

УДК 536.75...77,533.9,537.9

ОБ УСЛОВИЯХ САМОСОГЛАСОВАНИЯ В СТАТИСТИЧЕСКОЙ ТЕРМОДИНАМИКЕ КУЛОНОВСКОЙ СИСТЕМЫ

© 2020 г. В. Б. Бобров*

Объединенный институт высоких температур РАН, Москва, Россия

*E-mail: vic5907@mail.ru

Поступила в редакцию 06.02.2020 г.

После доработки 10.03.2020 г.

Принята к публикации 13.03.2020 г.

Рассмотрен термодинамический потенциал для однородной и изотропной равновесной нерелятивистской системы электронов и ядер, взаимодействующих между собой по закону Кулона. С использованием теоремы вириала и точных соотношений для функций Грина показано, что термодинамические функции кулоновской системы однозначно определяются одночастичными функциями Грина электронов и ядер вне рамок теории возмущений. На этой основе сформулированы условия самосогласования для термодинамических функций, которые определяют применимость используемых приближений для одночастичных функций Грина.

DOI: 10.31857/S0040364420050026

ВВЕДЕНИЕ

Наибольшее распространение в статистической термодинамике материальной среды получили два подхода, основанных на использовании так называемых химической и физической моделей [1]. Эти модели отличаются выбором “исходных частиц” для статистического описания. Исходными частицами в химической модели выступают “свободные” электроны, атомы, ионы, молекулы. Соотношение между ними определяется законом действующих масс (см., например, [2–4] и цитируемую там литературу). В свою очередь в качестве исходных частиц в физической модели рассматриваются электроны и ядра. При этом атомы, ионы, молекулы являются связанными состояниями электронов и ядер, которые образуются в результате их сильного взаимодействия, а свободные электроны отвечают состояниям рассеяния [5].

Физическая модель, в рамках которой вещество рассматривается как равновесная нерелятивистская система электронов и ядер, взаимодействующих между собой по закону Кулона (кулоновская система – КС), является наиболее адекватной моделью вещества в широкой области термодинамических параметров [1, 5]. Более того, физическая модель является основой для установления пределов применимости химической модели вещества (см. [6] и цитируемую там литературу). Тем не менее до настоящего времени при теоретическом исследовании термодинамических свойств веществ наибольшее распростра-

нение получила химическая модель. Помимо исторического аспекта развития представлений о структуре вещества, это связано с чрезвычайной сложностью теоретического исследования свойств КС. Корректное описание КС требует последовательного учета квантовых эффектов, приводящих к образованию связанных состояний. Необходимо также учитывать тождественность исходных частиц и экранирование кулоновского взаимодействия. Основой для таких исследований являются методы квантовой теории поля и соответствующая диаграммная техника теории возмущений по кулоновскому взаимодействию исходных частиц с использованием формализма функций Грина (ФГ) (см., например, [7, 8]). При этом термодинамический потенциал для пространственно однородной и изотропной КС является функционалом одночастичных ФГ (ОФГ) электронов и ядер. На этой основе может быть построена динамическая вариационная процедура Латтинжера–Ворда [9] и Каданова–Бейма [10]. Явный вид подобных функционалов представляет собой бесконечный функциональный ряд теории возмущений по межчастичному взаимодействию, поэтому для разрешения традиционной проблемы “обрыва” функциональных рядов теории возмущений необходима некоторая процедура для последовательного приближенного вычисления как ФГ, так и термодинамических функций КС (см. подробнее [11, 12]). Конкретные результаты на данном пути в основном ограничены рассмотрением предела низкой плотности и использованием статистики Больцмана [13–18]. Это обусловлено тем, что в соответствующих приближениях можно су-

шественно упростить функциональные ряды теории возмущений. Если для подсистемы ядер использование статистики Больцмана не вызывает сомнений вплоть до очень низких температур, то для электронной подсистемы вещества такое приближение может приводить к существенному искажению результатов при относительно низких температурах, когда связанные состояния заряженных частиц играют важную роль, как и эффекты, связанные с тождественностью электронов [19, 20]. В этой ситуации особое значение приобретает установление точных соотношений, связывающих ФГ и термодинамические функции КС, а также условий самосогласования при выборе тех или иных приближений для соответствующих функций.

