

УДК 532.529

## ДВУХФАЗНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ ГАЗА С ТВЕРДЫМИ ЧАСТИЦАМИ

© 2020 г. А. Ю. Вараксин<sup>1, 2, \*</sup>

<sup>1</sup>Объединенный институт высоких температур РАН, Москва, Россия

<sup>2</sup>Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

\*E-mail: varaksin\_a@mail.ru

Поступил в редакцию 22.10.2019 г.

После доработки 10.05.2020 г.

Принят к публикации 18.06.2020 г.

Выполнен обзор расчетно-теоретических и экспериментальных работ, посвященных изучению характеристик пограничных слоев газа с твердыми частицами. Рассмотрены особенности движения частиц в ламинарных и турбулентных пограничных слоях, а также их обратное влияние на течение газа. Проанализированы имеющиеся исследования устойчивости ламинарного пограничного слоя и влияния частиц на ламинарно-турбулентный переход.

DOI: 10.31857/S0040364420050117

### ОГЛАВЛЕНИЕ

#### Введение

#### 1. Характеристики инерционности частиц в пограничном слое

- 1.1. Число Стокса (в осредненном движении)
- 1.2. Другие безразмерные параметры
- 1.3. Расчет движения частиц
  - 1.3.1. Сила аэродинамического сопротивления
  - 1.3.2. Сила Сэфмена
  - 1.3.3. Сила Магнуса
  - 1.3.4. Момент вращения
  - 1.3.5. Коррекция сил вблизи стенки

#### 2. Двухфазный ламинарный пограничный слой

##### 2.1. Движение частиц в ламинарном пограничном слое

- 2.1.1. Расчетно-теоретические исследования
- 2.1.2. Экспериментальные исследования

##### 2.2. Влияние частиц на ламинарный пограничный слой

- 2.2.1. Расчетно-теоретические исследования
- 2.2.2. Экспериментальные исследования

#### 3. Устойчивость пограничного слоя с частицами

##### 3.1. Устойчивость ламинарного пограничного слоя с частицами

- 3.1.1. Генерация возмущений (турбулентности) предельно малоинерционными частицами
- 3.1.2. Диссипация возмущений (турбулентности) относительно малоинерционными частицами
- 3.1.3. Генерация возмущений (турбулентности) крупными частицами

##### 3.2. Влияние частиц на ламинарно-турбулентный переход

- 3.2.1. Расчетно-теоретические исследования
- 3.2.2. Экспериментальные исследования

#### 4. Двухфазный турбулентный пограничный слой

##### 4.1. Движение частиц в турбулентном пограничном слое

- 4.1.1. Расчетно-теоретические исследования
- 4.1.2. Экспериментальные исследования

##### 4.2. Влияние частиц на турбулентный пограничный слой

- 4.2.1. Расчетно-теоретические исследования
- 4.2.2. Экспериментальные исследования

#### Заключение

#### Список литературы

### ВВЕДЕНИЕ

Присутствие твердых частиц в потоке может приводить к значительному (зачастую многократному) увеличению тепловых потоков при движении двухфазных теплоносителей в трактах энергетических установок, а также к эрозионному износу обтекаемой поверхности различных летательных аппаратов, движущихся в запыленной (или дождевой) атмосфере [1–14]. Перечисленные эффекты вызываются совместным изменением целого ряда факторов: структуры набегающего на тело двухфазного потока [15–23], характеристик развивающегося на обтекаемом теле пограничного слоя [24], параметров турбулентных следов и вихревых зон [25–37], шероховатостью поверхности и соударениями частиц с поверхностью, а также многими другими.

Присутствие дисперсной примеси в потоке сплошной среды может оказывать как турбулизирующее, так и ламинаризирующее влияние. Первая теоретическая модель вязкости сильно разбавленных суспензий в случае не взаимодействующих между собой частиц предложена А. Эйнштейном [38], который показал, что вязкость суспензии является следствием возмущений, вносимых твердыми частицами в дисперсионную среду. На протяжении многих десятилетий интенсивно развивается направление, связанное с ламинаризацией потока жидкости путем добавления в нее полимерных волокон, выступающих в качестве противотурбулентных присадок. Этот давно обнаруженный эффект (см., например, [39]) пытаются использовать, в частности, для увеличения пропускной способности нефте- и нефтепродуктопроводов.

Впервые двухфазные (газ с твердыми частицами) пограничные слои стали исследовать в начале 60-х гг. прошлого века практически одновременно с развитием двухжидкостных подходов к моделированию [40]. Эти работы посвящены изучению одномерного нестационарного течения запыленного газа над пластиной, движущейся с переменной скоростью, а также стационарного пограничного слоя, развивающегося над полубесконечной плоской пластиной. Для однофазной жидкости аналогичные проблемы часто называют задачами Рэлея (для бесконечной пластины, мгновенно приводимой в движение с некоторой постоянной скоростью), Стокса (для пластины, периодически колеблющейся в плоскости ее расположения) и Блазиуса (для стационарного пограничного слоя на полубесконечной плоскости). Для случая несжимаемой жидкости и стоксовых частиц решение проблем Рэлея и Стокса получено в [41–43] с использованием преобразования Лапласа.

Интенсивность процессов, протекающих в двухфазных пограничных слоях, зависит от инерционности и концентрации частиц. Следует заметить, что инерционность частиц при их движении в пограничном слое напрямую определяется геометрией и параметрами течения и может изменяться для одних и тех же частиц в очень широких пределах [3, 5]. Наличие различных характерных времен (длин) несущего потока (вдоль поверхности стенки, собственно турбулентных масштабов и т.д.) сильно осложняет изучение таких потоков и обобщение данных. Профиль концентрации частиц в пограничном слое, где имеют место высокие градиенты скорости и температуры (в случае неизотермического течения), может носить сложный характер, а значение концентрации частиц многократно превышать начальное значение в невозмущенном потоке. Причиной здесь являются торможение частиц в пристенной области, взаимодействие частиц со стенкой, а также межчастичные столкновения.

К основным задачам изучения двухфазных пограничных слоев относятся [3, 5]: 1) исследование особенностей движения частиц в пограничном слое; 2) установление обратного влияния частиц на характеристики несущего газа.

Изучение воздействия частиц на пограничное течение является далеко не ординарной задачей. На сегодняшний день представляется очевидным тот факт, что влияние дисперсной фазы на пристенное течение может сказываться широко. Во-первых, дисперсная фаза может оказывать воздействие на течение в пограничном слое посредством модификации набегающего потока. Во-вторых, частицы оказывают непосредственное влияние на течение в пограничном слое вследствие своей инерционной природы, а именно наличия динамического и теплового (в случае неизотермического потока) скольжения.

В настоящем обзоре описаны и проанализированы результаты расчетно-теоретических и экспериментальных работ, посвященных изучению поведения частиц в пограничных слоях и их влияния на параметры несущей фазы.

## 1. ХАРАКТЕРИСТИКИ ИНЕРЦИОННОСТИ ЧАСТИЦ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

К важнейшим характеристикам инерционности частиц, движущихся в пограничных слоях, относятся локальное число Стокса в осредненном движении, числа Стокса, построенные по толщине пограничного слоя и координате стенки, числа Рейнольдса, построенные по диаметру частиц и толщине пограничного слоя, длина релаксации частиц, параметр дрейфа и другие.

### 1.1. Число Стокса (в осредненном движении)

Частицы характеризуются инерционностью, вследствие чего их движение отличается от движения несущего их газового потока. Скорость несущего газа на стенке равна нулю (гипотеза прилипания Ньютона), т.е.  $U_{xw} = 0$ . Частицы попадают в пограничный слой со скоростью  $V_{x\infty}$ . В первом приближении можно положить, что их скорость равна соответствующей скорости для газа, т.е.  $V_{x\infty} \approx U_{x\infty}$  (рис. 1). Далее требуется некоторое время, за которое происходит релаксация скоростей фаз ( $V_{xw} \rightarrow U_{xw} = 0$ ). Область, в которой происходит торможение частиц, называется релаксационной областью пограничного слоя или длиной релаксации  $l_r$ .

Важнейшим параметром, характеризующим инерционность частиц при их движении в пограничном слое, является локальное число Стокса в осредненном движении  $Stk_r$ . Оно характеризует процесс релаксации осредненных скоростей газа и частиц вблизи поверхности и определяется как

$$Stk_f = \frac{\tau_{p0}}{T_f} = \frac{(\rho_p d_p^2) / 18\mu}{x / U_{x\infty}}, \quad (1)$$

где  $\tau_{p0}$  – время динамической релаксации стоксовой частицы,  $T_f$  – характерное время несущей фазы в осредненном движении,  $\rho_p$  – плотность материала частицы,  $d_p$  – диаметр частицы,  $\mu$  – динамическая вязкость несущей среды,  $x$  – расстояние от критической точки тела вниз по потоку до рассматриваемого сечения в пограничном слое.

В случае нестоксовых частиц вместо  $\tau_{p0}$  в (1) необходимо использовать соответствующее время динамической релаксации частиц

$$\tau_p = \frac{\tau_{p0}}{C(Re_p)},$$

где  $C(Re_p)$  – поправочная функция, учитывающая отклонение закона движения частицы от закона Стокса;  $Re_p$  – число Рейнольдса частицы.

Необходимо отметить, что в случае высокоскоростного потока для определения аэродинамического сопротивления частицы и времени ее релаксации необходимо вводить поправочные функции, учитывающие влияние числа Маха.

Рассмотрим два предельных случая. Если  $Stk_f \rightarrow 0$ , то частицы являются малоинерционными и длина релаксации  $l_r \rightarrow 0$ . В другом предельном случае крупных частиц  $Stk_f \rightarrow \infty$  и  $l_r \rightarrow \infty$ .

