяемый по структурным формулам (3.2) и (3.3) из [17]; ρ задано первым выражением в (2.6).

Приведенные двумерные уравнения (2.20) при учете выражений (2.23) получены из трехмерного уравнения теплового баланса методом взвешенных невязок; при этом в качестве весовых функций использовались однородные полиномы x_3^m . Равенства (2.21) – это тепловые граничные условия на лицевых поверхностях искривленной КМ-панели, преобразованные с учетом разложения для температуры (2.18). Уравнения (2.22) задают связь между двумерными функциями $U^{(m)}$ (см. формулу (2.23)) и коэффициентами представления (2.18) при учете аппроксимаций (2.19).

Для завершения постановки задачи термоупруговязкопластического деформирования искривленной КМ-панели к уравнениям (2.3), (2.5) и (2.9) необходимо присоединить общеизвестные силовые (выраженные через силовые факторы F_{ij} , F_{i3} и M_{ij} , $i, j = 1, 2$) и кинематические граничные условия, а также начальные условия для неизвестных функций w , u_i и ε_{i3}^0 , $i = 1, 2$ (см. выражения (2.7)) [23]. Кроме того, для однозначного определения функций Θ_l ($0 \leq l \leq L$) в разложении (2.18) нужно использовать соответствующие теплофизические граничные условия, которые также получаются методом взвешенных невязок и при учете выражений (2.18) и (2.23) имеют вид [17]:

$$Q_1^{(m)} n_1 + Q_2^{(m)} n_2 - \alpha_* \sum_{l=0}^L H(l+m) \Theta_l = -\alpha_* H(m) (\Theta_\infty^* - \Theta^0) + Q_\infty^{(m)}(t, \mathbf{x}) \quad (2.24)$$

$$\mathbf{x} \in \Gamma, \quad t \geq t_0, \quad 0 \leq m \leq L-2,$$

где

$$Q_\infty^{(m)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h q_\infty^*(t, \mathbf{r}) x_3^m dx_3; \quad 0 \leq m \leq L-2,$$

n_1, n_2 – направляющие косинусы внешней нормали к контуру Γ , ограничивающему область Ω ; $\alpha_*, \Theta_\infty^*, q_\infty^*$ имеют тот же смысл, что и аналогичные величины в соотношениях (2.21), только на торцевой поверхности конструкции.

Для интегрирования уравнений (2.20) по времени необходимо задать начальные значения для функций $U^{(m)}$ при $t = t_0$. Эти значения получаются из равенств (2.22) при подстановке в них функций $\Theta_l(t_0, \mathbf{x})$ ($0 \leq l \leq L$), полученных из разложения (2.18) заданной начальной температуры $\Theta(t_0, \mathbf{x})$ КМ-оболочки.

Как и в [17], заменим вторые производные по t от неизвестных функций в левых частях уравнений (2.5) их конечно-разностными аналогами на трехточечном шаблоне $\{t_{n-1}, t_n, t_{n+1}\}$, тогда с учетом обозначений, аналогичных (2.8) получим

$$\begin{aligned} \frac{2h\rho}{\Delta^2} \left(w^{n+1} - 2w^n + w^{n-1} \right) &= \sum_{i=1}^2 \left[\partial_i \left(F_{i3}^n + \sum_{j=1}^2 F_{ij}^n \partial_j w^n \right) + R_i^{-1} F_{ii}^n \right] + \sigma_{33}^{n(+)} - \sigma_{33}^{n(-)} \\ \frac{2h\rho}{\Delta^2} \left(u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1} \right) &= \sum_{j=1}^2 \partial_j \left(F_{ij}^n - F_{j3}^n \partial_i w^n \right) + R_i^{-1} F_{i3}^n - \left(\sigma_{33}^{n(+)} - \sigma_{33}^{n(-)} \right) \partial_i w^n \\ \frac{2h^3\rho}{3\Delta^2} \left(\gamma_i^{n+1} - 2\gamma_i^n + \gamma_i^{n-1} \right) &= \sum_{j=1}^2 \partial_j M_{ij}^n - F_{i3}^n; \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad i = 1, 2, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (2.25)$$

По формулам (2.6) при учете предположений (2.8) в текущий дискретный момент времени t_n можно определить все внутренние силовые факторы и внешние силы $\sigma_{33}^{n(\pm)}$, входящие в правые части уравнений (2.25). Следовательно, из этих равенств при учете соответствующих граничных условий [23] по явной схеме можно вычислить значения

искомых функций w^{n+1}, u_i^{n+1} и γ_i^{n+1} в следующий момент времени t_{n+1} . Затем, используя выражения (2.7), можно получить и значения деформаций ε_{i3}^{n+1} ($i = 1, 2$), определяющих совместно с w^{n+1} и u_i^{n+1} перемещения точек конструкции и усредненные деформации композиции (см. соотношения (2.2) и (2.3)).

Предполагаем, что помимо функций, указанных в равенствах (2.8), при $t = t_m$ дополнительно известны значения и таких функций [17] (см. соотношения (2.18), (2.21) и (2.23)):

$$\begin{aligned} \Theta_l^m(\mathbf{x}) &\equiv \Theta_l(t_m, \mathbf{x}), \quad \dot{\Theta}_l^{n-1}(\mathbf{x}) \equiv \dot{\Theta}_l(t_{n-1}, \mathbf{x}), \quad U^{(j)n}(\mathbf{x}) \equiv U^{(j)}(t_n, \mathbf{x}) \\ q_i^n(\mathbf{r}) &\equiv q_i(t_n, \mathbf{r}), \quad q_\infty^{(\pm)n}(\mathbf{x}) \equiv q_\infty^{(\pm)}(t_n, \mathbf{x}), \quad \Theta_\infty^{(\pm)n}(\mathbf{x}) \equiv \Theta_\infty^{(\pm)}(t_n, \mathbf{x}) \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$i = \overline{1, 3}, \quad m = n-1, n, \quad 0 \leq j \leq L-2, \quad 0 \leq l \leq L, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad |x_3| \leq h$$

Для численного интегрирования теплофизической составляющей рассматриваемой связанной задачи также используем явную схему, но на двухточечном шаблоне по времени $\{t_n, t_{n+1}\}$. Заменяв производные по t в левых частях равенств (2.20) их конечными разностями и учитывая обозначения, аналогичные (2.26), получим уравнения

$$\frac{\rho}{\Delta} \left(U^{(m)} - U^{(m)} \right) = -\partial_1 Q_1^{(m)} - \partial_2 Q_2^{(m)} - \bar{Q}_3^{(m)} + W^{(m)} \quad (2.27)$$

$$\mathbf{x} \in \Omega, \quad 0 \leq m \leq L-2, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Используя выражения (2.23) и принимая во внимание предположения (2.26), в текущий момент времени t_n можем вычислить правые части в уравнениях (2.27). Затем, учитывая тепловые граничные (2.24) и начальные температурные условия, из ра-

венств (2.27) по явной схеме определяем значения функций $U^{(m)}$ на следующем шаге по времени t_{n+1} . После этого при $t = t_{n+1}$ из уравнений (2.21) и (2.22), в которых правые части уже известны, при учете соотношений (2.23) получаем коэффициенты разложения температуры $\Theta_l(\mathbf{x})$ (см. формулу (2.18)). В случае термочувствительных материалов фаз композиции, когда в разложении (2.19) $c_1^{(k)} \neq 0$ и/или $c_2^{(k)} \neq 0$ ($0 \leq k \leq N$), система уравнений (2.21) и (2.22) является нелинейной относительно функций Θ_l ($0 \leq l \leq L$). Линеаризовать уравнения (2.22) можно, используя, например, метод переменных теплофизических параметров, формально аналогичный методу переменных параметров упругости [30]. В остальном разработанный численный метод интегрирования рассматриваемой задачи термоупруговязкопластического динамического деформирования пологих КМ-оболочек при учете равенств (2.3), (2.4), (2.17) и структурных соотношений (2.9), (2.15) и (2.16) реализуется так, как подробно описано в [17], где было показано, что шаг интегрирования по времени Δ в уравнениях (2.25) и (2.27) нужно выбирать, исходя из необходимого условия устойчивости Куранта–Фридрихса–Леви [5, 31].