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ КУЛОНОВСКОЙ СИСТЕМЫ И ОДНОЧАСТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ ГРИНА

Термодинамические свойства КС, находящейся в макроскопическом объеме V при температуре T (в энергетических единицах), полностью определяются термодинамическим потенциалом

$$\Omega(V, T, \{\mu_a\}) = -T \ln Z(V, T, \{\mu_a\}),$$

$$Z(V, T, \{\mu_a\}) = \text{Tr} \exp \left[- \left(\hat{H} - \sum_a \mu_a \hat{N}_a \right) / T \right]. \quad (1)$$

Здесь $Z(V, T, \{\mu_a\})$ – большая каноническая статистическая сумма, символ Tr обозначает операцию взятия следа соответствующего оператора, \hat{H} – гамильтониан рассматриваемой КС, который в представлении вторичного квантования имеет вид

$$\hat{H} = \hat{H}^{(0)} + \hat{U}^{\text{int}}, \quad \hat{H}^{(0)} = \sum_a \sum_{\rho\sigma} \epsilon_a(p) \hat{a}_{\rho\sigma}^+ \hat{a}_{\rho\sigma},$$

$$\hat{U}^{\text{int}} = \sum_{a,b} \hat{U}_{ab}, \quad (2)$$

$$\hat{U}_{ab} = \frac{1}{2V} \sum_{q \neq 0} \sum_{\{\rho\sigma\}} u_{ab}(q) \times$$

$$\times \hat{a}_{\rho_1+q/2, \sigma_1}^+ \hat{b}_{\rho_2-q/2, \sigma_2}^+ \hat{b}_{\rho_2+q/2, \sigma_2} \hat{a}_{\rho_1-q/2, \sigma_1}, \quad (3)$$

где $\hat{a}_{\rho\sigma}^+$ и $\hat{a}_{\rho\sigma}$ – соответственно операторы рождения и уничтожения в состоянии с импульсом $\hbar\mathbf{p}$ и проекцией спина σ для частиц сорта a , которые характеризуются массой m_a , зарядом $z_a e$, спином s_a и химическим потенциалом μ_a ; $\hat{N}_a = \sum_{\rho\sigma} \hat{a}_{\rho\sigma}^+ \hat{a}_{\rho\sigma}$ – оператор полного числа частиц сорта a ; $\epsilon_a(p) = \hbar^2 p^2 / 2m_a$ – энергия свободной частицы сорта a ; $u_{ab}(q) = 4\pi z_a z_b e^2 / q^2$ – фурье-компонента потенциала кулоновского взаимодействия частиц сортов a и b . При этом химические потенциалы μ_a

различных сортов частиц рассматриваются как формально независимые величины при учете условия квазинейтральности КС

$$\sum_a z_a e n_a = 0 \quad (4)$$

на конечном этапе вычислений физических величин (см. подробнее [21]). Здесь $n_a(T, \{\mu_b\}) = \langle \hat{N}_a \rangle / V = -V^{-1} (\partial \Omega / \partial \mu_a)_{V, T, \mu_b \neq \mu_a}$ – средняя плотность числа частиц сорта a в объеме V , угловые скобки обозначают усреднение с большим каноническим распределением Гиббса:

$$\langle \hat{A} \rangle = \text{Tr} \left\{ \exp \left[- \left(\left(\hat{H} - \sum_a \mu_a \hat{N}_a - \Omega \right) / T \right) \right] \hat{A} \right\}.$$

Отметим, что соотношения (1)–(4) имеют смысл только после перехода к термодинамическому пределу $\lim_T: V \rightarrow \infty, \langle \hat{N}_a \rangle \rightarrow \infty, n_a = \langle \hat{N}_a \rangle / V = \text{const}$ [22]. В частности, формула (1) после перехода к термодинамическому пределу принимает вид соотношения для давления $P(T, \{\mu_a\})$ в КС

$$P(T, \{\mu_a\}) = - \lim_T \Omega(V, T, \{\mu_a\}) / V.$$

При вычислении термодинамических функций в рамках диаграммной техники теории возмущений особое значение имеет методика частичного суммирования диаграмм определенного класса (вида). Такой подход и позволяет представить термодинамический потенциал как функционал ОФГ [9–12]. При этом, как уже было отмечено выше, возникает проблема “обрыва” соответствующего ряда, т.е. обоснования методов последовательного приближенного вычисления как ФГ, так и термодинамических функций КС. Тем не менее в теории плазмы широко применяется подобная процедура частичного суммирования диаграмм определенного класса при непосредственном разложении в ряд теории возмущений термодинамического потенциала $\Omega(V, T, \{\mu_a\})$ (см. подробнее [13–18]).