Проведем простые оценки длины релаксации частиц различного диаметра. Для этого воспользуемся соотношением (1) и сделаем следующие допущения: 1) частицы являются стоксовыми; 2) частицы обладают единичной плотностью, т.е.  $\rho_p = 1000 \text{ кг/м}^3$ ; 3) релаксация скоростей частиц заканчивается ( $x = l_r$ ) при выполнении условия  $Stk_f = 0.2$ ; 4) динамическая вязкость несущего газа постоянна и равна  $\mu = 18 \times 10^{-6} \text{ кг/(м с)}$ .

На рис. 2 приведены рассчитанные с учетом принятых допущений по соотношению (1) длины релаксаций относительно малоинерционных частиц в зависимости от их диаметра и скорости набегающего потока  $l_r = f(d_p, U_{x\infty})$ . Видно, что при  $U_{x\infty} = 5 \text{ м/с}$  для частиц  $d_p = 1 \text{ мкм}$  длина релаксации равна  $l_r \approx 0.1 \text{ мм}$ , а для частиц  $d_p = 100 \text{ мкм}$  она увеличивается на четыре порядка и становится равной  $l_r \approx 1 \text{ м}$ .

### 1.2. Другие безразмерные параметры

Для анализа движения частиц внутри горизонтальных и вертикальных пограничных слоев используют целый ряд безразмерных параметров: 1) параметр дрейфа  $\gamma$ ; 2) число Стокса  $Stk_\delta$ ,

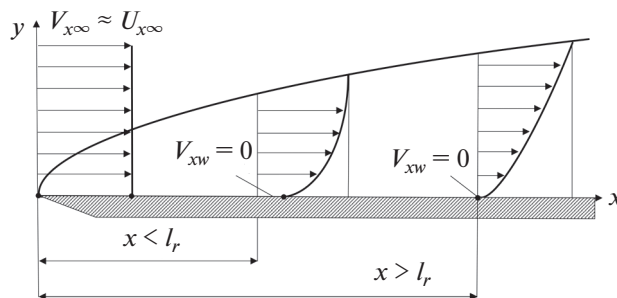


Рис. 1. Схема торможения инерционных частиц в пограничном слое, развивающемся на плоской пластине.

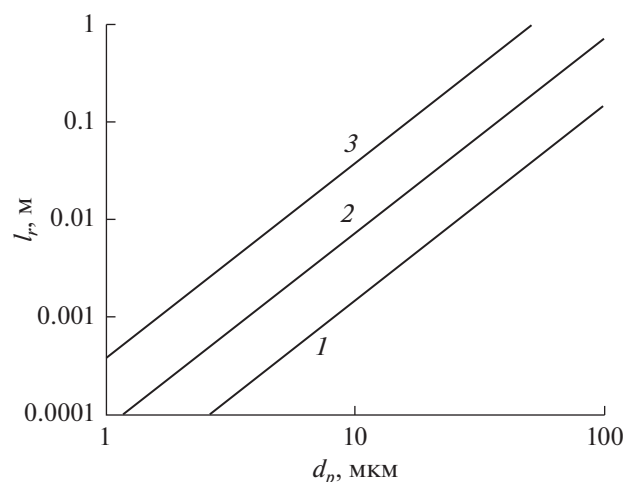


Рис. 2. Зависимости длины релаксации частиц от их диаметра для различных скоростей набегающего потока: 1 –  $U_{x\infty} = 1 \text{ м/с}$ , 2 – 5, 3 – 25.

построенное по толщине пограничного слоя; 3) число Стокса  $Stk^+$ , построенное в координатах стенки; 4) число Фруда  $Fr_\delta$ , построенное по толщине пограничного слоя; 5) число Рейнольдса  $Re_\delta$ , построенное по скорости набегающего потока и толщине пограничного слоя; 6) число Рейнольдса частицы  $Re_p$ , построенное по относительной скорости между фазами и диаметру частиц.

Выражения для перечисленных безразмерных параметров имеют вид (например, [44])

$$\gamma = \frac{W_x}{u_*},$$

$$Stk_\delta = \frac{\tau_p}{\tau_\delta} = \frac{\tau_p}{(\delta/u_*)},$$

$$Stk^+ = \frac{\tau_p}{\tau^+} = \frac{\tau_p}{(v/u_*^2)},$$

$$Fr_\delta = \frac{u_*^2}{g\delta},$$

$$\text{Re}_\delta = \frac{U_{x\infty} \delta}{\nu},$$

$$\text{Re}_p = \frac{|W_x| d_p}{\nu},$$

где  $W_x$  — относительная скорость между фазами,  $u_*$  — динамическая скорость,  $\delta$  — толщина пограничного слоя,  $\nu$  — кинематическая вязкость,  $g$  — гравитационное ускорение.

### 1.3. Расчет движения частиц

Расчет движения частиц в пограничных слоях осуществляется интегрированием уравнений их движения в известном (или предварительно рассчитанном) поле скоростей газа. Обычно принимаются следующие допущения: 1) частицы являются твердыми сферами одинакового диаметра  $d_p$  и плотности  $\rho_p$ ; 2) столкновения между частицами не учитываются ( $\Phi \ll 1$ ,  $\Phi$  — объемная концентрация частиц); 3) не учитывается сила тяжести частиц при малой скорости витания ( $\tau_p g \ll V_x$ ); 4) не учитываются силы плавучести, Бассе, присоединенной массы, так как они на порядки меньше силы аэродинамического сопротивления в случае  $\rho_p \gg \rho$  ( $\rho$  — плотность газа) [45, 46].

В пограничных слоях имеют место высокие градиенты осредненной скорости газа и интенсивное вращение частиц, вызываемое их столкновениями со стенкой, поэтому подъемными силами вследствие сдвига скорости несущей фазы и вращения частиц обычно не пренебрегают.

С учетом сделанных допущений уравнения движения частицы принимают следующий вид:

$$\frac{d\mathbf{x}_p}{d\tau} = \mathbf{v},$$

$$m_p \frac{d\mathbf{v}}{d\tau} = \mathbf{F}_D + \mathbf{F}_S + \mathbf{F}_M,$$

$$I \frac{d\boldsymbol{\omega}_p}{d\tau} = \mathbf{T},$$

где  $\mathbf{x}_p$  — вектор координаты (радиус-вектор) частицы;  $\mathbf{v}$  — вектор мгновенной линейной скорости частицы;  $\boldsymbol{\omega}_p$  — вектор угловой скорости частицы;  $m_p$  — масса частицы ( $m_p = \pi \rho_p d_p^3 / 6$ );  $I$  — момент инерции частицы ( $I = m_p d_p^2 / 10$ );  $\mathbf{F}_D$  — сила аэродинамического сопротивления;  $\mathbf{F}_S$  — подъемная сила, обусловленная сдвигом осредненной скорости (сила Сэфмена);  $\mathbf{F}_M$  — подъемная сила, вызванная вращением частицы (сила Магнуса);  $\mathbf{T}$  — момент вращения, действующий на частицу.

**1.3.1. Сила аэродинамического сопротивления.** Причиной возникновения этой силы является

разница скоростей газа и движущейся в нем частицы. Выражение для силы аэродинамического сопротивления имеет вид

$$\mathbf{F}_D = C_D \frac{\rho}{2} \frac{\pi d_p^2}{4} |\mathbf{u} - \mathbf{v}| (\mathbf{u} - \mathbf{v}),$$

где  $\mathbf{u}$  — вектор мгновенной линейной скорости газа в месте расположения частицы;  $C_D$  — коэффициент аэродинамического сопротивления, определяемый как

$$C_D = \frac{24}{\text{Re}_p} C(\text{Re}_p).$$

Поправочная функция  $C(\text{Re}_p)$  учитывает влияние сил инерции на время релаксации нестоксовой частицы [47]

$$C = 1 + \text{Re}_p^{2/3} / 6,$$

где число Рейнольдса частицы  $\text{Re}_p = \frac{|\mathbf{u} - \mathbf{v}| d_p}{\nu}$ .

**1.3.2. Сила Сэфмена.** Данная сила возникает из-за неоднородности профиля осредненной скорости газа [48]. Разница относительных скоростей обтекания частицы с различных сторон приводит к возникновению перепада давления. Движение частицы осуществляется в сторону пониженного давления. Выражение для силы Сэфмена имеет вид [49]

$$\mathbf{F}_S = C_S \frac{\rho}{2} \frac{\pi d_p^3}{4} \{(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \times \boldsymbol{\omega}\},$$

где  $\boldsymbol{\omega} = 1/2(\nabla \times \mathbf{u})$  — вектор угловой скорости газа. Поправочная функция  $C_S$  учитывает отличие записи от классической формулы Сэфмена:

$$C_S = \frac{4.1126}{\text{Re}_s^{0.5}} C(\text{Re}_p, \text{Re}_s),$$

где число Рейнольдса сдвигового потока  $\text{Re}_s = \frac{|\boldsymbol{\omega}| d_p^2}{\nu}$ .

