

УДК 514.87

## ПОСТРОЕНИЕ 3D ПАРКЕТА ПЕНРОУЗА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ФРАКТАЛОВ ИЗ ТРЕХМЕРНЫХ ЗВЕЗД: ПОДХОДЫ К РЕШЕНИЮ

© 2022 г. А. А. Поляков\*

*Южно-Уральский Государственный Университет, Челябинск, Россия**\*e-mail: poliakova@susu.ru*

Поступила в редакцию 21.09.2021 г.

После доработки 03.11.2021 г.

Принята к публикации 05.11.2021 г.

Трехмерный паркет Пенроуза (3DPT – *3 Dimension Penrose Tiling*) является квазипериодической решеткой с икосаэдрической симметрией. Его используют в кристаллографии квазикристаллов. Целью работы является формулировка принципа отбора фракталов для повторения 3DPT. Были выбраны фракталы из 3d звезд: большого и малого звездчатых додекаэдров. Для построения фракталов использовался абсолютный инфляционный подход. Каждая точка как 3DPT, так и фракталов, описывается 6-индексами, которые являются компонентами вектора в неортогональном базисе, с 6-ю ортами, направленными из центра к вершинам правильного икосаэдра. Были проанализированы типы точек фрактала, которые можно классифицировать по двум признакам: целые или полущелые 6-индексы, четная или нечетная сумма шести индексов. Умножение на золотое сечение векторов, описывающих точки фрактала, приводит к циклической смене этих типов. Сформулированы правила изменения этих типов при суммировании векторов, по этим правилам определены типы точек на каждом шаге роста фрактала. Для повторения 3DPT были выбраны предфракталы с целыми индексами, имеющими четную и нечетную сумму. В работе также предложен метод определения минимальной трехмерной звезды фрактала. На основе этих принципов были проанализированы точки фрактала  $2/3/4/1\dots$ . При выборе этого фрактала лишних точек, не входящих в состав 3DPT, не обнаружено. Такой подход позволил повторить 85% точек 3DPT.

*Ключевые слова:* фракталы, трехмерный паркет Пенроуза, квазипериодическая решетка, большой звездчатый додекаэдр, малый звездчатый додекаэдр

**DOI:** 10.31857/S0235010622020062

### ВВЕДЕНИЕ

Открытие Д. Шехтмана в 1984 г. [1] квазипериодических кристаллов с икосаэдрической симметрией поставило вопрос о способах построения их кристаллической решетки. Ко времени открытия были предложены двумерные и трехмерные квазипериодические мозаики: паркет Пенроуза (ПП) [2] и трехмерный паркет Пенроуза. Позднее были открыты декагональные квазикристаллы [3], для которых ПП можно считать первоначальной моделью кристаллической решетки.

#### *Трехмерный паркет Пенроуза*

Трехмерный паркет Пенроуза (3DPT – *3D Penrose tiling*) [4] является основной моделью квазипериодической решетки икосаэдрических квазикристаллов, можно сказать, что он играет ту же роль, что и примитивная кубическая решетка при изучении кристаллов кубической сингонии. Трехмерный паркет Пенроуза строится из двух ти-

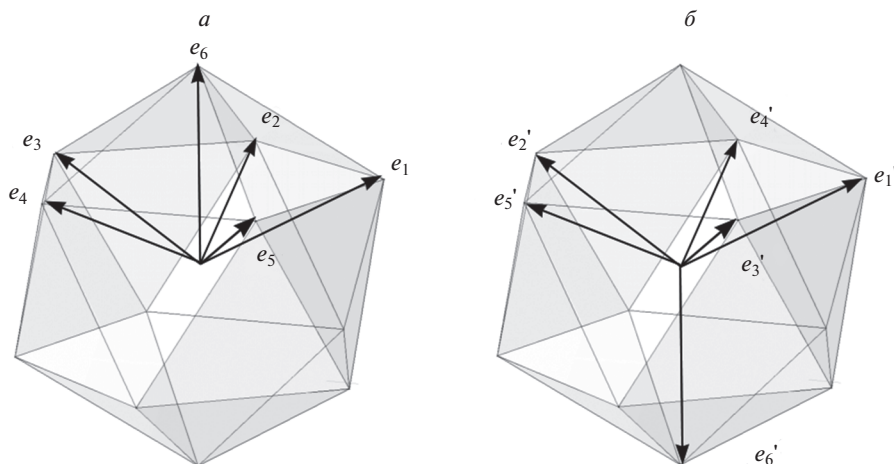


Рис. 1. Проекция реперных векторов примитивной 6-мерной кубической решетки на параллельное (а) и перпендикулярное (б) трехмерные пространства.