Для разрешения этой ситуации используем теорему вириала, согласно которой для давления в КС с гамильтонианом (2), (3) имеет место равенство [22]

$$P(T, \{\mu_a\}) = \frac{2}{3} \lim_T \frac{\langle \hat{H}^{(0)} \rangle}{V} + \frac{1}{3} \lim_T \frac{\langle \hat{U}^{\text{int}} \rangle}{V}. \quad (5)$$

Обратим внимание, что теорема вириала справедлива при использовании любого из распределений Гиббса для описания равновесных систем (см., например, [22]). Это обстоятельство является следствием того, что теорема вириала может быть получена непосредственно из стационарного уравнения Шредингера [23, 24]. Таким образом, соотношение (5) можно использовать как альтернативный способ для вычисления термо-

динамического потенциала Гиббса, а тем самым и любых термодинамических свойств КС.

Учтем далее, что величину средней кинетической энергии $\langle \hat{H}^{(0)} \rangle$ можно представить в виде

$$\langle \hat{H}^{(0)} \rangle = \sum_{\sigma} \sum_{\mathbf{p}} \epsilon_a(p) f_a(p, \sigma), \quad (6)$$

$$f_a(p, \sigma) = \langle \hat{a}_{\mathbf{p}\sigma}^+ \hat{a}_{\mathbf{p}\sigma} \rangle,$$

где $f_a(p, \sigma)$ – точная одночастичная функция распределения (среднее число заполнения) по импульсам $\hbar \mathbf{p}$ и проекциям спина σ для частиц сорта a , которая зависит также от температуры T и химических потенциалов $\{\mu_b\}$. Для системы не взаимодействующих частиц функция $f_a(p, \sigma)$ определяется распределениями Ферми–Дирака или Бозе–Эйнштейна в зависимости от значения спина s_a .

После перехода к термодинамическому пределу для нормальной нерелятивистской КС из (6) непосредственно следует

$$\lim_T \frac{\langle \hat{H}^{(0)} \rangle}{V} = (2s_a + 1) \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \epsilon_a(p) f_a(p, \sigma). \quad (7)$$

При этом для средней плотности n_a числа частиц сорта a справедливо равенство

$$n_a(T, \{\mu_b\}) = (2s_a + 1) \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} f_a(p, \sigma). \quad (8)$$

Дальнейшее рассмотрение будем проводить, используя формализм Каданова и Бейма [8], в рамках которого может быть проведено рассмотрение как равновесных, так и неравновесных свойств КС.

В этом случае одночастичная функция распределения $f_a(p, \sigma)$ непосредственно связана с одночастичной корреляционной функцией $g_a^<(p, \sigma; \omega)$:

$$f_a(p, \sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} g_a^<(p, \sigma; \omega),$$

$$g_a^<(p, \sigma; \omega) = \frac{i\theta_a}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt \exp(i\omega t) g_a^<(p, \sigma; t), \quad (9)$$

$$g_a^<(p, \sigma; t) = -i\theta_a \langle \hat{a}_{\mathbf{p}\sigma}^+(t) \hat{a}_{\mathbf{p}\sigma}(0) \rangle.$$

Здесь и далее величина θ_a принимает значение (+1) для бозонов и (–1) для фермионов, $\hat{A}(t)$ – оператор \hat{A} в представлении Гейзенберга: $\hat{A}(t) = \exp(i\hat{H}t/\hbar) \hat{A} \exp(-i\hat{H}t/\hbar)$.

Используя спектральное представление Ландау (см. подробнее [5, 25]), можно выразить ОФГ $g_a(p, \sigma; \omega)$ через спектральную функцию $A_a(p, \sigma; \omega)$:

$$g_a(p, \sigma; \omega) = \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha}{2\pi} A_a(p, \sigma; \alpha) \times \left\{ \frac{\varphi_a(\mu_a, T; \alpha)}{\omega - \alpha - i\delta} - \theta_a \frac{1 + \theta_a \varphi_a(\mu_a, T; \alpha)}{\omega - \alpha + i\delta} \right\}, \quad (10)$$

$$A_a(p, \sigma; \omega) = \frac{1}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt \exp(i\omega t) A_a(p, \sigma; t),$$

где $A_a(p, \sigma; t) = \langle [\hat{a}_{\mathbf{p}\sigma}(t), \hat{a}_{\mathbf{p}\sigma}^+(0)]_{\theta_a} \rangle$, $[\hat{A}, \hat{B}]_{\theta_a} \equiv \hat{A}\hat{B} - \theta_a \hat{B}\hat{A}$.