Поправочная функция  $C(\text{Re}_p, \text{Re}_s)$ , учитывающая режим обтекания частицы, обычно имеет вид

$$C = \begin{cases} (1 - 0.3314\beta^{1/2}) \times \\ \times \exp(-\text{Re}_p/10) + 0.3314\beta^{1/2}, & \text{Re}_p \leq 40, \\ 0.0524\beta^{1/2} \text{Re}_p^{1/2}, & \text{Re}_p > 40. \end{cases}$$

Здесь параметр  $\beta$  определяется как

$$\beta = \frac{|\boldsymbol{\omega}| d_p}{2|\mathbf{u} - \mathbf{v}|} = \frac{1}{2} \frac{\text{Re}_s}{\text{Re}_p}.$$

**1.3.3. Сила Магнуса.** Причиной возникновения этой силы является вращение частицы. Вращаясь, частица увлекает за собой газ. В результате

на той стороне, где направления обтекания и вращения элементов газа совпадают, давление становится пониженным по сравнению с областью, где эти направления противоположны. Таким образом, частица будет перемещаться в сторону пониженного давления. Выражение для силы Магнуса имеет вид [50]

$$F_M = C_M \frac{\rho}{2} \frac{\pi d_p^2}{4} \frac{|\mathbf{u} - \mathbf{v}|}{|\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_p|} \{(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \times (\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_p)\}.$$

Поправочную функцию  $C_M(Re_s/Re_p)$  для разных диапазонов чисел Рейнольдса представим как [51, 52]

$$C_M = \begin{cases} Re_s/Re_p, & Re_p \leq 1, \\ 0.45 + (Re_s/Re_p - 0.45) \times \\ \times \exp(-0.05684 Re_s^{0.4} Re_p^{0.3}), & 1 < Re_p < 140. \end{cases}$$

**1.3.4. Момент вращения.** Возникновение момента вращения обусловлено наличием вязкости газа. Выражение для момента вращения имеет вид

$$\mathbf{T} = C_T \frac{\rho}{2} \left(\frac{d_p}{2}\right)^5 |\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_p| (\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_p),$$

где поправочную функцию  $C_T(Re_s)$  представим как [51, 53, 54]

$$C_T = \begin{cases} 64\pi/Re_s, & Re_s \leq 32, \\ 12.9/Re_s^{0.5} + 128.4/Re_s, & 32 < Re_s < 1000. \end{cases}$$

**1.3.5. Коррекция сил вблизи стенки.** Отметим, что имеется значительное количество работ, в которых авторы пытаются изучить влияние близости стенки ( $d_p/l \leq 5$ , где  $l$  – расстояние до ближайшей стенки) на величины аэродинамической силы и подъемной силы Сэфмена. Так, были предложены корректировочные функции для силы аэродинамического сопротивления частиц, движущихся параллельно [55] и перпендикулярно [56] стенке, а также для подъемной силы [57].

В более поздней работе [58] путем прямого численного моделирования с использованием лагранжевого траекторного подхода для пристеночной области показано, что использование известных корректировочных соотношений для силы сопротивления и подъемной силы приводит к лишь незначительному влиянию на профили концентрации частиц, осредненные и пульсационные составляющие (продольную, нормальную и поперечную) скоростей газа и частиц, а также напряжений Рейнольдса. В указанном исследовании межчастичные столкновения не принимались во внимание, а инерционность дисперсной фазы варьировалась в диапазоне  $\tau_p^+ = 1.2-27.1$  ( $\tau_p^+ = \tau_p/\tau^+$ ,  $\tau^+ = v/u_*^2$  – время в координатах стенки).

Однако в [59] для вертикального турбулентного пограничного слоя найдено, что коррекции аэродинамической и подъемной сил (предложенные в [60, 61]) уменьшают скорость осаждения малоинерционных частиц ( $Stk^+ < 5$ ) и увеличивают ее для частиц, обладающих большой инерцией ( $Stk^+ \approx 20$ ).

## 2. ДВУХФАЗНЫЙ ЛАМИНАРНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ

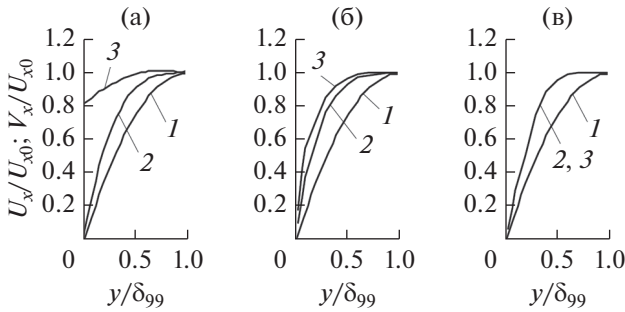
### 2.1. Движение частиц в ламинарном пограничном слое

Движение частиц в ламинарном пограничном слое в значительной степени определяется наличием динамического скольжения относительно несущего газа. В релаксационной области распределение осредненных скоростей частиц отличается от соответствующего распределения для газа. Торможение частиц в пристенной области и действие поперечных сил, приводящих к миграции частиц в направлении стенки, являются физическими механизмами роста их концентрации в пограничном слое.

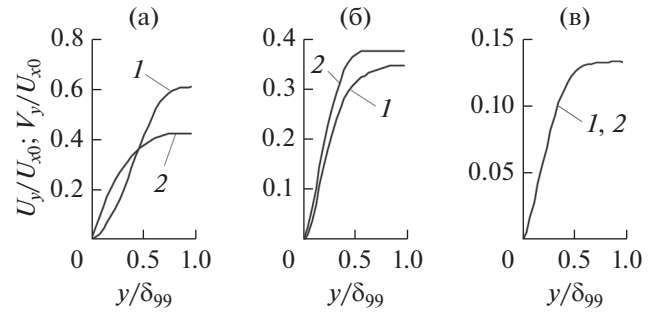
**2.1.1. Расчетно-теоретические исследования.** Детальное исследование как особенностей движения частиц в ламинарном пограничном слое, так и их обратного влияния на характеристики движения несущего газа (см. п. 2.2) выполнено в работе [62]. Рассматриваемый ламинарный пограничный слой развивался на полубесконечной плоской пластине, а моделирование проводилось в рамках модели двух взаимопроникающих континуумов [63]. Предполагалось, что частицы являются сферами одинакового радиуса и их объемная концентрация мала. Так как физическая плотность частиц на несколько порядков превышает плотность несущего газа ( $\rho_p \gg \rho_f$ ), то в качестве единственной силы межфазного взаимодействия во всей расчетной области в пограничном слое принята сила Стокса.

Рассмотренное в [62] двухфазное течение можно классифицировать как квазиравновесное (вне пограничного слоя), так как скорости несущей и дисперсной фаз равны. Наличие динамического скольжения вследствие инерции частиц при течении в пограничном слое приводило к тому, что поток становился неравновесным. В [62] изучено развитие профилей продольной (рис. 3) и поперечной (рис. 4) составляющих скорости частиц, а также их концентрации. Профили скоростей и концентраций приводятся для различных значений безразмерной продольной координаты  $\bar{x}$ , определяемой (при допущении  $V_{x\infty} \approx U_{x\infty}$ ) следующим образом:

$$\bar{x} = \frac{x}{l_r} = \frac{x}{\tau_p V_{x\infty}} \approx \frac{x/U_{x\infty}}{(\rho_p d_p^2)/18\mu} = Stk_f^{-1}.$$



**Рис. 3.** Развитие профилей продольной составляющей скорости газа и частиц ( $M = 3$ ): (а) —  $\bar{x} = 0.2$  ( $Stk_f = 5$ ); (б) —  $\bar{x} = 1$  ( $Stk_f = 1$ ); (в) —  $\bar{x} = 12$  ( $Stk_f = 0.083$ ); 1 — профиль Блазиуса, 2 — несущий газ, 3 — частицы (кривые 2 и 3 сливаются).



**Рис. 4.** Развитие профилей поперечной составляющей скорости газа и частиц ( $M = 3$ ): (а) —  $\bar{x} = 0.2$  ( $Stk_f = 5$ ); (б) —  $\bar{x} = 1$  ( $Stk_f = 1$ ); (в) —  $\bar{x} = 12$  ( $Stk_f = 0.083$ ); 1 — несущий газ, 2 — частицы (кривые сливаются).

Отсюда следует, что безразмерная длина  $\bar{x}$  — это величина, обратная локальному числу Стокса в осредненном движении.

Из рис. 3 видно, что продольная скорость частиц больше скорости газа по всему пограничному слою, причем при  $\bar{x} < 1$  ( $Stk_f > 1$ ) она отлична от нуля на поверхности пластины. Это происходит вследствие инерции частиц. В [62] отмечается, что релаксация скоростей фаз практически заканчивается при  $\bar{x} = 5$  ( $Stk_f = 0.2$ ), а структура течения при различных значениях массовой концентрации частиц  $M$  однотипна.

Расчеты выявили (рис. 4), что при малых  $\bar{x}$  (больших  $Stk_f$ ) в пограничном слое существует область, где поперечная составляющая скорости газа больше соответствующей скорости частиц, что свидетельствует о пересечении частицами линий тока несущего газа по направлению к стенке. В [62] отмечается, что релаксация поперечных составляющих скоростей фаз происходит на значительно большей длине, чем релаксация продольных составляющих.

Полученные распределения концентрации частиц показали, что при  $\bar{x} < 1$  ( $Stk_f > 1$ ) плотность дисперсной фазы монотонно возрастает с приближением к пластине и достигает на стенке конечного значения  $M_w = M_0/(1 - \bar{x})$ . При  $\bar{x} \geq 1$  ( $Stk_f \leq 1$ ) концентрация частиц стремится к бесконечности по мере приближения к стенке. Позже в [64] были изучены зоны неограниченного роста концентрации частиц в потоках, однако сделанные выводы не подтверждены результатами экспериментов.

Напомним, что в [62] в качестве единственной силы, определяющей движение частиц в ламинарном пограничном слое, выступала сила Стокса. Попытки учесть влияние подъемной силы Сэфмена, обусловленной неоднородностью поля скорости газа, предприняты в работах [65, 66]. Что

касается другой силы, также вызывающей поперечную миграцию частиц, — силы Магнуса, то в [66] показано, что при  $Re_p < 10$ , где  $Re_p = U_{x0}d_p/\nu$ , проекция этой силы на поперечную ось намного меньше силы Сэфмена.