3. Обсуждение результатов расчетов. Исследуем термоупруговязкопластический динамический изгиб относительно тонких пологих цилиндрических КМ-оболочек ($\Omega: |x_1| \leq a, |x_2| \leq b, a = 3b; 1/R_1 \equiv 0, R_2 \equiv R = \text{const}; 2h = 2 \text{ см}, b = 50 \text{ см}$), стрела подъема которых f над продольными (в направлении x_1) кромками равна 10 см. При этом радиус кривизны КМ-панелей вычисляется так: $R = (b^2 + f^2)/(2f)$. В рассматриваемом случае $0 < f < 0.4b$, поэтому оболочки действительно являются пологими [23]. Кромки конструкций жестко закреплены: $w = 0, u_i = 0$ и $\gamma_i = 0, \mathbf{x} \in \Gamma, t \geq t_0$ (см. выражения (2.2) и (2.7)). До начального момента времени $t = t_0 = 0$ искривленные КМ-панели покоятся ($w = 0, u_i = 0$ и $\gamma_i = 0, \mathbf{x} \in \Omega, t \leq t_0, i = 1, 2$) при температуре естественного состояния $\Theta = \Theta^0 = 20^\circ\text{C}$ ($\mathbf{x} \in \Omega, |x_3| \leq h$ и $t \leq t_0$). При $t = t_0 = 0$ конструкции нагружаются избыточным давлением $p(t)$, которое порождается воздушной взрывной волной [28]:

$$\sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)} \equiv p(t) = \begin{cases} p_{\max} t/t_{\max}, & 0 \leq t \leq t_{\max} \\ p_{\max} \exp[-\beta(t - t_{\max})], & t > t_{\max}, \end{cases} \quad (3.1)$$

где

$$\beta = -\ln(0.01)/(t_{\min} - t_{\max}) > 0; \quad t_{\min} \gg t_{\max}, \quad (3.2)$$

t_{\max} – момент времени, при котором $p(t)$ достигает наибольшего по модулю значения $|p_{\max}|$; t_{\min} – момент времени, при котором уже можно пренебречь $|p(t)|$ по сравнению с $|p_{\max}|$ (в частности, выражение (3.2) справедливо при $p(t_{\min}) = 0.01p_{\max}$). На основании данных экспериментов [28] в расчетах примем $t_{\max} = 0.1$ мс и $t_{\min} = 2$ мс. Из соотношений (3.1) вытекает: при $p_{\max} > 0$ пологие оболочки нагружаются со стороны нижней (вогнутой) лицевой поверхности (при этом предполагается, что $\sigma_{33}^{(+)} \equiv 0$), а при $p_{\max} < 0$ – со стороны верхней (выпуклой) лицевой поверхности (при этом считаем, что $\sigma_{33}^{(-)} \equiv 0$).

Известно, что при нарастании внешней динамической нагрузки до максимального ее значения за время, меньшее 0.1 мкс, в КМ-конструкциях возникают откольные явления и расслоения [7]. Так как в рассматриваемом случае нагружения $t_{\max} = 0.1$ мс \gg 0.1 мкс, материал искривленных панелей остается сплошным, и вполне обоснованно применимы допущения, использованные в разд. 2.

Теплообмен КМ-панелей с окружающей средой на лицевых поверхностях происходит в условиях естественной конвекции ($\alpha^{(\pm)} = 30$ Вт/(м² К) [32] и $q_{\infty}^{(\pm)} \equiv 0$) при температуре воздуха $\Theta_{\infty}^{(\pm)} = \Theta^0$ (см. равенства (2.21)). На торцевых поверхностях тонкостенных конструкций задана температура, которая поддерживается равной Θ^0 (см. формулу (2.24) при $\alpha_* \rightarrow \infty$ и $\Theta_{\infty}^* = \Theta^0$).

Оболочки выполнены из эпоксидной смолы [9] и армированы стеклянными волокнами [10] (стеклопластик) или из магниевое сплава ВТ65 [18] и усилены стальной проволокой марки У8А [10] (металлокомпозиция). Уругопластическое деформирование компонентов композиций при постоянстве температуры Θ и скорости деформаций $\dot{\epsilon}$ определяется диаграммой с линейным упрочнением

$$\sigma = \begin{cases} E_k \epsilon, & |\epsilon| \leq \epsilon_s^{(k)} = \sigma_s^{(k)} / E_k \\ \text{sign}(\epsilon) \sigma_s^{(k)} + E_s^{(k)} (\epsilon - \text{sign}(\epsilon) \epsilon_s^{(k)}); & |\epsilon| > \epsilon_s^{(k)}, \quad 0 \leq k \leq N, \end{cases}$$

где σ и ϵ – осевое напряжение и соответствующая ему деформация при растяжении–сжатии; $E_s^{(k)} = E_s^{(k)}(\Theta, \dot{\epsilon})$ – модуль упрочнения k -го материала композиции; $\sigma_s^{(k)} = \sigma_s^{(k)}(\Theta, \dot{\epsilon})$ – условный предел текучести того же материала. Физико-механические характеристики компонентов композиций представлены в табл. 1, где в скобках указана температура $(\Theta, \text{°C})$, при которой определено значение соответствующей величины. Во второй и третьей частях табл. 1 (для скоростей деформаций $\dot{\epsilon} = 0.417$ с⁻¹ и $\dot{\epsilon} = 104$ с⁻¹) представлены только те значения характеристик, которые отличаются от данных, приведенных в первой части (для $\dot{\epsilon} = 5 \times 10^{-4}$ с⁻¹). Как и в [17], предполагается: в рассматриваемом диапазоне изменения скорости деформации $\dot{\epsilon}$ можно пренебречь зависимостью упругих и теплофизических характеристик материалов композиции от $\dot{\epsilon}$ [18, 19]. В расчетах зависимости физико-механических характеристик от температуры Θ аппроксимировались линейно по данным, указанным в табл. 1, а аппроксимации зависимостей характеристик пластичности материалов от скорости деформирования $\dot{\epsilon}$ принимались такими же, как в [17].

Для реализации разработанного в разд. 1 численного метода по пространственным переменным x_1 и x_2 вводилась регулярная сетка с шагами $\Delta x_1 = \Delta x_2 = b/50 = 1$ см; шаг по времени Δ задавался равным 0.25 мкс. При такой дискретизации рассматриваемых задач необходимые условия устойчивости построенной конечно-разностной схемы выполняются с запасом (см. формулы (6.3) в [17]).