При этом спектральная и корреляционная функции связаны между собой соотношениями

$$g_a^<(p, \sigma; \omega) = \varphi_a(\mu_a, T; \omega) A_a(p, \sigma; \omega), \quad (11)$$

$$\varphi_a(\mu_a, T; \omega) = \{ \exp[(\hbar\omega - \mu_a)/T] - \theta_a \}^{-1}.$$

Таким образом, согласно (10), (11), между корреляционной функцией $g_a^<(p, \sigma; \omega)$ и ОФГ $g_a(p, \sigma; \omega)$ имеется взаимно однозначное соответствие при заданных значениях химических потенциалов $\{\mu_b\}$ и температуры T .

Кроме того, как показано в [8]:

$$\lim_T \frac{\langle \hat{U}^{\text{int}} \rangle}{V} = \frac{1}{2} \sum_a \sum_{\sigma} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\hbar\omega}{2\pi} [\hbar\omega - \epsilon_a(p)] g_a^<(p, \sigma; \omega). \quad (12)$$

В результате с учетом (5)–(12) приходим к выводу, что термодинамический потенциал Гиббса для КС однозначно определяется точными ОФГ для электронов и ядер (или соответствующими корреляционными функциями) вне рамок теории возмущений с помощью соотношения [26]

$$P(T, \{\mu_b\}) = \frac{1}{6} \sum_a \sum_{\sigma} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\hbar\omega}{2\pi} [\hbar\omega + 3\epsilon_a(p)] g_a^<(p, \sigma; \omega). \quad (13)$$

При этом, согласно (7), (12), внутренняя энергия на единицу объема $\epsilon_V(T, \{\mu_b\})$ для рассматриваемой КС также полностью определяется ОФГ электронов и ядер:

$$\epsilon_V(T, \{\mu_b\}) = \lim_T \frac{E}{V} = \frac{1}{2} \sum_a \sum_{\sigma} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\hbar\omega}{2\pi} [\hbar\omega + \epsilon_a(p)] g_a^<(p, \sigma; \omega). \quad (14)$$

Здесь $E = \langle \hat{H} \rangle = \langle \hat{H}^{(0)} \rangle + \langle \hat{U}^{\text{int}} \rangle$ – средняя (внутренняя) энергия КС.

Далее используем основное термодинамическое равенство (см., например, [27])

$$\epsilon_V(T, \{\mu_b\}) = Ts_V(T, \{\mu_b\}) - P(T, \{\mu_b\}) + \sum_a \mu_a n_a(T, \{\mu_b\}). \quad (15)$$

Соотношение (15) справедливо для равновесной КС, которая характеризуется энтропией на единицу объема $s_V(T, \{\mu_b\}) = \lim_{T \rightarrow 0} S/V$, где S – энтропия КС, занимающей объем V .

Учитывая соотношения (7), (10), (12), находим, что энтропия на единицу объема s_V как функция температуры T и химических потенциалов $\{\mu_b\}$ также однозначно определяется ОФГ электронов и ядер:

$$s_V(T, \{\mu_b\}) = \frac{1}{3T} \sum_a \sum_{\sigma} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \times \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\hbar\omega}{2\pi} [2\hbar\omega + 3\epsilon_a(p) - 3\mu_a] g_a^{\leq}(p, \sigma; \omega). \quad (16)$$

Таким образом, проблема вычисления плотности, давления, внутренней энергии, энтропии КС на основе большого канонического распределения Гиббса сводится к определению ОФГ для электронов и ядер вне рамок теории возмущений. Это означает, что вместо построения термодинамического потенциала $\Omega(V, T, \{\mu_a\})$ как функционала ОФГ $\Omega(V, T, \{\mu_a\}) = \Omega(V, T, \{\mu_a\}; \{\{g_b\}\})$ в рамках теории возмущений по межчастичному взаимодействию для определения термодинамических функций КС задача сводится к вычислению ОФГ (или корреляционных (спектральных) функций) для электронов и ядер.