В [66] получены распределения поперечной скорости частиц по длине пластины. Показано, что при  $\bar{x} < 2$  ( $Stk_f > 0.5$ ) вблизи стенки поперечная скорость частиц принимает отрицательные значения, т.е. направлена к стенке. Это объясняется тем, что вблизи передней кромки пластины в пристеночной области наряду с высокими градиентами продольной скорости газа имеется также и значительная разница между продольными скоростями фаз, что ведет к появлению силы Сэфмена. Продольная скорость частиц в этой области течения превышает скорость газа, поэтому и сила Сэфмена, действующая на частицы, приводит к их перемещению в направлении пластины. С увеличением расстояния от передней кромки пластины разница продольных скоростей фаз снижается, что ведет к уменьшению силы Сэфмена. Вследствие этого с увеличением  $\bar{x}$  (уменьшением  $Stk_f$ ) область отрицательных значений поперечной скорости частиц сужается, а при  $\bar{x} = 3$  ( $Stk_f = 0.33$ ) исчезает.

В [66] также представлены распределения концентрации частиц в одном сечении потока для различных значений  $Re_p$ . Распределение концентрации частиц при  $Re_p = 0$ , т.е. в случае отсутствия динамического скольжения между фазами, в точности повторяет распределение, полученное в [62] без учета силы Сэфмена. Увеличение числа Рейнольдса ведет к росту силы Сэфмена, что в свою очередь вызывает увеличение поперечных скоростей частиц. Поток частиц, осаждающихся на стенке, снижает значение концентрации примеси в пристенной зоне. Таким образом, с увеличением влияния силы Сэфмена на динамику ча-

стици происходит качественная перестройка профиля их концентрации, которая приводит к исчезновению области с максимумом концентрации частиц вблизи стенки. Аналогичный вывод сделан и в работе [65] при моделировании движения запыленного газа на начальном участке плоского канала и круглой трубы, где влияние силы Сэфмена также значительно.

**2.1.2. Экспериментальные исследования.** Поведение твердых частиц в ламинарном пограничном слое изучено в работе [67]. Пограничный слой развивался вдоль боковой поверхности стержня (диаметр – 11 мм) с полусферическим торцом, установленного внутри вертикальной трубы. Эксперименты проводились для случая нисходящего турбулентного потока воздуха в трубе. Число Рейнольдса равно  $Re_D = 12800$  при осредненной скорости воздуха на оси трубы  $U_{xc} = 3$  м/с, внутренний диаметр трубы  $D = 64$  мм. В качестве дисперсной фазы в экспериментах использовались сферические частицы стекла диаметром  $d_p = 100$  мкм. Измерения проводились для двух массовых концентраций частиц в потоке: низкой  $M_0 = 0.03$  и высокой  $M_0 = 0.8$ .

В [67] получены распределения осредненных и пульсационных (среднеквадратичных) скоростей “чистого” воздуха и твердых частиц, а также профили концентрации дисперсной фазы в трех выборочных сечениях ламинарного пограничного слоя.

Измерения показали, что осредненная скорость частиц превышает скорость несущего воздуха по всему пограничному слою, что неудивительно для нисходящего течения на стабилизированном участке. В экспериментах использовались относительно инерционные частицы, длина релаксации которых соизмерима с протяженностью ламинарной области развивающегося вдоль поверхности модели пограничного слоя. Измеренные распределения скоростей частиц свидетельствуют о том, что процесс релаксации скоростей фаз не заканчивается к сечению, в котором выполнены последние измерения. Значения чисел Стокса, полученные с использованием соотношения (1), для разных сечений равны:  $Stk_f \approx 5$ ,  $Stk_f \approx 2$  и  $Stk_f \approx 1$ . В [62] показано, что релаксация скоростей фаз практически заканчивается при  $\bar{x} = 5$  ( $Stk_f = 0.2$ ), а структура течения при различных значениях массовой концентрации частиц однотипна.

Эксперименты выявили, что интенсивность пульсаций скоростей частиц на внешней границе пограничного слоя равна  $\sigma_{v_x} \approx 7.5\%$ , что превышает значение интенсивности пульсаций скорости воздуха. В экспериментах использовались относительно инерционные частицы, степень вовлечения которых в пульсационное движение

турбулентными вихрями воздуха невелика. Основная причина наблюдаемых пульсаций скоростей частиц – использование в экспериментах полидисперсных частиц. В потоке движутся частицы различных размеров и, как следствие, они имеют различные значения осредненных скоростей. С уменьшением расстояния от поверхности модели интенсивность пульсаций скорости частиц существенно возрастает. В пристенной области основной причиной такого роста являются высокие градиенты осредненной скорости несущей фазы. Наличие градиента осредненной скорости воздуха определяет и неоднородность профиля осредненной скорости частиц. Перемещение частиц в области с различными значениями осредненной скорости дисперсной фазы приводит к появлению высоких значений пульсаций скорости частиц вблизи стенки. Аналогичный эффект роста пульсаций скорости частиц в неоднородных турбулентных потоках выявлен в работах [68–72].

Увеличение концентрации вызывало рост как осредненных, так и пульсационных скоростей частиц. Основной причиной этого является интенсивный обмен импульсом между фазами. Скорость частиц превышает скорость газа. С ростом концентрации дисперсной фазы частицы все более и более ускоряют воздушный поток. Также возрастает и скорость дисперсной фазы в потоке с большей скоростью. К сожалению, имеющаяся система и методика измерений не позволили провести исследование характеристик воздуха в присутствии частиц при высокой концентрации дисперсной фазы. Тем не менее очевидно, что обратное влияние частиц на течение воздуха при высоком содержании дисперсной фазы значительно.

Эксперименты отчетливо выявили существенное снижение концентрации дисперсной фазы в пограничном слое по сравнению с ее значением в набегающем потоке. Степень снижения концентрации частиц в пристенной области увеличивается вниз по потоку. Имеющиеся расчетно-теоретические данные [65, 66] показывают, что в условиях релаксационной области пограничного слоя, где в пристенной области скорость частиц превышает скорость газа, имеет место рост концентрации дисперсной фазы вследствие действия сил Сэфмена и Магнуса. Вероятно, для условий работы [67] частицы перед их попаданием в пограничный слой претерпевают соударения с телом под острыми углами и продолжают свое движение, перемещаясь от стенки. Это приводит к формированию в пристенной области зоны пониженной концентрации дисперсной фазы.

Детальное расчетно-теоретическое исследование особенностей движения частиц в ламинарном пограничном слое, развивающемся в окрестности критической точки затупленного тела, проведено в [73]. В этой работе выполнен анализ

влияния силы Сэфмена на возникновение поперечной составляющей скорости частиц и формирование приповерхностной области, свободной от частиц.

## 2.2. Влияние частиц на ламинарный пограничный слой

Влияние частиц на ламинарный пограничный слой в значительной степени определяется наличием межфазного обмена импульсом в осредненном движении вследствие различия скоростей. Это обстоятельство при определенных концентрациях дисперсной фазы приводит к увеличению в пристенной области градиента осредненной скорости несущего газа, росту поверхностного трения и теплоотдачи.

### 2.2.1. Расчетно-теоретические исследования.

Продолжим рассмотрение результатов работы [62]. При проведении расчетов массовая концентрация частиц варьировалась в широком диапазоне, что приводило к существенному влиянию дисперсной фазы на параметры течения газа. Описанное в 2.1 различие в скоростях между фазами ведет к интенсивному обмену импульсом, следствием которого является большая наполненность профиля скорости газовой фазы по сравнению со случаем однофазного течения (рис. 3). Профили продольных скоростей обеих фаз при больших  $\bar{x}$  (малых  $Stk_p$ ) становятся автомодельными. Данные предельные профили могут быть получены из решения уравнений Прандтля для однофазного газа с увеличенной плотностью  $\rho_e = \rho + \Phi \rho_p = \rho(1 + M)$ . Таким образом, после релаксации скоростей данное течение опять (как набегающий на пластину поток) становится квазиравновесным.

В работе [62] также были рассчитаны местные коэффициенты трения  $c_f$  при различных значениях массовой концентрации частиц. Показано, что коэффициент трения в двухфазном потоке существенно больше, чем в однофазном. Рост трения на стенке при  $\bar{x} < 1$  ( $Stk_p > 1$ ) объясняется ростом градиента скорости несущего газа в этой области течения из-за межфазного обмена импульсом. Скорость частиц вниз по потоку снижается, а их концентрация увеличивается. Вследствие этого градиент скорости газа начинает уменьшаться, что ведет к снижению коэффициента трения. При  $\bar{x} \rightarrow \infty$  ( $Stk_p \rightarrow 0$ ) коэффициент трения стремится к своему предельному значению, которое соответствует решению Блазиуса для однофазного газа с увеличенной плотностью.

В работе [66] показано, что учет силы Сэфмена приводит к существенному изменению распределений коэффициента трения по длине пластины в ламинарном пограничном слое. Приведены рассчитанные значения коэффициента трения для различных значений  $Re_p$ . Распределение тре-

ния на пластине при  $Re_p = 0$  практически не отличается от распределения, полученного в [62]. С ростом числа Рейнольдса уменьшается концентрация частиц в пристенной области (как показано в 2.1), что приводит к снижению интенсивности межфазного обмена импульсом. Следствием этого является меньшее наполнение профиля скорости газа, снижение градиента скорости на стенке и уменьшение величины максимума в распределении  $c_f \sqrt{Re_x}$ . В то же время снижение коэффициента трения по длине пластины при числах Рейнольдса, отличных от нуля, происходит более плавно. Это является следствием того, что наличие перемещающихся по направлению к стенке частиц (эти частицы имеют более высокие значения продольной скорости, чем частицы, движущиеся в непосредственной близости от стенки) приводит к увеличению протяженности области релаксации продольных скоростей фаз, в которой имеют место высокие значения коэффициента трения.