пов параллелепипедов, он характеризуется икосаэдрической симметрией и квазипериодичностью. Ряд авторов [5] обсуждали возможность построения замощения трехмерного пространства, при котором будет получена икосаэдрическая симметрия, однако сегодня приоритет отдается Амману [6]. Но используют название 3DPT, так как эта структура является трехмерным аналогом паркета Пенроуза. Существует несколько способов описать 3DPT, наиболее удобной является проекционная методика [7], которую используют также для структурного анализа реальных квазикристаллов.

В проекционной методике 6-мерная примитивная кубическая решетка проецируется на два взаимно перпендикулярных трехмерных подпространства. Эти подпространства располагаются так, что проекции 6 реперных векторов направлены от центра к вершинам правильного икосаэдра (рис. 1).

Положение узлов 3DPT описывается выражением

$$r = e_1 i_1 + e_2 i_2 + e_3 i_3 + e_4 i_4 + e_5 i_5 + e_6 i_6, \quad (1)$$

где  $i_1, \dots, i_6$  – индексы узлов 6-мерной кубической решетки,  $e_1, \dots, e_6$  – проекции реперных векторов 6-мерной решетки на трехмерное пространство.

Одно пространство называется параллельным, в нем строится решетка. Второе – перпендикулярным, в этом пространстве располагается область учета точек (*acceptance domain* (AD)) в форме ромбического триаконтаэдра (внешние точки симметричной проекции 6-мерного куба на 3-мерное пространство имеют вид этого полиэдра). Если проекции узлов примитивной 6-мерной кубической решетки в перпендикулярном пространстве оказываются внутри AD, то эти точки принадлежат 3DPT. Эти точки переносят из перпендикулярного пространства в параллельное, что и приводит к построению трехмерного паркета Пенроуза. На рис. 1 можно сравнить, как расположены проекции реперных векторов в обоих типах проекции. Можно заметить, что соседние проекции реперных векторов в одном пространстве становятся не соседними в другом и наоборот.

Каждый узел 6-мерной решетки характеризуется 6-индексом  $(i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6)$ . Если выразить индексы перпендикулярного пространства в проекциях репера параллельного пространства, то индексы переместятся (например, получим  $(i'_1, i'_4, i'_2, i'_5, i'_3, i'_6)$ ). Ал-

горитм построения 3DPT сводится к следующему: перебираются индексы, соответствующие перпендикулярному пространству и вычисляется вектор; определяется, принадлежит ли этот вектор  $AD$ ; если принадлежит, то вектор переводится в параллельное пространство с помощью перемещения индексов, иначе точка отбрасывается.

Квазипериодические решетки характеризуются самоподобием. Самоподобие – повторение свойств объекта с изменением масштаба. Следует отметить, что 3DPT характеризуется самоподобием с шагом  $\tau^3$  [4]. Здесь  $\tau = (1 + \sqrt{5})/2 \approx 1.618$  – золотое сечение.

При анализе всех квазипериодических решеток, имеющих ось симметрии 5 порядка, встречается золотое сечение, потому что отношение диагонали пятиугольника к его стороне равно золотому сечению. Известно [8], что золотое сечение определяется из следующего выражения

$$\tau^2 = \tau + 1. \quad (2)$$

Любую целую степень золотого сечения можно выразить с помощью уравнения

$$\tau^N = A\tau + B, \quad (3)$$

где  $N, A, B$  – целые числа. Такие же свойства характеризуют и умножение на целую степень золотого сечения вектора узла 3DPT [9]. Умножение 6-вектора (1) на  $\tau$  выражается умножением на матрицу с полуцелыми индексами:

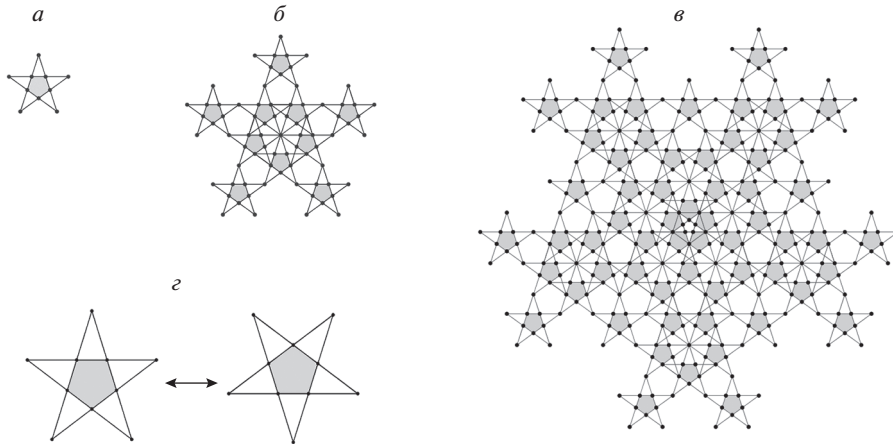
$$Y = \tau X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \bar{1} & \bar{1} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \bar{1} & \bar{1} & 1 \\ \bar{1} & 1 & 1 & 1 & \bar{1} & 1 \\ \bar{1} & \bar{1} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \bar{1} & \bar{1} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} X. \quad (4)$$

Здесь  $X$  – 6-индексный столбец,  $\bar{1}$  обозначает  $-1$ . Если  $X$  содержит целые индексы, то  $Y$  может содержать полуцелые индексы. Однако, так как на  $\tau^3 = 2\tau + 1$ , матрица умножения на  $\tau^3$  не изменяет свойств индексов.

### Фракталы из звезд

Фракталы – понятие, предложенное Бенуа Мандельбротом [10] для описания математических и природных объектов, характеризующихся изломанностью, отсутствием гладкости. Для фракталов также, как и для квазипериодических решеток, характерно самоподобие. В то же время квазипериодические решетки (также, как и периодические) характеризуются тем, что не может быть двух точек ближе некоторого минимального расстояния и не может быть полости в структуре больше некоторого максимального расстояния (системы точек Делоне [11]). Такое ограничение не обязательно для фракталов. Можно считать квазипериодическую решетку фракталом с дополнительным условием. Выполнение этого условия ведет к тому, что фрактальная размерность [10] решетки не будет отличаться от размерности пространства (у двумерной решетки – 2, у трехмерной – 3). В общем случае фракталы могут иметь фрактальную размерность меньше размерности пространства.

В наших работах [12] предложены двумерные фракталы из пятиконечных звезд. Были рассмотрены два подхода к построению фрактала: инфляционный и дефляционный [13]. В дефляционном подходе выбирается начальный объект – пятиконечная звезда и определяется закон уменьшения и изменения ориентации минимальной звезды – строительного элемента. На каждом шагу задается размер и ориентация мини-



**Рис. 2.** Инфляционное построение фрактала из пятиконечных звезд (абсолютное описание): (а) предфрактал  $0w$ ; (б) предфрактал  $0w2w$ ; (в) предфрактал  $0w2w3b$ ; (г) две ориентации звезды.

мальной звезды, и эти звезды размножаются и располагаются так, что их центры совпадают с вершинами предфрактала предыдущего порядка. Пятиконечная звезда может иметь две ориентации, связанные операцией инверсии относительно точки. Предфрактал предыдущего порядка удаляется, при совпадении точек — вершин звезд, такая точка учитывается один раз. В инфляционном подходе задается начальная звезда, затем задается *обобщенная звезда* увеличивающегося размера, по 10 вершинам которой располагаются центры предфракталов предыдущих порядков (обобщенная звезда не отображается). На рис. 2 приведен пример инфляционного построения фрактала из пятиконечных звезд, показаны две ориентации звезды.

Предложено два подхода к описанию данных фракталов — абсолютный и относительный [13]. В абсолютном на каждом шаге определяется абсолютный размер звезды и ее ориентация. В относительном подходе задается отношение размера звезды к размеру на предыдущем шагу и определяется сохраняется ли ориентация звезды по отношению к ориентации предыдущего шага. Дефляционное относительное описание фрактала совпадает с традиционным [10] — с помощью инициатора и генератора.