Таблица 1. Физико-механические характеристики компонентов композиций [9, 10, 18]

Характеристика материала	Эпоксидная смола	Стекланные волокна	Магнийевый сплав ВМ65 (Mg)	Стальная проволока У8А
$\dot{\epsilon} = 5 \times 10^{-4} \text{ c}^{-1}$				
ρ , кг/м ³	1210.0 (20)	2520.0 (20)	1800.0 (20)	7800.0 (20)
	1208.0 (40)	2519.6 (80)	1796.2 (100)	7791.8 (100)
E , ГПа	2.8 (20)	86.8 (20)	43.0 (20)	210.0 (20)
	2.3 (40)	86.3 (80)	38.5 (100)	195.0 (100)
ν	0.330 (20)	0.250 (20)	0.330 (20)	0.300 (20)
	0.333 (40)	0.254 (80)	0.334 (100)	0.305 (100)
σ_s , МПа	20 (20)	4500 (20)	267 (20)	3968 (20)
	18 (40)	4400 (80)	219 (100)	3971 (200)
E_s , ГПа	1.114 (20)	6.230 (20)	0.379 (20)	6.973 (20)
	0.783 (40)	5.168 (80)	0.367 (100)	5.014 (200)
λ , Вт/(м К)	0.243 (20)	0.89 (20)	117.23 (20)	42.7 (20)
	0.240 (40)	0.86 (80)	121.42 (100)	41.7 (100)
$\alpha \times 10^6$, К ⁻¹	68.1 (20)	2.5 (20)	20.9 (20)	12.3 (20)
	70.3 (40)	2.6 (80)	22.6 (100)	13.2 (100)
c , кДж/(кг К)	1.54 (20)	0.800 (20)	1.032 (20)	0.485 (20)
	1.60 (40)	0.839 (80)	1.054 (100)	0.488 (100)
$\dot{\epsilon} = 0.417 \text{ c}^{-1}$				
σ_s , МПа	—	—	306 (20)	—
	—	—	243 (100)	—
E_s , ГПа	—	—	0.589 (20)	—
	—	—	0.596 (100)	—
$\dot{\epsilon} = 104.0 \text{ c}^{-1}$				
σ_s , МПа	22.0 (20)	4600 (20)	385 (20)	4100 (20)
	19.5 (40)	4550 (80)	340 (100)	4075 (200)
E_s , ГПа	1.238 (20)	6.314 (20)	1.010 (20)	7.035 (20)
	0.853 (40)	5.458 (80)	0.625 (100)	6.158 (200)

Пологие оболочки усилены двумя семействами волокон ($N = 2$), уложенных в направлениях x_1 и x_2 соответственно (как изображено на рис. 1) с плотностями армирования $\omega_1 = 0.1$ и $\omega_2 = 0.3$. Углы армирования для такой плоской структуры, согласно рис. 2, имеют значения: $\theta_1 = \theta_2 = \pi/2$, $\varphi_1 = 0$ и $\varphi_2 = \pi/2$ (см. соотношения (2.1)).

Чтобы выяснить вопрос о выборе значения L в формуле (2.18), при котором обеспечивалась бы приемлемая для практических расчетов точность определения температуры Θ , исследуем зависимости от L наибольших значений $\Theta_{\max}(L) = \max_{t,r} \Theta(t, r; L)$ ($|x_1| \leq a$, $|x_2| \leq b$, $|x_3| \leq h$ и $0 \leq t \leq 50$ мс). На рис. 3 представлены эти зависимости для стеклопластиковой КМ-панели (рис. 3,а), полученные при $|p_{\max}| = 8$ МПа (см. выражения (3.1) и (3.2)), и для Mg–У8А-оболочки (рис. 3,б) при $|p_{\max}| = 30$ МПа. При указанных значениях $|p_{\max}|$ в рассматриваемых конструкциях наблюдается пластическое деформирование компонентов композиции. Значению $L = 0$ на рис. 3 соответствуют

случаи, когда тепловой отклик в пологих КМ-оболочках не учитывается, поэтому условно принято $\Theta_{\max}(0) = \Theta^0 = 20^\circ\text{C}$. Сплошные кривые на рис. 3 рассчитаны при учете зависимости пластических свойств материалов композиции от скорости их деформирования (от величины H_k в соотношениях (2.14)), а штриховые кривые, номера которых помечены штрихом, – без учета этой зависимости (термоупругопластическое деформирование). В последнем случае расчеты проводились по данным первой части табл. 1 (при значении $\dot{\epsilon} = 5 \times 10^{-4} \text{ c}^{-1}$). Кривые 1 и 1' получены при нагружении КМ-панелей снизу – со стороны вогнутой лицевой поверхности ($p_{\max} > 0$), а кривые 2 и 2' – при нагружении сверху – со стороны выпуклой лицевой поверхности ($p_{\max} < 0$).

Анализ поведения кривых на рис. 3 показывает, что приращение величины Θ_{\max} при переходе от $L = 6$ к $L = 7$ можно считать практически пренебрежимо малым. При $L \geq 8$ система линеаризованных уравнений (2.21) и (2.22), из которой при учете соотношений (2.23) в текущий момент времени вычисляются коэффициенты в представлении температуры (2.18), становится плохо обусловленной, поэтому зависимости $\Theta_{\max}(L)$ при $L \geq 8$ являются расходящимися и на рис. 3 не изображены. (Этот результат качественно совпадает с полученным ранее для КМ-пластин разной относительной толщины [17].) Далее в расчетах принимаем $L = 7$.

На рис. 4 изображены осцилляции наибольших значений температуры $\Theta_m(t) = \max_{\mathbf{r}} \Theta(t, \mathbf{r})$ ($|x_1| \leq a$, $|x_2| \leq b$ и $|x_3| \leq h$) в стеклопластиковой полой оболочке, нагруженной снизу (рис. 4,а) давлением $p_{\max} = 8$ МПа и сверху: $p_{\max} = -8$ МПа (рис. 4,б). Сплошные кривые 1 на рис. 4 рассчитаны по термоупруговязкопластической теории, а штриховые кривые 2 – термоупругопластической теории. Сравнение поведения кривых 1 и 2 на рис. 4 показывает, что расчеты, выполненные по термоупруговязкопластической (кривые 1) и по термоупругопластической (кривые 2) моделям деформирования компонентов композиции искривленных панелей при их динамическом поперечном нагружении, приводят к существенно разным температурным откликам. При этом указанные теории деформирования предсказывают разные значения достигаемого максимума температуры $\Theta_{\max} = \max_{t \geq t_0} \Theta_m(t)$. Так, при нагружении стеклопластиковой панели снизу, согласно поведению кривой 1 на рис. 4,а, значение $\Theta_{\max} = 34.5^\circ\text{C}$ при учете чувствительности фазовых материалов к скорости их деформирования и $\Theta_{\max} = 33.2^\circ\text{C}$ (см. кривую 2 на рис. 4,а) при неучете этой чувствительности. Оба указанных значения достигаются в один и тот же момент времени $t \approx 2.4$ мс и в данном случае различаются незначительно (менее, чем на 1.5°C). Однако уже в случае нагружения полой оболочки из стеклопластика сверху (см. рис. 4,б) такое различие становится более существенным, причем значения Θ_{\max} , полученные по термоупруговязкопластической и термоупругопластической теориям, достигаются в разные моменты времени. А именно: согласно поведению кривой 1 на рис. 4,б, значение $\Theta_{\max} = 50.8^\circ\text{C}$ достигается при $t \approx 13.6$ мс, а на кривой 2 глобальный максимум со значением $\Theta_{\max} = 54.3^\circ\text{C}$ реализуется при $t \approx 6$ мс. Таким образом, расчеты, выполненные без учета зависимости пластических свойств материалов композиции от скорости их деформирования, занижают расчетное значение Θ_{\max} при нагружении стеклопластиковой искривленной панели снизу (см. рис. 4,а), и, наоборот, завышают это значение при нагружении такой конструкции сверху (см. рис. 4,б). Для сравнения напомним: согласно результатам работы [17], аналогичная стеклопластиковая пластина с теми же характерными размерами и с такой же структурой армирования при $p_{\max} = \pm 4$ МПа нагревается практически до таких же значений Θ_{\max} , что и полая оболочка, нагру-