УСЛОВИЯ САМОСОГЛАСОВАНИЯ ДЛЯ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ КУЛОНОВСКОЙ СИСТЕМЫ

Однако вычисление ОФГ электронов и ядер в равновесной КС является не менее сложной задачей. Дело в том, что даже при наличии малого параметра, определяемого отношением энергии взаимодействия между частицами к их характерной энергии, остается нерешенной проблема “обрыва” бесконечных функциональных рядов теории возмущений. Другими словами, необходима некоторая процедура для последовательно приближенного вычисления ФГ.

Суть этой проблемы хорошо видна на примере уравнения Дайсона, которое обычно применяется для вычисления ОФГ с использованием собственно-энергетической функции $\Sigma_a(p, \sigma; \omega)$ (см. подробнее [3, 7, 8]):

$$g_a(p, \sigma; \omega) = g_a^{(0)}(p, \sigma; \omega) + g_a^{(0)}(p, \sigma; \omega) \Sigma_a(p, \sigma; \omega) g_a(p, \sigma; \omega), \quad (17)$$

где $g_a^{(0)}(p, \sigma; \omega) = \{\hbar(\omega \mp i0) - \epsilon_a(p)\}^{-1}$ – ОФГ для идеального газа частиц сорта a .

Именно для собственно-энергетической функции $\Sigma_a(p, \sigma; \omega)$ традиционно используется то или иное приближение в рамках теории возмущений по межчастичному взаимодействию при вычислении ОФГ. Однако следует иметь в виду, что уравнение Дайсона является следствием процедуры частичного суммирования диаграмм определенного класса. С этой точки зрения собственно-энергетическая функция является функционалом ОФГ: $\Sigma_a = \Sigma_a[\{g_b\}]$, а уравнение Дайсона (17) – функциональным, а не алгебраическим уравнением с очевидным решением $g_a(p, \sigma; \omega) = \{\hbar(\omega \mp i0) - \epsilon_a(p) - \Sigma_a(p, \sigma; \omega)\}^{-1}$.

Для установления требований к выбору тех или иных приближений для ОФГ учтем, что при исследовании функционала $\Omega(V, T, \{\mu_a\}; \{\{g_b\}\})$ предпринимаются попытки построения термодинамически согласованных приближений (см. [28, 29] и цитируемую там литературу). В этой связи отметим, что целью вычисления ОФГ является ее последующее использование для определения термодинамических функций КС. Поэтому вполне естественно предположить, что искомое условие самосогласования непосредственно связано с термодинамическими соотношениями.

Действительно, как следует из проведенного рассмотрения, чтобы выбрать “подходящее” приближение для ОФГ, необходимо согласованно определить давление $P(T, \{\mu_b\})$ (13), плотности числа электронов и ядер $n_a(T, \{\mu_b\})$ (8), (9), а также внутреннюю энергию на единицу объема $\epsilon_V(T, \{\mu_b\})$ (14) и энтропию на единицу объема $s_V(T, \{\mu_b\})$ (16).

При этом, согласно законам термодинамики, давление $P(T, \{\mu_b\})$ в КС должно удовлетворять дифференциальному соотношению [30]

$$dP(T, \{\mu_b\}) = s_V(T, \{\mu_b\}) dT + \sum_a n_a(T, \{\mu_b\}) d\mu_a,$$

из которого непосредственно следует

$$s_V(T, \{\mu_b\}) = (\partial P(T, \{\mu_b\}) / \partial T)_{\{\mu_b\}}, \quad n_a(T, \{\mu_b\}) = (\partial P(T, \{\mu_b\}) / \partial \mu_a)_{T, \mu_b \neq \mu_a}. \quad (18)$$

Таким образом, функции $P(T, \{\mu_b\})$, $n_a(T, \{\mu_b\})$, $s_V(T, \{\mu_b\})$, найденные по выбранному приближению для ОФГ $g_a(p, \sigma; \omega)$ (корреляционных функций $g_a^{\leq}(p, \sigma; \omega)$), должны удовлетворять со-

отношениям (18). Если это условие самосогласования не выполняется, то соответствующее приближение для ОФГ является некорректным.