При абсолютном описании размер звезды (в дефляционном методе — минимальной звезды, в инфляционном методе — обобщенной звезды) определяется выражением

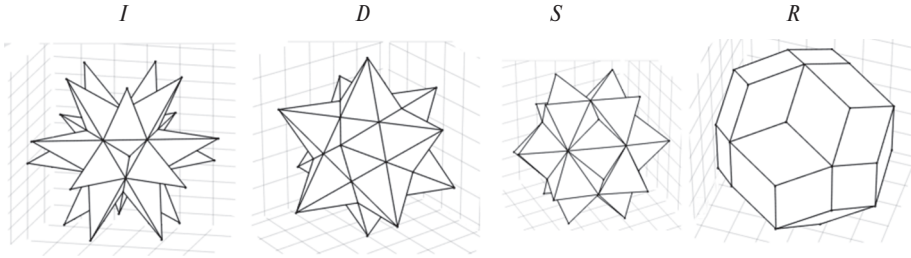
$$a_k = a_0 \tau^{N_k}. \quad (5)$$

Здесь  $k$  — номер предфрактала,  $a$  — расстояние от центра звезды до ее вершины,  $\tau$  — золотое сечение,  $N_k$  — целое число. В инфляционном построении фрактала размерное число  $N_k$  является неотрицательным, а в дефляционном — неположительным числом.

В относительном описании размеры звезды задаются следующим образом

$$a_k = a_{k-1} \tau^{N_k - N_{k-1}}. \quad (6)$$

Показано [13], как связаны между собой инфляционный и дефляционный подходы к построению фрактала, относительное и абсолютное описание. Чаще всего дефляционный подход приводит к бесконечно близкому расположению точек, а инфляционный подход — к расположению точек не ближе некоторого значения и бесконечно растущей площади фрактала. По выражениям (5) и (6) можно заметить, что скорость



**Рис. 3.** Полиэдры в симметричной проекции 6-мерного куба на трехмерное пространство:  $I$  – большой звездчатый додекаэдр,  $D$  – малый звездчатый додекаэдр,  $S$  – симметричный звездчатый икосаэдр,  $R$  – ромбический триаконтаэдр.

сближения точек в дефляционной записи тем быстрее, чем быстрее они расходятся в инфляционной.

В работе [14] двумерный паркет Пенроуза описывается с помощью фракталов из пятиконечных звезд. Можно отметить следующие особенности такого описания: 1) паркет Пенроуза можно разбить на 4 слоя перпендикулярно плоскости, в котором он лежит; каждый слой характеризуется одинаковой суммой 5-индексов точек; 2) оказалось, что каждый слой легко описывается фракталом из пятиконечных звезд с шагом  $N_k - N_{k-1} = 1$ , причем ориентация звезд меняется на каждом шагу; 3) объединение 4 фракталов одинакового типа дает паркет Пенроуза.

#### *Фракталы из 3D звезд*

Двумерные фракталы из пятиконечных звезд тесно связаны с паркетом Пенроуза, который можно получить проекционной методикой на основе 5-мерной кубической решетки. Трехмерный паркет Пенроуза тесно связан с 6-мерной кубической решеткой, поэтому было интересно изучить свойства симметричной проекции 6-мерного куба на 3-мерное пространство, и на основе этого анализа выбрать строительные элементы фрактала. Анализ свойств симметричной проекции 6-мерного куба на 3-мерное пространство показал [15], что все точки можно описать концентрическими фигурами: двумя икосаэдрами и двумя додекаэдрами. Если объединить вершины одного икосаэдра и одного додекаэдра из этого набора, то можно получить 4 полиэдра: большой ( $I$ ) и малый звездчатый додекаэдр ( $D$ ) [16], ромбический триаконтаэдр ( $R$ ) и полиэдр ( $S$ ), который автор [15] назвал симметричным звездчатым икосаэдром (рис. 3). Если поместить начало отсчета в центр полиэдров, то координаты вершин описываются полуцелыми индексами, причем у  $I$  сумма индексов четная, а у  $D$  сумма индексов нечетная. На основании этих свойств были предложены фракталы из трехмерных звезд [17], из двух типов полиэдров – большого и малого звездчатых додекаэдров. Заметим, что грани этих полиэдров имеют вид правильных пятиконечных звезд одинакового размера. Для построения фракталов из трехмерных звезд методика построения фрактала из пятиконечных звезд была обобщена на 3 измерения, причем оказалось, что размеры звезд описываются теми же формулами. Этот фрактал определяется, так же, как и фрактал из пятиконечных звезд, рядом из размерных чисел и 2 типов звезд. Также возможно абсолютное и относительное описание фрактала, дефляционный и инфляционный подходы. Таким образом в *абсолютном инфляционном* описании ряд символов

$${}^i N_0 C_0 N_1 C_1 \dots N_k C_k \dots \quad (7)$$

**Таблица 1.** Результаты умножения точек проекции 6-мерной кубической решетки на золотое сечение  $\tau$ 

Целые индексы	Исходная сумма индексов	Тип	Умножение на $\tau$		
			целые индексы	сумма индексов	тип
Нет	Нечетная	<i>A</i>	Нет	Четная	<i>B</i>
Нет	Четная	<i>B</i>	Да	Нечетная	<i>C</i>
Да	Нечетная	<i>C</i>	Нет	Четная	<i>A</i>
Да	Четная	<i>E</i>	Да	Четная	<i>E</i>