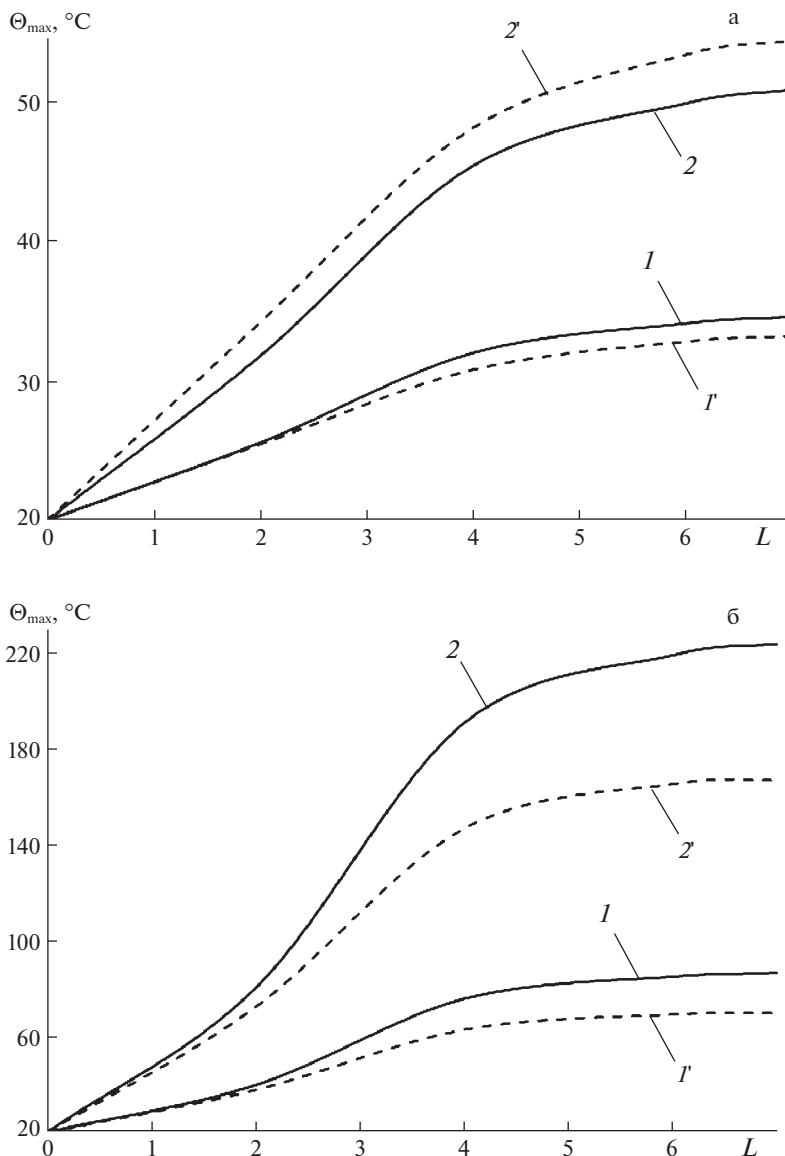


Рис. 3. Зависимости максимальных значений температуры от порядка аппроксимирующего полинома в стеклопластиковой (а) и металлокомпозитной (б) искривленных панелях.

женная снизу (см. рис. 4,а). Однако эти значения существенно меньше тех, что достигаются при нагружении искривленной панели сверху (см. рис. 4,б).

На рис. 5 изображены аналогичные зависимости $\Theta_m(t)$, полученные для металлокомпозитной полой оболочке, нагруженной снизу при $p_{\max} = 30$ МПа (рис. 5,а) и сверху при $p_{\max} = -30$ МПа (рис. 5,б). Номера кривых на рис. 5 имеют тот же смысл, что и на рис. 4. Поведение кривых 1 и 2 на рис. 5 различается в еще большей степени,

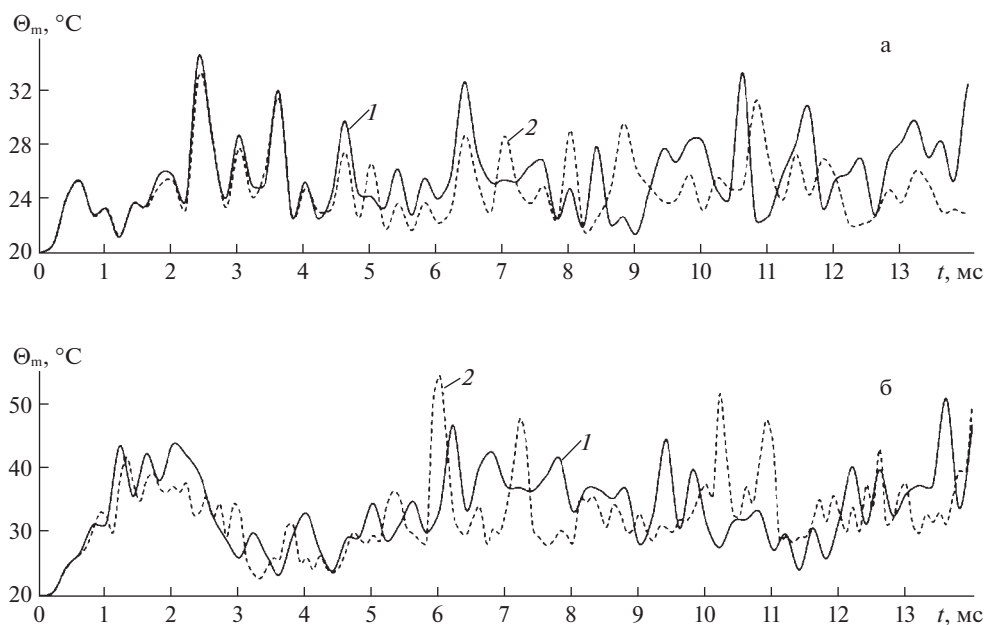


Рис. 4. Зависимости от времени наибольших значений температуры в стеклопластиковой искривленной панели, нагруженной снизу (а) и сверху (б).