Нетрудно убедиться, что в приближении идеального газа спектральная функция равна $A_a^{(0)}(p, \sigma; \omega) = 2\pi\delta(\hbar\omega - \epsilon_a(p))$ [6], поэтому, например, давление $P^{(0)}(T, \{\mu_a\})$ можно представить в виде

$$P_a^{(0)}(T, \{\mu_a\}) = \frac{2}{3} \sum_a \epsilon_V^{(0)}(T, \mu_a) = T^{5/2} \sum_a \Phi_a(\mu_a/T),$$

$$\Phi_a(\alpha) = \frac{2\sqrt{2}m_a^{3/2}}{3\pi^2\hbar^3} \int_0^\infty \frac{dx x^{3/2}}{\exp(x - \alpha) - \theta_a}, \quad (19)$$

что соответствует известным результатам [30]. Аналогично, используя явный вид спектральной функции $A_a^{(0)}(p, \sigma; \omega)$, в приближении идеального газа можно найти плотность числа частиц $n_a^{(0)}(T, \{\mu_b\})$ и энтропию на единицу объема $s_V^{(0)}(T, \{\mu_b\})$, которые с учетом (19) удовлетворяют условиям (18).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленные результаты в отличие от традиционного подхода, который основан на применении теории возмущений по межчастичному взаимодействию для термодинамического потенциала КС, позволяют основное внимание уделить вопросу о вычислении ОФГ электронов и ядер. При этом имеется возможность для проверки получаемых приближений для термодинамических функций КС на основе условий самосогласования (18).

Преимущество такого подхода связано с тем, что ОФГ содержат как динамическую информацию о поведении электрона и ядра в многочастичной системе, так и всю квантово-статистическую информацию о равновесной КС. Кроме того, в рамках приближения локального термодинамического равновесия соответствующие результаты для ОФГ могут быть использованы при рассмотрении неравновесных явлений в КС.

Дальнейшее развитие полученных выше результатов связано с построением самосогласованных приближений для ФГ в рамках предложенной в [31] схемы, основанной на использовании точных уравнений движения. Кроме того, соответствующие приближения должны удовлетворять точным правилам сумм для моментов ОФГ (см. подробнее [32]).

Автор выражает благодарность участникам семинара Теоретического отдела им. Л.М. Бибермана ОИВТ РАН за полезное обсуждение работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ebeling W., Kraeft W.D., Kremp D.* Theory of Bound States and Ionization Equilibrium in Plasmas and Solids. Berlin: Academic-Verlag, 1976. 260 p.
2. *Kudryavtsev A.B., Jameson R.F., Linert W.* The Law of Mass Action. Berlin: Springer, 2001. 328 p.
3. *Анфельбаум Е.М.* Расчет теплофизических свойств плазмы титана и цинка // ТВТ. 2017. Т. 55. № 1. С. 3.
4. *Хомкин А.Л., Шумихин А.С.* Особенности учета атом-атомного и ион-атомного взаимодействия в газах при наличии процессов диссоциации // ТВТ. 2019. Т. 57. № 1. С. 4.
5. *Kraeft W.D., Kremp D., Ebeling W., Ropke G.* Quantum Statistics of Charged Particle Systems. N.Y.: Plenum, 1986. 298 p.
6. *Бобров В.Б.* О статистической теории разреженного газа в кулоновской модели вещества. Тождественность частиц и эффективный потенциал взаимодействия исходных атомов // ТВТ. 2017. Т. 55. № 2. С. 179.
7. *Абрикосов А.А., Горьков Л.П., Дзялошинский И.Е.* Методы квантовой теории поля в статистической физике. М.: ГИФМЛ, 1962. 444 с.
8. *Kadanoff L.P., Baym G.* Quantum Statistical Mechanics. Green's Function Methods in Equilibrium and Non-equilibrium Problems. N.Y.: Benjamin, 1962. 203 p.
9. *Luttinger J.M., Ward J.C.* Ground-state Energy of a Many-fermion System. II // Phys. Rev. 1960. V. 118. № 5. P. 1417.
10. *Baym G., Kadanoff L.P.* Conservation Laws and Correlation Functions // Phys. Rev. 1961. V. 124. № 2. P. 287.
11. *Kotliar G., Savrasov S.Y., Haule K., Oudovenko V.S., Parcollet O., Marianetti C.A.* Electronic Structure Calculations with Dynamical Mean-field theory // Rev. Mod. Phys. 2006. V. 78. № 3. P. 865.
12. *Blöchl P.E., Pruschke T., Potthoff M.* Density-matrix Functionals from Green's Functions // Phys. Rev. B. 2013. V. 88. № 20. P. 205139.
13. *Старостин А.Н., Перух В.К.* Сходящееся уравнение состояния слабонеидеальной плазмы водорода без таинств // ЖЭТФ. 2005. Т. 127. № 1. С. 186.
14. *Alasteuey A., Ballenegger V., Cornu F., Martin Ph.A.* Exact Results for Thermodynamics of the Hydrogen Plasma: Low-temperature Expansions beyond Saha Theory // J. Stat. Phys. 2008. V. 130. № 6. P. 1119.
15. *Alasteuey A., Ballenegger V.* Pressure of a Partially Ionized Hydrogen Gas: Numerical Results from Exact Low Temperature Expansions // Contrib. Plasma Phys. 2010. V. 50. № 1. P. 46.
16. *Omarbakieva Y.A., Fortman C., Ramasanov T.S., Ropke G.* Cluster Virial Expansion for the Equation of State of Partially Ionized Hydrogen Plasma // Phys. Rev. E. 2010. V. 82. № 2. P. 026407.
17. *Ebeling W., Kraeft W.D., Ropke G.* Bound States in Coulomb Systems – Old Problems and New Solutions // Contrib. Plasma Phys. 2012. V. 52. № 1. P. 7.
18. *Alasteuey A., Ballenegger V.* Atomic Ionization and Molecular Dissociation in a Hydrogen Gas within the Physical Picture // Contrib. Plasma Phys. 2012. V. 52. № 1. P. 95.