характеризует фрактал из трехмерных звезд, здесь  $N_k$  – размерное число, которое характеризует размер обобщенной звезды, а  $C_k = I$  или  $D$  – тип обобщенной звезды. Размер звезды

$$a_k = a_0 \tau^{N_k}. \quad (8)$$

### ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

#### *Постановки задачи: подходы к построению 3ДРТ из фракталов из трехмерных звезд с икосаэдрической симметрией*

Цель данной работы – выбрать фракталы из трехмерных звезд, с помощью которых можно повторить 3ДРТ.

Наиболее вероятные характеристики фрактала, которые позволят повторить трехмерный паркет Пенроуза:

1. Также, как и в работе, посвященной построению двумерного паркета Пенроуза с помощью фрактала из пятиконечных звезд, фрактал должен иметь шаг 1 по степеням золотого числа, потому что в этом случае пространство плотно заполняется точками. Это приводит к фрактальной размерности в двумерном случае – 2, в трехмерном, равном 3. Если шаг будет больше, то появятся полости, поэтому такие фракталы нельзя использовать для повторения трехмерной квазипериодической решетки.

2. Трехмерный паркет Пенроуза обладает самоподобием с шагом  $\tau^3$ , поэтому нужно выбирать каждую третью структуру фрактала, растущего с шагом  $\tau$ , для сравнения с паркетом.

3. Для построения двумерного паркета Пенроуза [14] использовалось объединение 4 фракталов, потому что паркет можно разделить на 4 слоя. В 3D случае, проекция 6D куба на трехмерное пространство может быть получена объединением двух трехмерных звезд (*I* и *D*) [17], то есть необходимо объединение, как минимум, 2-х фракталов.

#### *Свойства точек трехмерных звезд различного размера.*

#### *Определение изменения свойств точек при образовании фрактала*

В работе [17] обсуждался вопрос, как умножение на золотое сечение  $\tau$  по формуле (4) изменяет характеристики индексов точки. На основе этих рассуждений была составлена табл. 1.

Обозначим типы точек: *A* – полуцелые индексы, сумма индексов нечетная; *B* – полуцелые индексы, сумма индексов четная; *C* – целые индексы, сумма индексов нечетная; *E* – целые индексы, сумма индексов четная. Большой звездчатый додекаэдр *I*, составляющий проекцию 6-мерного куба на 3-мерное пространство, имеет тип *B*, а малый звездчатый додекаэдр *D* имеет тип *A*. Умножение на золотое сечение  $\tau$  координат

**Таблица 2.** Характеристики трехмерных пентагональных звезд различного размера

Звезда	Тип	Звезда	Тип
0I	B	0D	A
1I	C	1D	B
2I	A	2D	C
3I	B	3D	A
4I	C	4D	B
5I	A	5D	C
...	...	...	...

**Таблица 3.** Результаты суммирования точек с индексами различного типа

+	E	A	B	C
E	E	A	B	C
A	A	E	C	B
B	B	C	E	A
C	C	B	A	E

точки приводит к преобразованию типов  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$ . То есть, умножение на  $\tau$  звезд  $I$  и  $D$  циклически изменяет тип их индексов.

Рассмотрим подробнее, какие свойства имеют звезды различного размера (табл. 2). Алгоритм нахождения типа звезды: находим остаток от деления размерного числа  $N$  обобщенной звезды на 3:

для большого звездчатого додекаэдра ( $I$ )

$$N_I \bmod 3 = \begin{cases} 0 \Rightarrow \text{тип} = B \\ 1 \Rightarrow \text{тип} = C \\ 2 \Rightarrow \text{тип} = A \end{cases}$$

для малого звездчатого додекаэдра ( $D$ )

$$N_D \bmod 3 = \begin{cases} 0 \Rightarrow \text{тип} = A \\ 1 \Rightarrow \text{тип} = B \\ 2 \Rightarrow \text{тип} = C. \end{cases}$$

При росте фрактала происходит суммирование координат точек звезд всех этапов. После суммирования мы получим индексы фрактала, которые могут быть целыми или полужелыми. Кроме того, сумма 6-индексов любой точки фрактала может быть четной или нечетной. В табл. 3 анализируется тип точек при суммировании векторов звезд различного типа. Заметим, что данная таблица является таблицей Кэли [18] для операции суммирования при построении фрактала из трехмерных звезд.