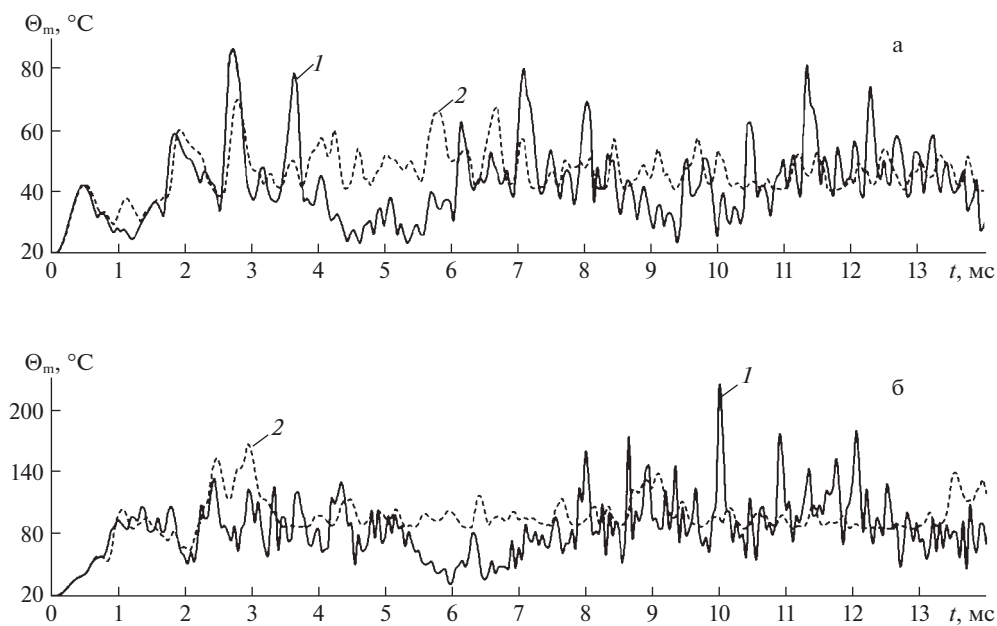


Рис. 5. Зависимости от времени наибольших значений температуры в металлокомпозитной искривленной панели, нагруженной снизу (а) и сверху (б).

чем на рис. 4. Объясняется это тем, что пластические свойства связующего рассматриваемой металлокомпозиции сильно чувствительны к изменению скорости его деформирования, а компоненты стеклопластиковой композиции относительно слабо чувствительны к изменению этой скорости (см. табл. 1).

Сравнение кривых с одинаковыми номерами на рис. 4,а, 4,б и 5,а, 5,б соответственно показывает, что при практически одинаковых уровнях максимальных значений интенсивностей деформаций компонентов композиций, достигаемых в процессе поперечных осцилляций оболочек, металлокомпозитные искривленные панели (как и в случае пластин [17]) нагреваются в значительно большей степени, чем стеклопластиковые. Так, согласно поведению кривых на рис. 5,б, в отдельных точках пологой Mg–У8А-оболочки, нагруженной сверху, температура может превышать 100°C. Однако резкий интенсивный нагрев отдельных точек такой конструкции является кратковременным и длится менее 1 мс.

Согласно поведению кривой 2 на рис. 3,б (при $L = 7$) и кривой 1 на рис. 5,б, для Mg–У8А-панели, нагруженной воздушной взрывной волной сверху, пиковые значения температуры могут превышать 200°C. По оценкам же, приведенным в [33], при ударном нагружении металлических образцов в областях локализованной пластической деформации температура может достигать 1000 К и выше. Как видно из предыдущего анализа, максимальные значения температуры для металлокомпозитной полой оболочки уже сопоставимы с этими оценками.

В [17] было показано, что динамический неупругий расчет стеклопластиковых пластин можно проводить без учета температуры в них (в силу незначительного их нагрева – не более, чем на 13°C). Расчеты же, выполненные по формулам данной работы, демонстрируют необходимость учета теплового отклика в полых стеклопластиковых оболочках, нагружаемых воздушной взрывной волной. Так, на рис. 6 изображены поперечные колебания центральной точки искривленной панели из стеклопластика ($w_0(t) \equiv w(t, 0, 0)$), определенные при значениях $p_{\max} = 8$ МПа (рис. 6,а) и $p_{\max} = -8$ МПа (рис. 6,б). Кривые 1 и 2 на рис. 6 рассчитаны при тех же условиях, что и на рис. 4, а пунктирные кривые I приведены для сравнения и соответствуют упруговязкопластическому расчету, при котором изменение температурного поля в КМ-панели не учитывается. Поведение кривых 1 и I на рис. 6 демонстрирует, что с течением времени зависимости $w_0(t)$, полученные с учетом и без учета теплового отклика в стеклопластиковой полой оболочке, все более различаются, особенно при ее нагружении со стороны выпуклой лицевой поверхности (см. рис. 6,б). Аналогичное сравнение кривых 1 и 2 на рис. 6 показывает, что зависимости $w_0(t)$ для рассматриваемой КМ-конструкции, рассчитанные с учетом и без учета чувствительности пластических свойств компонентов ее композиции к скорости их деформирования, с течением времени также все более различаются.

Согласно поведению кривых 1 на рис. 6,а и 6,б, максимальный по модулю прогиб искривленной стеклопластиковой панели достигается после ее прощелкивания вниз – в сторону вогнутой лицевой поверхности (вследствие динамической неустойчивости конструкции), которое наступает после прекращения действия внешней нагрузки (см. выражения (3.1) и (3.2) при $t > t_{\min} = 2$ мс). Так, на кривой 1 рис. 6,а наибольший по модулю прогиб $w_{\max} \equiv \max_{t \geq t_0} |w_0(t)| = 6.22$ см реализуется при $t \approx 2.4$ мс, а для кривой 1 на рис. 6,б $w_{\max} = 12.46$ см, который достигается при $t \approx 15$ мс $\gg t_{\min}$. Следовательно, при нагружении искривленной панели из стеклопластика со стороны ее выпуклой лицевой поверхности наблюдается прощелкивание (причем не на первой осцилляции) вдвое большей амплитуды, чем при ее нагружении со стороны вогнутой лицевой поверхности. Это приводит к тому, что максимальные значения интенсивности деформаций фазовых материалов композиции такой оболочки в первом случае

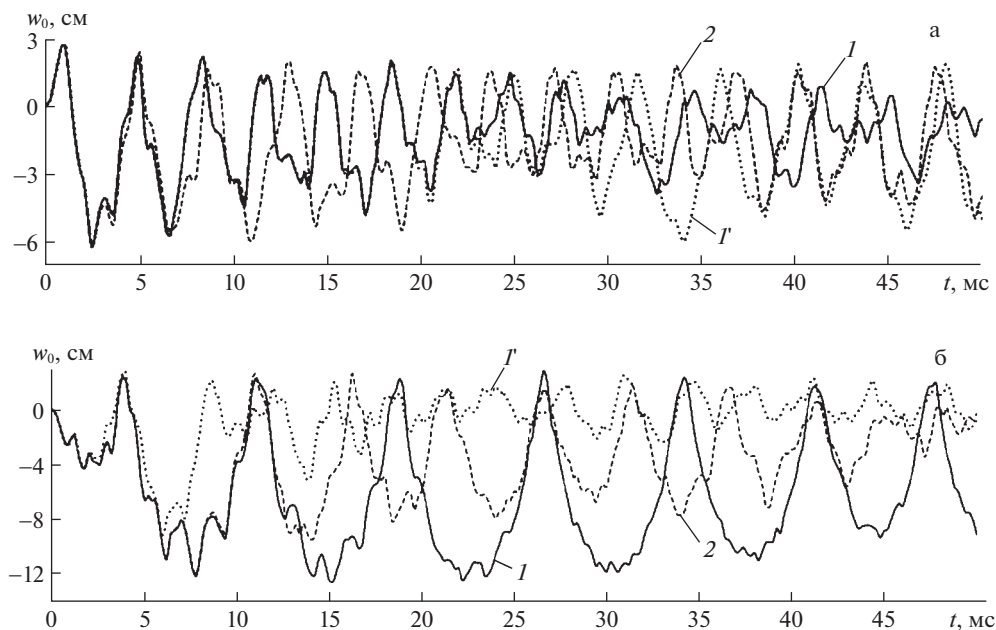


Рис. 6. Осцилляции прогиба центральной точки стеклопластиковой искривленной панели, нагруженной снизу (а) и сверху (б).