Вышесказанное позволяет сделать вывод о том, что учет подъемной силы Сэфмена, действующей на частицы, при расчете ламинарного пограничного слоя при  $Re_p \geq 1$  может приводить к существенным погрешностям.

В [74] выполнено исследование влияния частиц на характеристики ламинарного пограничного слоя на полубесконечной пластине для случая течения сжимаемого газа. Указанная работа развивает положения исследования [75], в котором впервые предпринят учет изменения плотности газа, но использовались простые соотношения для вязкости газа и допущение, что движение частиц подчиняется закону Стокса. В [74] сделаны важные выводы, что коэффициенты трения и теплоотдачи становятся больше, а толщина вытеснения меньше по сравнению со случаем однофазного течения.

### 2.2.2. Экспериментальные исследования.

Перейдем к описанию и анализу результатов экспериментальных работ [76–78], в которых измерены распределения скоростей чистого воздуха, воздуха в присутствии частиц и самих твердых частиц во всех областях пограничного слоя, в том числе и в ламинарной области.

Пограничный слой развивался вдоль боковой поверхности цилиндра, установленного внутри вертикальной трубы. Торец цилиндра выполнен в виде полусферы. Число Рейнольдса восходящего потока воздуха равно  $Re_p = 5.5 \times 10^4$ . В качестве дисперсной фазы в экспериментах использовались частицы оксида алюминия ( $Al_2O_3$ ) со средне-массовым размером 50 мкм. Средняя по сечению трубы массовая расходная концентрация частиц варьировалась в диапазоне  $M_0 = 0–0.26$ . Проведенные измерения в набегающем (невозмущенном цилиндром) потоке показали, что присут-



стве частиц практически не приводит к изменению профиля осредненной скорости несущего потока воздуха.

Выяснилось, что скорость частиц вблизи границы пограничного слоя меньше, чем скорость несущего воздуха, и составляет примерно 90% от скорости внешнего потока. В то же время скорость частиц вблизи стенки вследствие их инерции значительно превосходит скорость воздуха на протяжении всей исследованной области в пограничном слое и особенно на участке ламинарного течения.

Присутствие частиц в потоке оказывает существенное влияние на профиль осредненной скорости несущей фазы в “псевдоламинарном” пограничном слое. Профиль становится более заполненным вследствие ускорения воздуха частицами вблизи стенки. Это согласуется с выводами работы [62]. Различие между скоростями воздуха однофазного и двухфазного течений достигает своего максимума именно вблизи стенки, где имеется наибольшая разница в скоростях газовой и твердой фаз из-за инерции частиц. Число Рейнольдса частицы в этой области значительно превосходит соответствующую характеристику в набегающем потоке и равно  $Re_p = 15-25$ . Наполняя профиль осредненной скорости, частицы увеличивают ее градиент на стенке, что приводит к росту поверхностного трения в ламинарной области пограничного слоя.

### 3. УСТОЙЧИВОСТЬ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ С ЧАСТИЦАМИ

На сегодняшний день известен целый ряд факторов, оказывающих влияние на ламинарно-турбулентный переход в однофазном пограничном слое: наличие повышенной степени турбулентности внешнего турбулентного потока [79–81]; наличие продольного градиента давления, механических вибраций [82, 83], шероховатости [84, 85], нагрева поверхности [86, 87] и многие другие. Присутствие в потоке частиц в зависимости от их инерционности и концентрации может оказывать разнонаправленное (усиливать или ослаблять) влияние на неустойчивости, возникающие в однофазном пограничном слое.

#### 3.1. Устойчивость ламинарного пограничного слоя с частицами

Можно предположить, что устойчивость ламинарного пограничного слоя будет определяться взаимодействием частиц с периодическими по пространству и времени возмущениями (волны Толлмина–Шлихтинга, когерентные вихревые структуры, вихри Гертлера и др.), приводящим к их росту или затуханию.

**3.1.1. Генерация возмущений (турбулентности) предельно малоинерционными частицами.** В монографии [88] сделан вывод, что влияние частиц на

устойчивость газового потока проявляется двояким образом. Во-первых, твердые частицы в силу своей большой физической плотности ( $\rho_p/\rho \cong O(10^3)$ ) вызывают рост “эффективной” плотности двухфазного потока  $\rho_e$  с увеличением их концентрации как

$$\rho_e = \rho + \Phi \rho_p = \rho(1 + M).$$

Рост плотности несущей фазы приведет к снижению ее эффективной кинематической вязкости  $\nu_e = \mu/\rho_e$ , что в свою очередь повлечет увеличение основной режимной характеристики течения – числа Рейнольдса. Это является фактором, дестабилизирующим ламинарное течение.

К описанному эффекту приводит присутствие в потоке предельно малоинерционных частиц, время релаксации которых намного меньше лагранжева интегрального масштаба турбулентности (характеризует время жизни крупных энергонесущих вихрей).

В более поздних публикациях [89–92] исследуется механизм генерации турбулентности за счет снижения энергии мелких вихрей, вовлекающих предельно малоинерционные частицы в мелко-масштабное пульсационное движение и отвечающих за подавление (диссипацию) энергии турбулентности.

**3.1.2. Диссипация возмущений (турбулентности) относительно малоинерционными частицами.** Впервые изучение устойчивости газа, несущего твердые частицы, проведено в [93]. Рассмотрено уравнение Навье–Стокса для несущего газа с учетом силы межфазного взаимодействия (сила Стокса). Анализ в [93] в значительной степени следовал методу линеаризации, используемому при исследовании устойчивости однофазных течений [94], в котором предполагаются малые возмущения потока. В результате получено модифицированное уравнение Орра–Зоммерфельда, которое отличалось от соответствующего уравнения для однофазного потока только использованием другого (более сложного) профиля скорости. Анализ уравнения показал, что при малых значениях параметра  $\alpha^2 d_p^2 \rho_p / \rho$  ( $\alpha$  – волновое число в принятой функции возмущений для скорости жидкости) наличие частиц приводит к большей дестабилизации течения, тогда как при больших значениях указанного параметра скорость затухания возмущений увеличивается и течение стабилизируется. Для простого течения (плоское течение Пуазейля) найдено граничное значение параметра, при котором дестабилизирующий эффект частиц, обусловленный увеличением эффективной плотности потока, уравновешивает стабилизирующий эффект частиц за счет диссипации энергии.

В [95] рассмотрен вопрос устойчивости течения в несжимаемом ламинарном пограничном

слое, развивающемся на полуограниченной плоской пластине. Исследование выполнено при допущении, что основным силовым фактором, определяющим поведение частиц, является стоковая сила сопротивления. Получено решение модифицированных уравнений Орра—Зоммерфельда [93] двумя различными способами для случая низкого массового содержания частиц. Численное исследование проведено для моно- и полидисперсных частиц. В результате показано, что присутствие частиц вызывает подавление неустойчивых волн в широком диапазоне изменения размеров частиц. Наиболее значительное подавление имеет место в случае частиц средних размеров, когда длина их релаксации близка к длине волны Толлмина—Шлихтинга. Для стационарной волны Толлмина—Шлихтинга в случае монодисперсных частиц выявлен разрыв собственного значения из-за резонансного ускорения частиц в критическом слое. Проведенный анализ для монодисперсных частиц распространен на случай течения с полидисперсными частицами. Демпфирующий эффект от полидисперсных частиц при их дискретном распределении по размерам схож со случаем монодисперсных частиц. Так, число разрывов собственных значений равно числу размеров частиц.

В работах [16, 21, 22, 92] исследуется механизм диссипации турбулентности за счет снижения энергии крупных вихрей, вовлекающих относительно малоинерционные частицы в крупномасштабное пульсационное движение и отвечающих за рост (генерацию) энергии турбулентности.

**3.1.3. Генерация возмущений (турбулентности) крупными частицами.** При движении в ламинарном пограничном слое крупных частиц при больших числах Рейнольдса ( $Re_p > 1000$ ) за ними образуются турбулентные следы. Таким образом, можно ожидать, что присутствие в потоке таких инерционных частиц будет однозначно приводить к дестабилизации ламинарного течения.

В работах [17, 22] исследуется механизм генерации турбулентности в турбулентных следах за движущимися частицами. Показано, что интенсивность турбулентности несущего газа может возрастать значительно (до нескольких раз) по сравнению с ее значением в однофазном потоке.

### *3.2. Влияние частиц на ламинарно-турбулентный переход*

Проблема перехода ламинарного течения жидкости (газа) в турбулентное привлекает внимание исследователей уже на протяжении 130 лет. С точки зрения использования на практике это обусловлено возможностью предсказания положения области ламинарно-турбулентного перехода в пограничном слое, от которого зависит величина сопротивления трения и интенсивность теплообмена на обтекаемом теле.

**3.2.1. Расчетно-теоретические исследования.** Изучение восприимчивости сверхзвукового пограничного слоя к присутствию в потоке твердых частиц представлены работами [96, 97]. В этих исследованиях показано, что при взаимодействии с пограничным слоем частицы генерируют неустойчивые волновые пакеты (волны Толлмина—Шлихтинга). Последние усиливаются вниз по потоку и приводят к генерации турбулентных пятен. Развита теоретическая модель, описывающая механизм восприимчивости исходного течения к возмущениям, для предсказания начального спектра волн Толлмина—Шлихтинга. С использованием этих начальных условий развитие неустойчивости Толлмина—Шлихтинга вниз по потоку рассчитывалось на основе теории линейной устойчивости. Ламинарно-турбулентный переход ассоциировался с точкой, в которой амплитуда возмущений достигает некоторого порогового значения. В качестве верификации построенной теории выполнены расчеты для случая сверхзвукового (число Маха равно 4) обтекания острого клина (угол полураствора —  $14^\circ$ ) на высоте 20 км с нулевым углом атаки. Показано, что сферические частицы радиусом от 10 до 20 мкм с плотностью, превышающей  $1 \text{ г/см}^3$ , могут приводить к началу ламинарно-турбулентного перехода, соответствующего коэффициенту усиления  $N = 9-10$ . Сделан важный вывод, что присутствующие в атмосфере частицы могут быть главной причиной ламинарно-турбулентного перехода по сценарию Толлмина—Шлихтинга на аэродинамически гладких поверхностях при полете с гиперзвуковыми скоростями.