Образование предфрактала из звезд происходит за счет прямой суммы всех векторов вершин всех обобщенных звезд, поэтому по табл. 3 можно определить тип точек предфрактала. Любая точка предфрактала  $N$ -го порядка определяется суммой векторов, соединяющих центр и вершину обобщенных звезд порядков от 0 до  $N$ :

$$r = r_0^i + r_1^j + \dots + r_N^k, \quad (9)$$

здесь  $i, j, \dots, k$  — изменяются в пределах от 1 до числа вершин звезды (у пятиконечной звезды — 10, у трехмерной звезды — 32).

**Таблица 4.** Тип точек предфракталов  $2I3I4I5I\dots$  в абсолютной инфляционной записи

Предфрактал	Обобщенная звезда	Тип звезды	$\text{mod}_3(N)$	Тип точек предфрактала
$2I$	$2I$	$A$	2	$A$
$2I3I$	$3I$	$B$	0	$C$
$2I3I4I$	$4I$	$C$	1	$E$
$2I3I4I5I$	$5I$	$A$	2	$A$
$2I3I4I5I6I$	$6I$	$B$	0	$C$
$2I3I4I5I6I7I$	$7I$	$C$	1	$E$
...	...	...	...	...

В качестве примера, рассмотрим фрактал с шагом по размерному числу равном 1, составленный из больших звездчатых додекаэдров, с минимальным размерным числом, равным 2 (в абсолютной инфляционной записи  $2I3I4I5I\dots$ ) (табл. 4).

Для выбора точек, описывающих 3ДРТ, нужно использовать звезды с целыми индексами, т.е. типов  $C$  и  $E$ . Так как у типа  $C$  сумма индексов нечетная, а у  $E$  – четная, обязательно должно быть наличие точек того и другого типа.

*Выбор минимального размера звезд фрактала*

Необходимо выбрать минимальный размер звезд фрактала в инфляционной записи. Вспомним проекционную методику построения 3ДРТ [7]. Для выбора точек в перпендикулярном пространстве точки должны принадлежать  $AD$ , затем точки переводятся в параллельное пространство. Как отмечалось в [17], при переходе от параллельного пространства к перпендикулярному, звезда  $I$  переходит в звезду  $D$  и наоборот  $D \rightarrow I$ . Происходит инверсия: звезда в  $\tau^N$  раз большая, чем звезда с 0 размерным числом в прямом пространстве, превращается в звезду в  $\tau^N$  раз меньше.

Для того, чтобы все точки фрактала принадлежали точкам 3ДРТ, нужно, чтобы фрактал в дефляционной записи [13] заполнял  $AD$ . Мы выбираем  $AD$  в виде проекции 6-мерного куба, а внешние точки звезд  $OI$  и  $OD$  как раз совпадают с поверхностью  $AD$  (*acceptance domain*).

Пусть расстояние от центра до вершин лепестка исходной звезды  $I$  или  $D$  равно  $a$ , на каждом шаге при дефляционном построении фрактала размер обобщенной звезды уменьшается в  $\tau$  раз, тогда максимальный размер фрактала в перпендикулярном пространстве определяется рядом

$$a + \frac{a}{\tau} + \frac{a}{\tau^2} + \frac{a}{\tau^3} + \dots + \frac{a}{\tau^N} + \dots = 1. \tag{10}$$

Максимальный размер соответствует максимальному размеру звезды  $OI$  или  $OD$ . Умножим уравнение (10) на  $\tau$

$$a\tau + a + \frac{a}{\tau} + \frac{a}{\tau^2} + \frac{a}{\tau^3} + \dots + \frac{a}{\tau^N} + \dots = \tau. \tag{11}$$

Подставим (10) в (11)

$$a\tau + 1 = \tau. \tag{12}$$

Тогда

$$a = \frac{\tau - 1}{\tau} = \tau^{-2}. \tag{13}$$



То есть, начальный размер звезды в перпендикулярном пространстве в  $\tau^2$  меньше, а в параллельном пространстве в  $\tau^2$  больше размера  $AD$ . Отсюда исходная звезда должна быть выбрана типа  $2I$  или  $2D$  в абсолютной инфляционной записи.

## РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Написаны программы в среде MATLAB для построения ЗДРТ и фракталов из трехмерных звезд. Была проведена проверка различных предфракталов вида  $2C3C4C...NC...$  с целыми индексами, где  $C = I$  или  $D$ . Оказалось, что вершины всех предфракталов такого типа с целыми индексами принадлежат ЗДРТ, лишних точек нет. Наиболее подходящим оказался фрактал  $2I3I4I5I...$  (табл. 4). В нем были выбраны две последовательности, имеющие тип точек  $C$  и  $E$ . Если объединить два таких предфрактала, то они позволяют описать примерно 85% точек ЗДРТ. Для описания остальных точек ЗДРТ, требуется найти дополнительные подходы к выбору точек фракталов из трехмерных звезд.

## ВЫВОДЫ

Поставлена задача повторить трехмерный паркет Пенроуза с помощью фракталов из трехмерных звезд: большого и малого звездчатых додекаэдров. Предложены принципы построения фракталов и выбора минимальных звезд для такого повторения. С использованием этих подходов удалось повторить 85% точек трехмерного паркета Пенроуза.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Shechtman D., Blech I., Gratias D., Cahn J.W. Metallic phase with long-range orientational order and no translational symmetry // Phys. Rev. Lett. 1984. **53**. № 20. P. 1951–1953.
2. Penrose, R. Pentaplexity: A Class of Nonperiodic Tilings of the Plane // Eureka. 1978. **39**. P. 16–22.
3. Kuczera P., Wolny J., Steurer W. Comparative structural study of decagonal quasicrystals in the systems Al–Cu–Me (Me = Co, Rh, Ir) // Acta Cryst. B. 2012. **68**. № 6. P. 578–589.
4. Henley C.L. Sphere packing and local environments in Penrose tiling // Phys. Rev. B. 1986. **2**. № 34. P. 797–816.
5. Mackay A.L. Crystallography and the Penrose pattern // Physica A: Stat. Mech. Appl. 1982. **114**. № 1–3. P. 609–613.
6. Steurer W., Deloudi S. Crystallography of Quasicrystals. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 2009.
7. Katz A., Duneau, M. Quasiperiodic structures obtained by the projection method // J. Phys. Colloques. 1986. **47**. P. 103–113.
8. Dunlap R.A. The golden ratio and Fibonacci numbers. Singapore: World Scientific. 2003.
9. Elser V. Indexing problems in quasicrystal diffraction // Phys. Rev. B. 1985. **32**. № 8. P. 4892–4898.
10. Mandelbrot B. The fractal geometry of nature. W.H. Freeman. 2010.
11. Галиулин Р.В. Кристаллографическая геометрия. М.: Наука, 1984.
12. Polyakov A.A. Presentation of Penrose tiling as set of overlapping pentagonal stars // J. Physics: Conference Series. 2008. **98**. 012025.
13. Polyakov A.A. Construction of Fractals of Stars: Inflationary and Deflationary Approaches // Russian Metallurgy. 2019. № 2. P. 187–189.
14. Polyakov A.A. Constructing of Penrose tiling by means of the fractal of five-pointed stars // Russian Metallurgy. 2016. № 2. P. 121–123.
15. Поляков А.А. Геометрические свойства симметричной проекции 6-мерного куба на трехмерное пространство // Наука ЮУрГУ. Секции естественных наук. 2018. **70**. № 1. С. 90–99.
16. Coxeter H.S.M. Regular polytopes. London: Methuen and Co., 1948.
17. Polyakov A. Fractals of 3D stars with icosahedral symmetry // J. Physics: Condensed Matter. 2020. **32**. № 19. P. 194003.
18. Cayley A. On the theory of groups, as depending on the symbolic equation  $\theta^n = 1/A$ . Cayley // Phil. Mag. 1954. **7**. P. 40–47.