оказываются на 20–40% больше, чем во втором. Поэтому в процессе осцилляций искривленная стеклопластиковая панель, нагруженная сверху, нагревается значительно больше (см. рис. 4,б), чем при нагружении снизу (см. рис. 4,а). Расчеты показывают, что максимальные значения температуры в пологих КМ-оболочках не всегда достигаются в момент их максимального прощелкивания.

На рис. 7 изображены аналогичные зависимости $w_0(t)$, полученные для металлокомпозитной искривленной панели при $p_{\max} = 30$ МПа (рис. 7,а) и $p_{\max} = -30$ МПа (рис. 7,б). Кривые на рис. 7 определены при тех же условиях, что и кривые с теми же номерами на рис. 6. Как видно из рис. 7, уже на рассматриваемом малом промежутке времени ($0 \leq t \leq 24$ мс) кривые 2 и 1' существенно отличаются от кривой 1. В еще большей степени в соответствующих расчетах различаются и осцилляции максимальных значений интенсивностей деформаций компонентов композиции Mg–У8А-оболочки (такие зависимости от времени здесь не представлены). Это замечание справедливо и для стеклопластиковых искривленных панелей, обсуждавшихся выше. Поэтому все выводы, сделанные ранее для пологих оболочек из стеклопластика, можно перенести и на металлокомпозитные конструкции с той лишь разницей, что в последних все эффекты и различия проявляются более ярко.

Можно предположить, что достаточно большие значения температуры, достигаемые в отдельных точках металлокомпозитной искривленной панели при ее динамических колебаниях в поперечном направлении (см. рис. 5), являются следствием того, что в проведенных расчетах использовано допущение: теплообмен тонкостенной КМ-конструкции с окружающей средой через лицевые поверхности осуществляется в условиях естественной конвекции ($\alpha^{(\pm)} = 30$ Вт/(м² К)). Так как пологая КМ-оболочка при поперечном нагружении воздушной взрывной волной осциллирует с достаточ-

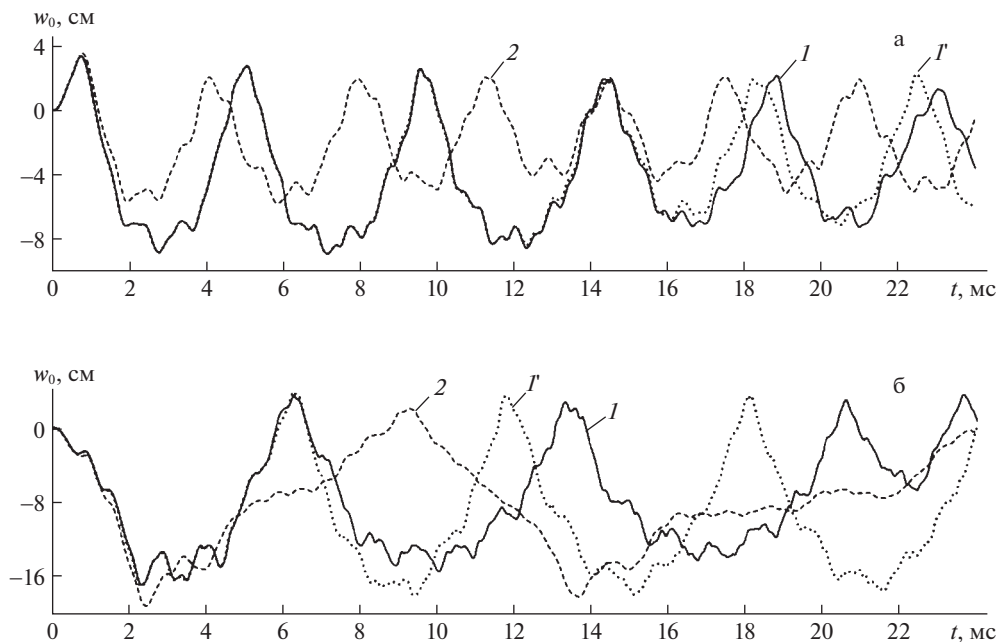


Рис. 7. Осцилляции прогиба центральной точки металлокомпозитной искривленной панели, нагруженной снизу (а) и сверху (б).

но большой частотой (см. рис. 6 и 7), то, возможно, теплообмен через ее лицевые поверхности необходимо рассматривать как происходящий в условиях вынужденной, а не естественной конвекции. Исходя из этого допущения, были выполнены дополнительные расчеты при задании коэффициентов теплоотдачи $\alpha^{(\pm)} = 300 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \text{ К})$ (см. равенства (2.21)), значения которых характерны для вынужденной конвекции газов [32]. Рассчитанные при этом величины $\Theta_m(t)$ отличаются от ранее полученных, т.е. в условиях естественной конвекции газов (см. рис. 4 и 5), только в четвертой значащей цифре. А значит, увеличение значений коэффициентов теплоотдачи на лицевых поверхностях изучаемых КМ-конструкций в 10 раз практически не оказывает влияния на результаты расчетов их термоупруговязкопластического деформирования на рассматриваемых промежутках времени ($0 \leq t \leq 50 \text{ мс}$). Следовательно, на таких, достаточно малых, интервалах времени тепловые процессы, протекающие в пологих КМ-оболочках, можно считать адиабатическими, так как теплообмен кондуктивным путем в них еще пренебрежимо мал. Это обстоятельство, по-видимому, объясняет тот факт, что, как было показано выше (см. рис. 3) и в [17], для адекватного описания теплофизического состояния тонкостенной КМ-конструкции при ее динамическом нагружении в поперечном направлении температуру по толщине следует аппроксимировать полиномами 6–7 порядков, а не 1–2 порядков, как это традиционно принято делать для таких конструкций при их квазистатическом нагружении, когда доминирует именно кондуктивная составляющая теплопереноса.

Заключение. Разработанная математическая модель неизотермического упруговязкопластического деформирования гибких пологих оболочек со структурами многонаправленного армирования позволяет рассчитывать волновые процессы в них, а также учитывать слабое сопротивление таких тонкостенных элементов КМ-конструкций

поперечному сдвигу и связанность механической и теплофизической составляющих рассматриваемой задачи. Разработанный метод решения позволяет численно интегрировать сформулированную нелинейную начально-краевую задачу по явной схеме при использовании численно-аналитической модели структурной механики композитов, предложенной в [17].

Проведенный сравнительный анализ термоупруговязкопластического и термоупругопластического поведения динамически нагружаемых гибких искривленных КМ-панелей показал, что в отличие от аналогичных по структуре и характерным размерам армированных пластин [17] как стеклопластиковые, так и металлокомпозитные пологие оболочки необходимо рассчитывать, учитывая наличие теплового отклика, возникающего в них при динамическом нагружении. При этом гибкие искривленные панели из стеклопластика в отдельных точках могут нагреваться дополнительно на 14...27°C (подобные же им КМ-пластины – не выше, чем на 15°C [17]), а металлокомпозитные пологие оболочки – на 66...200°C (аналогичные им КМ-пластины – на 30...31°C [17]). Однако промежутки времени, на которых достигаются пиковые значения температуры кратковременны – составляют доли миллисекунды. Более интенсивный нагрев и, как следствие, большее термическое влияние наблюдается при нагружении пологих КМ-оболочек воздушной взрывной волной со стороны их выпуклых, а не вогнутых лицевых поверхностей.