**3.2.2. Экспериментальные исследования.** Продолжим рассмотрение результатов работ [76–78], начатое в 2.2. Полученные в этих работах экспериментальные результаты позволили сделать вывод о влиянии присутствия частиц на ламинарно-турбулентный переход.

Присутствие частиц в потоке оказывало существенное влияние на профиль осредненной скорости несущей фазы в ламинарном пограничном слое. Профиль становился более заполненным вследствие ускорения воздуха частицами вблизи стенки. Наполняя профиль осредненной скорости, частицы увеличивают ее градиент на стенке, что приводит к росту поверхностного трения в ламинарной области пограничного слоя. Наполнение профиля скорости приводит также к уменьшению формпараметра профиля в этой области, приближая его значение к значению, характерному для турбулентного пограничного слоя, и, таким образом, ускоряет начало перемежающегося ламинарно-турбулентного течения.

Начало ламинарно-турбулентного перехода определялось двумя способами: 1) по минимуму в распределении осредненной скорости при траверсировании точки измерений на фиксирован-

ном расстоянии ( $y = 0.2$  мм) вдоль поверхности стержня; 2) по началу резкого уменьшения формпараметра  $H$  профиля осредненной скорости.

Эта характеристика определяется следующим образом:

$$H = \frac{\delta^*}{\delta^{**}},$$

где толщина вытеснения  $\delta^*$  и толщина потери импульса  $\delta^{**}$  находятся для несжимаемого течения как

$$\delta^* = \int_0^{\delta_{99}} \left(1 - \frac{U_x}{U_{x0}}\right) dy, \quad \delta^{**} = \int_0^{\delta_{99}} \frac{U_x}{U_{x0}} \left(1 - \frac{U_x}{U_{x0}}\right) dy.$$

Проведенные измерения показали, что значение формпараметра профиля скорости в случае однофазного течения значительно меньше, чем для классического ламинарного пограничного слоя ( $H = 2.6$ ,  $\sigma_U \rightarrow 0$ ), и равно  $H \approx 2.10$ – $2.15$ . Это является следствием повышенной степени турбулентности в ядре потока. Присутствие частиц в потоке, как уже было отмечено выше, приводит к наполнению профиля осредненной скорости и тем самым уменьшает значение формпараметра до следующих значений:  $H \approx 2.0$  при концентрации дисперсной фазы  $M_0 = 0.18$  и  $H \approx 1.90$ – $1.92$  при концентрации  $M_0 = 0.26$ .

Анализ полученных распределений осредненной скорости и формпараметра позволил в [77, 78] сделать вывод о том, что в случае однофазного течения ламинарно-турбулентный переход начинается при  $x = 55$ – $60$  мм, что соответствует диапазону чисел Рейнольдса  $Re_{xcr1} = 4.88 \times 10^4$ – $5.32 \times 10^4$ . В случае двухфазного потока ламинарно-турбулентный переход начинается раньше, а именно при  $x = 40$ – $50$  мм ( $Re_{xcr1} = 3.55 \times 10^4$ – $4.43 \times 10^4$ ) и  $x = 36$ – $44$  мм ( $Re_{xcr1} = 3.19 \times 10^4$ – $3.90 \times 10^4$ ) для массовых концентраций  $M_0 = 0.18$  и  $M_0 = 0.26$  соответственно. Таким образом, эксперименты выявили эффект присутствия твердых частиц на начало ламинарно-турбулентного перехода. Что касается влияния частиц на окончание ламинарно-турбулентного перехода, то его выявлено не было.

## 4. ДВУХФАЗНЫЙ ТУРБУЛЕНТНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ

### 4.1. Движение частиц в турбулентном пограничном слое

Движение частиц в турбулентном пограничном слое в значительной степени определяется возможным наличием динамического скольжения относительно несущего газа. Если турбулентный пограничный слой лежит в релаксационной

области, то распределение осредненных скоростей частиц (как и в случае ламинарного пограничного слоя) отличается от соответствующего распределения для газа. Помимо этого, поведение частиц будет определяться их взаимодействием с турбулентными вихрями различных масштабов, а также с когерентными структурами, присущими турбулентному пограничному слою. Миграция частиц в направлении стенки приводит к столкновениям частиц со стенкой, а с ростом концентрации и к столкновениям частиц между собой.

**4.1.1. Расчетно-теоретические исследования.** Одной из ключевых проблем изучения поведения частиц в турбулентных сдвиговых потоках является изучение процесса осаждения частиц на стенку. История этого вопроса насчитывает уже шесть–семь десятилетий.

Поток частиц на стенку обычно записывают как

$$J_w = \left( -\bar{N} \bar{v}_y + (\epsilon_B + \epsilon_p) \frac{\partial \bar{N}}{\partial y} \right)_w, \quad (2)$$

где верхняя черта обозначает осреднение функции плотности вероятности скорости частиц,  $N$  – концентрация (числовая) частиц,  $v_y$  – поперечная скорость частиц,  $\epsilon_B$  – коэффициент броуновской диффузии частиц,  $\epsilon_p$  – коэффициент турбулентной диффузии частиц. Первый и второй члены правой части (2) описывают конвективный и диффузионный потоки частиц соответственно.

Осредненная миграция частиц в направлении стенки и турбулентная диффузия дисперсной фазы зависят от пульсационной скорости частиц, которые отличаются от пульсационных скоростей газа вследствие их инерционности. Обычно оперируют понятием безразмерного времени динамической релаксации частиц, имеющим вид

$$\tau_p^+ = \frac{\rho_p d_p^2}{18\mu} \left( \frac{u_*^2}{\nu} \right).$$

Здесь верхний индекс “+” обозначает обезразмеривание с использованием динамической скорости  $u_*$  и кинематической вязкости  $\nu$ .

Безразмерная скорость частиц записывается как

$$V_{dep}^+ = \frac{J_w}{N_m} \left( \frac{1}{u_*} \right),$$

где  $N_m$  – осредненная числовая концентрация частиц в некотором поперечном сечении с координатой  $x$ .

Главной проблемой является установление зависимости скорости осаждения частиц от их инерционности, т.е.  $V_{dep}^+ = V_{dep}^+(\tau_p^+)$ . На сегодняшний день известно, что данная зависимость носит

немонотонный характер. Во-первых, в диффузионно-столкновительном режиме ( $1 < \tau_p^+ < 30$ ) частицы при их взаимодействии с турбулентными вихрями приобретают импульс в направлении стенки, тем самым увеличивая скорость осаждения с ростом  $\tau_p^+$  на несколько порядков. Во-вторых, в умеренно-инерционном режиме ( $\tau_p^+ > 30$ ) инерция частиц не позволяет получать необходимый импульс при взаимодействии с турбулентными вихрями, что снижает скорость осаждения с ростом  $\tau_p^+$ .

В работе [98] получено ставшее классическим на сегодняшний день соотношение для нормальной пульсационной скорости частиц

$$\overline{v_y'^2}(\infty) = \frac{\tau_L}{\tau_p + \tau_L} \overline{u_y'^2}, \quad (3)$$

где знак “ $\infty$ ” обозначает локальное равновесие;  $\tau_L$  – интегральный временной масштаб, ассоциируемый с лагранжевой автокорреляционной функцией турбулентных вихрей несущего газа. В [99] развита теория, в соответствии с которой на частицу действует сила в направлении уменьшения пульсационной скорости дисперсной фазы. Сила “турбофореза” имеет вид

$$F_t = -\frac{d}{dy} \overline{v_y'^2}.$$

На основании теории [99] показано, что турбофорез вызывает дрейф частиц к стенке и учет этого механизма в модифицированной концепции градиентного транспорта приводит к удовлетворительным результатам для скорости осаждения.

Попытка учета неравновесного поведения (эффекта памяти) напряжений инерционных частиц в нормальном направлении без учета действия подъемной силы предпринята в работе [100] путем использования следующего соотношения:

$$\overline{v_y'^2} = \left(1 - \tau_\beta \overline{v_y} \frac{d}{dy}\right) \overline{v_y'^2}(\infty),$$

где  $\tau_\beta$  – время достижения состояния локального равновесия для напряжений Рейнольдса частиц. Время релаксации характеризует степень неравновесности (проскальзывание скоростей) в зависимости от инерционности частиц и имеет вид

$$\tau_\beta = \frac{\exp(-2/\text{Stk}_\tau)}{1 - \exp(-2/\text{Stk}_\tau)} \tau,$$

где  $\text{Stk}_\tau = \tau_p/\tau$  – число Стокса, определяемое на основе характерного временного масштаба  $\tau$  взаимодействия частиц с турбулентностью с макроскопической точки зрения (так называемый “промежуточный масштаб диффузии” [100]). Так, если время релаксации частиц  $\tau_p$  становится

сравнимым или больше, чем  $\tau$  ( $\text{Stk}_\tau \geq 1$ ), то напряжения Рейнольдса частиц находятся в неравновесном состоянии и будет необходим временной период  $\tau_\beta$  для достижения ими состояния локального равновесия, определяемого соотношением (3). В [101] предпринята попытка учета подъемной силы на процесс осаждения частиц на стенку в турбулентных пограничных слоях на основе развитого ранее подхода [100].