## CONSTRUCTING THE 3D PENROSE TILING BY MEANS OF FRACTALS OF 3D STARS: APPROACHES TO SOLVING THE TASK

A. A. Polyakov

*South-Ural State University, Chelyabinsk, Russia*

The 3D Penrose tiling (3DPT) is a quasiperiodic lattice with icosahedral symmetry, it is used in the crystallography of quasicrystals. The work aims to formulate the principles of selecting fractals for repeating 3DPT. The building elements of the fractals are the great ( $I$ ) and the small ( $D$ ) stellated dodecahedrons. An absolute inflationary approach to fractal construction is used. Each point of both 3DPT and the fractals is described by a 6-index. These six indices are vector components on a non-orthogonal basis, with 6 unit vectors directed from the centre to the vertices of the regular icosahedron. The fractal points can be classified into four types according to two criteria: integer or half-integer 6-indices, an even or odd sum of six indices. Multiplying the vectors of fractal points by the golden ratio leads to a cyclical change in these types. The rules for modification of these types when summing vectors are formulated. These rules made it possible to determine the types of points of each prefractal. For 3DPT repetition, prefractals with integer indices having an even and odd sum are chosen. It was proposed a method for determining the minimum 3D star of the fractal. Based on these principles, the points of the fractal  $2I/3I/4I\dots$  are analysed. When choosing this fractal, no extra points that are not part of the 3DPT were found. This approach allows 85% of the 3DPT points to be repeated.

*Keywords:* fractals, three-dimensional Penrose tiling, quasiperiodic lattice, great stellated dodecahedron, small stellated dodecahedron

### REFERENCES

1. Shechtman D., Blech I., Gratias D., Cahn J.W. Metallic phase with long-range orientational order and no translational symmetry // *Phys. Rev. Lett.* 1984. **53**. № 20. P. 1951–1953.
2. Penrose R. Pentaplexity: A Class of Nonperiodic Tilings of the Plane // *Eureka*. 1978. **39**. P. 16–22.
3. Kuczera P., Wolny J., Steurer W. Comparative structural study of decagonal quasicrystals in the systems Al–Cu–Me (Me = Co, Rh, Ir) // *Acta Cryst. B*. 2012. **68**. № 6. P. 578–589.
4. Henley C.L. Sphere packing and local environments in Penrose tiling // *Phys. Rev. B*. 1986. **2**. № 34. P. 797–816.
5. Mackay A.L. Crystallography and the Penrose pattern // *Physica A: Stat. Mech. Appl.* 1982. **114**. № 1–3. P. 609–613.
6. Steurer W., Deloudi S. *Crystallography of Quasicrystals*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 2009.
7. Katz A., Duneau, M. Quasiperiodic structures obtained by the projection method // *J. Phys. Colloques*. 1986. **47**. P. 103–113.
8. Dunlap R.A. *The golden ratio and Fibonacci numbers*. Singapore: World Scientific. 2003.
9. Elser V. Indexing problems in quasicrystal diffraction // *Phys. Rev. B*. 1985. **32**. № 8. P. 4892–4898.
10. Mandelbrot B. *The fractal geometry of nature*. W.H. Freeman. 2010.
11. Galiulin R.V. *Kristallograficheskaya geometriya [Crystallographic geometry]*. M.: Nauka, 1984. [In Russian].
12. Polyakov A.A. Presentation of Penrose tiling as set of overlapping pentagonal stars // *J. Physics: Conference Series*. 2008. **98**. 012025.
13. Polyakov A.A. Construction of Fractals of Stars: Inflationary and Deflationary Approaches // *Russian Metallurgy*. 2019. № 2. P. 187–189.
14. Polyakov A.A. Constructing of Penrose tiling by means of the fractal of five-pointed stars // *Russian Metallurgy*. 2016. № 2. P. 121–123.
15. Polyakov A.A. Geometricheskiye svoystva simmetrichnoy proyektzii 6-mernogo kuba na trekhmernoye prostranstvo [Geometric properties of a symmetric projection of a 6-dimensional cube onto a three-dimensional space] // *Science of SUSU. Natural Sciences Section*. 2018. **70**. № 1. P. 90–99. [In Russian].
16. Coxeter H.S.M. *Regular polytopes*. London: Methuen and Co., 1948.
17. Polyakov A. Fractals of 3D stars with icosahedral symmetry // *J. Physics: Condensed Matter*. 2020. **32**. № 19. P. 194003.
18. Cayley A. On the theory of groups, as depending on the symbolic equation  $\theta^n = 1/A$ . Cayley // *Phil. Mag.* 1954. **7**. P. 40–47.