При динамическом нагружении таких тонкостенных КМ-конструкций со стороны любой из лицевых поверхностей происходит их прощелкивание в сторону вогнутых лицевых поверхностей, которое наблюдается уже после прекращения действия кратковременной интенсивной нагрузки. Величины прогибов при прощелкивании в случае нагружения пологих оболочек со стороны их выпуклых лицевых поверхностей значительно превышают по модулю аналогичные величины при нагружении таких КМ-конструкций со стороны вогнутых поверхностей. Это обстоятельство и объясняет более интенсивное выделение тепла в первом случае по сравнению со вторым.

Таким образом, в отличие от армированных гибких пластин [17], аналогичные по структуре и характерным размерам пологие оболочки при динамическом нагружении нужно рассчитывать, учитывая наличие теплового отклика в них и чувствительность пластических свойств компонентов их композиций к скорости деформирования, т.е. по термоупруговязкопластической теории.

Работа выполнена в рамках государственного задания (№ госрегистрации 121030900260-6).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bannister M.* Challenger for composites into the next millennium – a reinforcement perspective // *Composites*. 2001. Pt. A 32. P. 901–910.
2. *Mouritz A.P., Gellert E., Burchill P., Challis K.* Review of advanced composite structures for naval ships and submarines // *Compos. Struct.* 2001. V. 53. № 1. P. 21–42.
3. *Gill S.K., Gupta M., Satsangi P.* Prediction of cutting forces in machining of unidirectional glass-fiber-reinforced plastic composites // *Frontiers Mech. Eng.* 2013. V. 8. № 2. P. 187–200.
4. *Soutis C.* Fibre reinforced composites in aircraft construction // *Progress in Aerosp. Sci.* 2005. V. 41. № 2. P. 143–151.
5. *Абросимов Н.А., Баженов В.Г.* Нелинейные задачи динамики композитных конструкций. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2002. 400 с.
6. *Kazanci Z.* Dynamic response of composite sandwich plates subjected to time-dependent pressure pulses // *Int. J. Non-Lin. Mech.* 2011. V. 46. P. 807–817.
7. *Соломонов Ю.С., Георгиевский В.П., Недбай А.Я., Андрюшин В.А.* Прикладные задачи механики композитных цилиндрических оболочек. М.: Физматлит, 2014. 408 с.
8. *Димитриенко Ю.И.* Механика композитных конструкций при высоких температурах. М.: Физматлит, 2019. 448 с.

9. Справочник по композитным материалам: В 2-х кн. Кн. 1 / ред. *Любин Дж.* М.: Машиностроение, 1988. 448 с.
10. Композиционные материалы. Справочник / Под ред. *Карпиноса Д.М.* Киев: Наук. думка, 1985. 592 с.
11. *Leu S.-Y., Hsu H.-C.* Exact solutions for plastic responses of orthotropic strain-hardening rotating hollow cylinders // *Int. J. Mech. Sci.* 2010. V. 52. P. 1579–1587.
12. *Vena P., Gastaldi D., Contro R.* Determination of the effective elastic-plastic response of metal-ceramic composites // *Int. J. Plasticity.* 2008. V. 24. P. 483–508.
13. *Brassart L., Stainier L., Doghri I., Delannay L.* Homogenization of elasto-(visco) plastic composites based on an incremental variational principle // *Int. J. Plasticity.* 2012. V. 36. P. 86–112.
14. *Ахундов В.М.* Инкрементальная каркасная теория сред волокнистого строения при больших упругих и пластических деформациях // *Механ. композ. матер.* 2015. Т. 51. № 3. С. 539–558.
15. *Alderliesten R.C., Benedictus R.* Modelling of impact damage and dynamics in fibre-metal laminates. – A review // *Int. J. Impact Eng.* 2014. V. 67. P. 27–38.
16. *Qatu M.S., Sullivan R.W., Wang W.* Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells: 2000–2009 // *Compos. Struct.* 2010. V. 93. P. 14–31.
17. *Янковский А.П.* Моделирование термоупруговязкопластического деформирования гибких армированных пластин // *ПММ.* 2022. Т. 86. № 1. С. 121–150.
<https://doi.org/10.31857/S003282352201009X>
18. *Безухов Н.И., Бажанов В.Л., Гольденблат И.И., Николаенко Н.А., Синюков А.М.* Расчеты на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур / Под ред. *Гольденблата И.И.* М.: Машиностроение, 1965. 567 с.
19. *Белл Дж.* Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. В 2-х частях. Ч. II. Конечные деформации. М.: Наука, 1984. 432 с.
20. *Грешнов В.М.* Физико-математическая теория больших необратимых деформаций металлов. М.: Физматлит, 2018. 232 с.
21. *Reissner E.* On transverse vibrations of thin shallow elastic shells // *Quart. Appl. Math.* 1955. V. 13. № 2. P. 169–176.
22. *Богданович А.Е.* Нелинейные задачи динамики цилиндрических композитных оболочек. Рига: Зинатне, 1987. 295 с.
23. *Амбарцумян С.А.* Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 446 с.
24. *Reddy J.N.* Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis. N.Y.: CRC Press, 2004. 831 p.
25. *Андреев А.* Упругость и термоупругость слоистых композитных оболочек. Математическая модель и некоторые аспекты численного анализа. Saarbrucken (Deutschland): Palmarium Acad. Pub., 2013. 93 с.
26. *Куликов Г.М.* Термоупругость гибких многослойных анизотропных оболочек // *Изв. РАН. МТТ.* 1994. № 2. С. 33–42.
27. *Пикуль В.В.* Механика оболочек. Владивосток: Дальнаука, 2009. 536 с.
28. *Houlston R., DesRochers C.G.* Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading // *Computers&Struct.* 1987. V. 26. № 1/2. P. 1–15.
29. *Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А.* Сопrotивление жестких полимерных материалов. Рига: Зинатне, 1972. 500 с.
30. *Хажинский Г.М.* Модели деформирования и разрушения металлов. М.: Научный мир, 2011. 231 с.
31. *Рихтмайер Р., Мортон К.* Разностные методы решения краевых задач. М.: Мир, 1972. 418 с.
32. *Луканин В.Н., Шатров М.Г., Камфер Г.М., Нечаев, С.Г. Иванов И.Е., Матюхин Л.М., Морозов К.А.* / Под ред. *Луканина В.Н.* Теплотехника. М.: Высш. шк., 2003. 671 с.
33. *Зуев Л.Б., Данилов В.И.* Физические основы прочности материалов: Учебное пособие. Долгопрудный: Изд. Дом “Интеллект”, 2013. 376 с.

Modeling of Dynamic Thermo-Elastic-Viscous-Plastic Deformation of Flexible Shallow Reinforced Shells

A. P. Yankovskii^{a,*}

^a*Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS, Novosibirsk, Russia*

^{*}*e-mail: lab4nemir@rambler.ru*

A mathematical model of non-isothermal elastic-viscous-plastic deformation of flexible shallow shells with multidirectional reinforcement structures has been developed. Wave processes and weak resistance to transverse shear in curved panels are modeled in terms of Ambartsumian's bending theory. The geometric nonlinearity of the problem is taken into account in the Karman approximation. The composition components are assumed to be isotropic materials, and their plasticity is described by the flow theory with a loading function depending on the strain rate and temperature. The connectedness of the thermomechanical problem under dynamic loading of composite shallow shells is taken into account. In the transverse direction of constructions, the temperature is approximated by a 7th order polynomial. The formulated two-dimensional nonlinear initial-boundary value problem is solved using an explicit numerical scheme of time steps. The thermo-elastic-visco-plastic and thermo-elastic-plastic behavior of fiberglass and metal-composite shallow shells orthogonally reinforced in two tangential directions, loaded in the transverse direction by an air blast wave, has been studied. It is shown that flexible curved fiberglass panels at certain points can additionally heat up by 14...27°C, and similar metal-composite constructions – by 70°C or more. In this case, peak temperature values are kept at short-term intervals – on the order of fractions of 1 ms. It is shown that, unlike flexible plates, similar shallow shells (with the same reinforcement structure and the same characteristic dimensions) under dynamic loading in the transverse direction must be calculated not only taking into account the dependence of the plastic properties of the composition components on their strain rate, but also taking into account thermal response in such thin-walled constructions. A more intense inelastic deformation of curved composite panels is observed when they are loaded from the side of the convex front surface.