19. *Bobrov V.B., Trigger S.A., Ebeling W.* Identity Electrons and Ionization Equilibrium // *EPL (Europhys. Lett.)*. 2011. V. 95. № 2. P. 25001.
20. *Бобров В.Б.* О неоднородной плотности электронов в статическом поле ядер // *ТМФ*. 2020. Т. 202. № 1. С. 98.
21. *Bobrov V.B., Sokolov I.M., Trigger S.A.* Necessary Conditions of the Equivalence of Canonical and Grand Canonical Ensembles in Coulomb System Thermodynamics // *Phys. Plasmas*. 2012. V. 19. № 6. P. 062101.
22. *Зубарев Д.Н.* Неравновесная статистическая термодинамика. М.: Наука, 1971. 416 с.
23. *Bobrov V.B., Trigger S.A., van Heijst G.J.F., Schram P.P.J.M.* Virial Theorem for an Inhomogeneous Medium, Boundary Conditions for the Wave Functions, and Stress Tensor in Quantum Statistics // *Phys. Rev. E*. 2010. V. 82. № 1. P. 010102 (R).
24. *Bobrov V.B., Trigger S.A., Zagorodny A.* Virial Theorem, One-Particle Density Matrix, and Equilibrium Condition in an External Field // *Phys. Rev. A*. 2010. V. 82. № 4. P. 044105.
25. *Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Статистическая физика. Ч. II. Теория конденсированного состояния. М.: Наука, 1978. 448 с.
26. *Bobrov V.B., Trigger S.A.* Virial Theorem and Gibbs Thermodynamic Potential for Coulomb Systems // *Phys. Plasmas*. 2014. V. 21. № 10. P. 100703.
27. *Balescu R.* Equilibrium and Nonequilibrium Statistical Mechanics. N.Y.—London: Wiley, 1975. 756 p.
28. *Potthoff M., Aichhorn M., Dahnken C.* Variational Cluster Approach to Correlated Electron Systems in Low Dimensions // *Phys. Rev. Lett.* 2003. V. 91. № 20. P. 206402.
29. *Potthoff M., Balzer M.* Self-Energy-Functional Theory for Systems of Interacting Electrons with Disorder // *Phys. Rev. B*. 2007. V. 75. № 12. P. 125112.
30. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Статистическая физика. Ч. 1. М.: Наука, 1976. 584 с.
31. *Озрин В.Д.* Цепочка уравнений для двух временных температурных функций Грина // *ТМФ*. 1970. Т. 4. № 1. С. 66.
32. *Vogt M., Zimmermann R., Needs R.J.* Spectral Moments in the Homogeneous Electron Gas // *Phys. Rev. B*. 2004. V. 69. № 4. P. 045113.