В цикле работ [102–106] проведены детальные численные исследования особенностей движения частиц в турбулентном пограничном слое, развивающемся на плоской пластине. Моделирование выполнено на основе Эйлерово-лагранжева подхода с учетом обратного влияния частиц на течение несущего газа. Предполагалось, что размер частиц намного меньше колмогоровского пространственного масштаба.

В [102] изучены особенности взаимодействия инерционных частиц и пристенных когерентных структур в турбулентном пограничном слое. Проанализированы процессы движения частиц по направлению к стенке и их выбросы от стенки во внешнее течение вследствие их взаимодействия с парой противоположно вращающихся квазипродольных вихрей, существующих около стенки. Поток частиц по направлению к стенке имеет большую интенсивность, чем поток от стенки, что приводит к формированию на стенке максимальной концентрации частиц.

Выполнен детальный анализ влияния трех основных сил (сила сопротивления, подъемная сила Сэфмена, подъемная сила Магнуса) на движение частиц в разных направлениях (продольном, нормальном и поперечном), хотя максимальные величины сил Магнуса и Сэфмена на порядок меньше, чем сила аэродинамического сопротивления в нормальном (к стенке) направлении. Однако все указанные силы имеют один порядок величины вблизи стенки ( $y^+ < 15$ ) и, следовательно, должны приниматься во внимание при проведении расчетов.

В [103] расчеты производились для двух относительно небольших значений массовой концентрации частиц –  $M = 0.1$  и  $M = 1$ , что позволяло пренебречь столкновениями частиц между собой. В уравнениях движения частиц учитывались сила аэродинамического сопротивления, сила Сэфмена, сила Магнуса; вращение частиц также рассчитывалось. Инерционность частиц варьировалась в диапазоне  $\text{Stk} = 10\text{--}50$ , где в качестве характерного временного масштаба принималось  $\tau_f = \delta_0^{**}/U_{x\infty}$  ( $\delta_0^{**}$ ,  $U_{x\infty}$  – толщина потери импульса на входе в расчетную область и скорость невозмущенного потока соответственно).

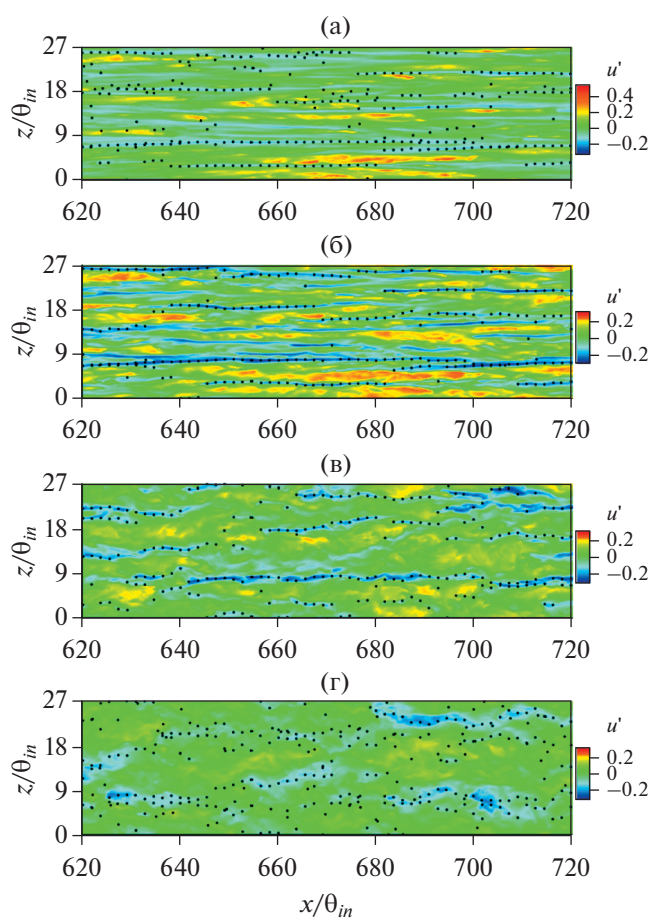
Проведенные расчеты выявили, что пульсации скорости частиц в продольном направлении по

всему пограничному слою превышают соответствующие пульсации скорости воздуха. Это подтверждает данные экспериментальной работы [107], посвященной изучению поведения частиц в горизонтальном двухфазном пограничном слое на пластине. Авторы предполагают, что такая ситуация является следствием двух причин: инерции частиц и наличия пристенных квазипродольных вихрей. Пульсации скоростей частиц в нормальном и поперечном направлениях, напротив, уступают пульсациям скоростей воздуха в указанных направлениях, так как частицы не могут полностью следовать за турбулентными пульсациями несущей фазы. Также установлено, что нормальные и поперечные пульсации скорости частиц уменьшаются монотонно с ростом числа Стокса и массовой концентрации частиц. Измерения концентрации частиц в непосредственной близости от стенки выявили, что характер изменения концентрации вниз по потоку повторяет распределение коэффициента трения. Показано, что концентрация частиц сначала быстро убывает в ламинарной области, достигая локального минимума. Затем начинает постепенно возрастать в переходной области, достигая максимума в конце ламинарно-турбулентного перехода. В области развитого турбулентного пограничного слоя опять начинается снижение концентрации. Что касается максимального значения концентрации, то оно растет с ростом инерционности частиц и массовой концентрации.

В [104] изучено вращательное движение малоинерционных частиц ( $Stk = 1$  и  $Stk = 5$ ) в турбулентном пограничном слое. Массовая концентрация дисперсной фазы равна  $M = 1$ . Показано, что движение частиц определяется тремя факторами: 1) инерцией частиц; 2) кластеризацией частиц; 3) обратным влиянием частиц на параметры газа.

В работе [104] также показано, что поперечная составляющая осредненной угловой скорости частиц намного превышает продольную и нормальную составляющие (они пренебрежимо малы). Максимального значения поперечная осредненная угловая скорость частиц достигает на стенке и затем монотонно убывает с увеличением расстояния. Расчеты показали, что пульсационные угловые скорости частиц в разных направлениях (продольная, нормальная, поперечная) близки по величине к соответствующим величинам для несущей фазы. С ростом инерционности частиц пульсационные угловые скорости частиц снижаются.

Мгновенные распределения частиц в различных поперечных сечениях пограничного слоя, наложенные на поля локальной продольной пульсационной скорости несущей фазы  $u'$ , приведены на рис. 5 [104]. Можно сделать вывод, что в вязком подслое инерционные частицы имеют



**Рис. 5.** Мгновенные распределения частиц в различных поперечных сечениях ( $Stk = 5$ ): (а) – в “очень близкой” пристенной области ( $y^+ = 5$ ); (б) – в буферной области ( $y^+ = 15$ ); (в) – в логарифмической области ( $y^+ = 60$ ); (г) – в волновой области пограничного слоя ( $y^+ = 200$ ).

тенденцию аккумулироваться вдоль удлиняющихся полос с относительно низкой скоростью. В буферной области интенсивность “низкоскоростных” полос возрастает и частицы имеют склонность к кластеризации. С увеличением расстояния от  $y^+ = 15$  до  $y^+ = 200$  “низкоскоростные” полосы становятся короче, в то время как интенсивность полосчатых структур сильно снижается. В частности, частицы распределены однородным образом без кластеризации в волновой области пограничного слоя.

В [105] изучено влияние шероховатости на движение частиц в турбулентном пограничном слое. Шероховатость стенки генерировалась с использованием на ней полусферических элементов разного размера, устанавливаемых на разном расстоянии между ними. Найдено, что шероховатость стенки приводит к снижению продольной

скорости частиц и увеличению пульсационных скоростей.

**4.1.2. Экспериментальные исследования.** Изучение характеристик турбулентного двухфазного пограничного слоя, развивающегося на плоской пластине, проведено в [108, 109]. Эксперименты показали, что частицы в восходящем потоке движутся медленнее воздуха. Различие между скоростями витания и практически постоянно по всему пограничному слою. Рассматриваемое сечение находится на расстоянии  $x = 0.55$  м от начала пластины, что соответствует значениям чисел Стокса  $Stk_f = 0.24$  и  $Stk_f = 0.63$  для частиц размером 50 мкм и 90 мкм соответственно. Данные значения чисел Стокса свидетельствуют о том, что релаксация скоростей фаз к данному сечению практически закончилась. Результаты экспериментов показали, что при  $M = 0.02$  частицы не влияли на распределение осредненной скорости несущего воздуха.

Измерены профили продольной составляющей пульсационной скорости “чистого” воздуха, воздуха в присутствии частиц и частиц стекла различных размеров в турбулентном пограничном слое. Сделан вывод, что наличие в потоке частиц не оказывало влияния на распределение пульсационной скорости несущей фазы в пограничном слое. Величина пульсаций скоростей частиц стекла диаметром 50 мкм близка к соответствующей характеристике для воздуха. Пульсации скоростей крупных частиц диаметром 90 мкм превосходят по величине пульсации несущей фазы. Простые оценки показывают, что мелкие из использованных частиц должны хорошо вовлекаться в пульсационное движение турбулентными вихрями. Что касается крупных частиц, то высокие значения пульсационных скоростей обуславливаются использованием в экспериментах полидисперсных частиц. Рост пульсационных скоростей частиц обоих видов в пристенной области, где относительная инерционность дисперсной фазы увеличивается вследствие уменьшения характерных времен энергонесущих вихрей, объясняется неоднородностью распределений осредненных скоростей частиц.