Keywords: flexible shallow shells, multidirectional reinforcement, thermo-elastic-viscous-plasticity, coupled thermomechanical problem, Ambartsumyan's bending theory, dynamic loading, explicit numerical scheme

REFERENCES

1. *Bannister M.* Challenger for composites into the next millennium – a reinforcement perspective // *Composites*, 2001, pt. A 32, pp. 901–910.
2. *Mouritz A.P., Gellert E., Burchill P., Challis K.* Review of advanced composite structures for naval ships and submarines // *Compos. Struct.*, 2001, vol. 53, no. 1, pp. 21–42.
3. *Gill S.K., Gupta M., Satsangi P.* Prediction of cutting forces in machining of unidirectional glass-fiber-reinforced plastic composites // *Frontiers Mech. Eng.*, 2013, vol. 8, no. 2, pp. 187–200.
4. *Soutis C.* Fibre reinforced composites in aircraft construction // *Progress in Aerosp. Sci.*, 2005, vol. 41, no. 2, pp. 143–151.
5. *Abrosimov N.A., Bazhenov V.G.* *Nonlinear Problems of Dynamics Composites Designs.* N. Novgorod: Nizhniy Novgorod State Univ., 2002. 400 p. (in Russian)
6. *Kazanci Z.* Dynamic response of composite sandwich plates subjected to time-dependent pressure pulses // *Int. J. Non-Lin. Mech.*, 2011, vol. 46, pp. 807–817.
7. *Solomonov Yu.S., Georgievskii V.P., Nedbai A.Ya., Andriushin V.A.* *Applied Problems of Mechanics of Composite Cylindrical Shells.* Moscow: Fizmatlit, 2014. 408 p. (in Russian)
8. *Dimitrienko Yu.I.* *Mechanics of Composite Structures at High Temperatures.* Moscow: Fizmatlit, 2019. 448 p. (in Russian)
9. *Handbook of Composites / Ed. by Lubin G.* N.Y.: Springer, 1982. 786 p.
10. *Composite Materials. Handbook / Ed. by Karpinos D.M.* Kiev: Nauk. Dumka, 1985. 592 p. (in Russian)

11. *Leu S.-Y., Hsu H.-C.* Exact solutions for plastic responses of orthotropic strain-hardening rotating hollow cylinders // *Int. J. Mech. Sci.*, 2010, vol. 52, pp. 1579–1587.
12. *Vena P., Gastaldi D., Contro R.* Determination of the effective elastic-plastic response of metal-ceramic composites // *Int. J. Plasticity*, 2008, vol. 24, pp. 483–508.
13. *Brassart L., Stainier L., Doghri I., Delannay L.* Homogenization of elasto-(visco) plastic composites based on an incremental variational principle // *Int. J. Plasticity*, 2012, vol. 36, pp. 86–112.
14. *Akhundov V.M.* Incremental carcass theory of fibrous media under larger elastic and plastic deformations // *Mech. Compos. Mater.*, 2015, vol. 51, no. 3, pp. 539–558.
15. *Alderliesten R.C., Benedictus R.* Modelling of impact damage and dynamics in fibre-metal laminates. – A review // *Int. J. Impact Eng.*, 2014, vol. 67, pp. 27–38.
16. *Qatu M.S., Sullivan R.W., Wang W.* Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells: 2000–2009 // *Compos. Struct.*, 2010, vol. 93, pp. 14–31.
17. *Yankovskii A.P.* Modeling of thermoelastic-visco-plastic deformation of flexible reinforced plates // *Mech. Solids*, 2022, vol. 57, no. 7, pp. 111–133. doi: 10.3103/S0025654422070184
18. *Bezukhov N.I., Bazhanov V.L., Gol'denblat I.I., Nikolaenko N.A., Sinyukov A.M.* Calculations on Strength, Stability and Fluctuations in Conditions of High Temperatures. / Ed. by *Gol'denblat I.I.* Moscow: Mashinostroenie, 1965. 567 p. (in Russian)
19. *Encyclopedia of Physics. Vol. VIa/1, Mechanics of Solids I* / Ed. by *Truesdell C.* Berlin; Heidelberg; N.Y.: Springer, 1973.
20. *Greshnov V.M.* Physical and Mathematical Theory of Large Irreversible Deformations of Metals. Moscow: Fizmatlit, 2018. 232 p. (in Russian)
21. *Reissner E.* On transverse vibrations of thin shallow elastic shells // *Quart. Appl. Math.*, 1955, vol. 13, no. 2, pp. 169–176.
22. *Bogdanovich A.E.* Nonlinear Problems of the Dynamics of Cylindrical Composite Shells. Riga: Zinatne, 1987. 295 p. (in Russian)
23. *Ambardzumyan S.A.* The General Theory of Anisotropic Shells. Moscow: Nauka, 1974. 446 p. (in Russian)
24. *Reddy J.N.* Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis. N.Y.: CRC Press, 2004, 831 p.
25. *Andreev A.N.* Elasticity and Thermo-Elasticity Layered Composite Shells. Mathematical Model and Some Aspects of the Numerical Analysis. Saarbrücken (Deutschland): Palmarium Acad. Pub., 2013. 93 p. (in Russian)
26. *Kulikov G.M.* Thermo-elasticity flexible multilayered anisotropic shells // *Mech. Solids*, 1994, no. 2, pp. 33–42.
27. *Pikul' V.V.* Mechanics of Shells. Vladivostok: Dal'nauka, 2009. 536 p. (in Russian)
28. *Houlston R., DesRochers C.G.* Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading // *Computers&Struct.*, 1987, vol. 26, no. 1/2, pp. 1–15.
29. *Malmeister A.K., Tamuzh V.P., Teters G.A.* Resistance of Rigid Polymeric Materials. Riga: Zinatne, 1972. 500 p. (in Russian)
30. *Khazhinskii G.M.* Model of Deformation and Fracture of Metals. Moscow: Nauchny Mir, 2011. 231 p. (in Russian)
31. *Richtmyer R.D., Morton K.W.* Difference Methods for Initial-Value Problems. N.Y.: John Wiley&Sons, 1967.
32. *Lukanin V.N., Shatrov M.G., Camfer G.M., Nechaev S.G., Ivanov I.E., Matyukhin L.M., Morozov K.A.* Heat Engineering: Textbook for Universities / Ed. by *Lucanin V.N.* Moscow: Vysshaya Shkola, 2003. 671 p. (in Russian)
33. *Zuev L.B., Danilov V.I.* Physical Foundations of the Strength of Materials: Textbook. Dolgoprudny: Intellect Publ., 2013. 376 p. (in Russian)