Выявлено, что пульсационные скорости частиц в рассматриваемом направлении ниже соответствующих пульсаций скорости воздуха. Различие между пульсациями скоростей газовой и дисперсной фаз растет в пристенной области. С одной стороны, это объясняется тем, что спектр пульсаций скорости воздуха в нормальном направлении характеризуется более высокими частотами [108] и частицы хуже увлекаются турбулентными вихрями несущей фазы. С другой стороны, осредненная скорость частиц в рассматриваемом направлении близка к нулю по всему сечению пограничного слоя. Следовательно, воз-

можные перемещения дисперсной фазы в поперечном направлении не приводят к появлению дополнительных пульсаций (как это было в случае продольных пульсаций).

В [110, 111] проведены экспериментальные исследования особенностей поведения частиц в турбулентном пограничном слое, развивающемся на плоской пластине. Скорость восходящего несущего потока воздуха равна  $U_{x0} = 20$  и 30 м/с. В качестве дисперсной фазы использовались частицы каменного угля (плотность — 1680 кг/м<sup>3</sup>) со средними диаметрами 60 и 200 мкм. Массовая расходная концентрация частиц варьировалась от 0.3 до 1.2. Профили осредненных скоростей и концентраций частиц измерялись волоконно-оптическим датчиком в четырех сечениях, отстоящих на расстояния  $x = 0.25, 0.5, 0.75$  и 1.0 м от края пластины. Для меньшей скорости  $U_{x0} = 20$  м/с и ближайшего измерительного сечения  $x = 0.25$  м число Рейнольдса равно  $Re_x = 3.5 \times 10^5$ , что свидетельствует о наличии турбулентного пограничного слоя к указанному сечению.

Измерения показали, что распределения осредненных скоростей частиц в пограничном слое удовлетворяют логарифмическому закону. За пределами пограничного слоя скорость частиц превышала скорость несущего воздуха, а толщина пограничного слоя дисперсной фазы, напротив, была меньше толщины пограничного слоя чистого воздуха. Указанные эффекты становятся более выраженными с ростом размера и концентрации частиц. Выявлено, что профиль концентрации частиц являлся неоднородным и характеризовался максимумом, расположенным внутри пограничного слоя. Такое распределение частиц объяснялось действием направленной к пластине подъемной силы, а также столкновениями частиц со стенкой. С ростом размера частиц концентрация дисперсной фазы в пограничном слое возрастала, а ее максимум смещался в направлении стенки.

#### 4.2. Влияние частиц на турбулентный пограничный слой

В случае, когда турбулентный пограничный слой лежит в релаксационной области, влияние частиц в значительной степени определяется (как и в случае ламинарного пограничного слоя) наличием межфазного обмена импульсом в осредненном движении вследствие различия скоростей. Помимо этого, частицы могут оказывать существенное влияние на пульсационные характеристики несущего газа посредством межфазного обмена импульсом в пульсационном (крупномасштабном и мелкомасштабном) движении вследствие их взаимодействия с турбулентными вихрями различных масштабов и с когерентными структурами. Столкновения частиц со стенкой и

между собой являются факторами, осложняющими анализ обратного влияния частиц на несущую фазу.

**4.2.1. Расчетно-теоретические исследования.** Продолжим анализ результатов работ [102–106], начатый в 4.1. При проведении расчетов массовая концентрация частиц варьировалась в широком диапазоне, что приводило к существенному обратному влиянию дисперсной фазы на параметры течения газа.

В [102, 106] показано, что частицы опережают газ вблизи стенки вследствие своей инерции. Это приводит к росту осредненной скорости газа в продольном направлении. Осредненная продольная скорость увеличивается, что ведет к росту коэффициента трения и снижению толщины пограничного слоя, толщины вытеснения и толщины потери импульса. Отмеченные эффекты усиливаются с ростом числа Стокса и концентрации частиц [106]. Присутствие частиц приводит к росту продольной пульсационной скорости газа в пристенной области ( $y^+ < 11$ ), но подавляет продольные пульсации за пределами вязкого подслоя ( $y^+ > 11$ ). Что касается напряжений Рейнольдса и турбулентных пульсаций скорости газа в нормальном и поперечном направлениях, то они существенно снижаются из-за наличия частиц. Максимумы в распределении всех трех компонент пульсационной скорости газа смещаются в направлении стенки. Эти эффекты также усиливаются с ростом инерционности и концентрации частиц [106]. Проанализировано снижение кинетической энергии турбулентности газа вследствие уменьшения члена, отвечающего за генерацию турбулентности  $P$ , и увеличения скорости ее диссипации  $\epsilon$ .

В [104] показано, что присутствие частиц приводит к существенной модификации параметров несущего газа, которая в свою очередь влияет на поступательное и вращательное движение частиц.

В [105] проанализированы физические механизмы дисперсии частиц в шероховатом “подслое”. Показано, что ослабление улавливания частиц в пристенном слое вызывается тремя причинами: 1) шероховатость стенки увеличивает частоту столкновений частиц со стенкой и увеличивает дисперсию частиц в поперечном направлении; 2) частицы ослабляют парные вихри и вихревые структуры, ответственные за захват частиц и их перенос к стенке; 3) частицы разрушают сдвиговые слои, генерируемые над элементами шероховатости и способствующие переносу частиц к стенке.

**4.2.2. Экспериментальные исследования.** Попытка изучения влияния частиц на характеристики турбулентного пограничного слоя, развивающегося на плоской пластине, предпринята в [112].

В экспериментах использовались частицы меди диаметром 70 мкм при массовой концентрации  $M = 0.2$ . Обнаруженное влияние частиц на распределения осредненных и пульсационных скоростей несущего воздуха было незначительным и находилось в пределах погрешности экспериментов. Это объясняется относительно малой концентрацией дисперсной фазы. Несмотря на это, присутствие частиц оказывало влияние на спектр продольных пульсаций газа, подавляя низкочастотные составляющие.

В работе [113] изучено влияние частиц (пластиковые сферы, диаметр – 60 мкм,  $d_p^+ = 1.71$ ) на структуру пристенного ( $y^+ < 250$ ) пограничного слоя в горизонтальном канале. Обнаружено, что добавление в поток частиц изменяет осредненную скорость, интенсивность турбулентности, а также имеющиеся когерентные турбулентные структуры даже при экстремально низких значениях массовой концентрации ( $M = 2.5 \times 10^{-4}$ ).

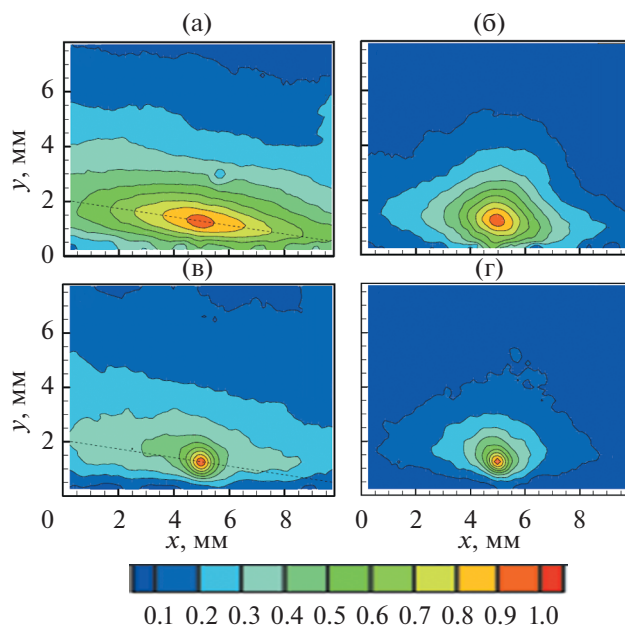
Для анализа влияния частиц на когерентные турбулентные структуры использовались двухточечные коэффициенты корреляции для продольной и нормальной компонент пульсационной скорости газа, имеющие следующий вид:

$$R_{u_x}(x, y) = \frac{\overline{u'_x(x_1, y_1)u'_x(x_0, y_0)}}{(\overline{u'^2_x(x_1, y_1)})^{1/2}(\overline{u'^2_x(x_0, y_0)})^{1/2}},$$

$$R_{u_y}(x, y) = \frac{\overline{u'_y(x_1, y_1)u'_y(x_0, y_0)}}{(\overline{u'^2_x(x_1, y_1)})^{1/2}(\overline{u'^2_x(x_0, y_0)})^{1/2}},$$

где  $u'_x(x_1, y_1)$ ,  $u'_x(x_0, y_0)$ ,  $u'_y(x_1, y_1)$ ,  $u'_y(x_0, y_0)$  – продольные и нормальные пульсационные скорости газа в точках пространства с координатами  $(x_1, y_1)$  и  $(x_0, y_0)$  соответственно.

На рис. 6 представлены распределения  $R_{u_x}$  и  $R_{u_y}$  для однофазного течения и для воздуха в присутствии частиц ( $M = 5 \times 10^{-3}$ ) для точки с координатами  $x_1 = 4.98$  мм и  $y_1 = 1.25$  мм ( $y^+ = 30$ ). Отметим, что распределения  $R_{u_x}$  и  $R_{u_y}$  напрямую характеризуют свойства когерентных турбулентных структур. Для рассматриваемого случая турбулентного пограничного слоя  $R_{u_x}$  и  $R_{u_y}$  несут информацию о протяженности продольной структуры и диаметре продольного вихря соответственно [114, 115]. Контуры  $R_{u_x}$  и  $R_{u_y}$  значительно сужаются, что свидетельствует в пользу уменьшения как протяженности когерентной структуры, так и диаметра продольного вихря.



**Рис. 6.** Поля двухточечных коэффициентов корреляции для однофазного (а), (б) и двухфазного (в), (г) потоков: (а), (в) –  $R_{u_x}$ ; (б), (г) –  $R_{u_y}$ .

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выполнен обзор работ, посвященных математическому и физическому моделированию двухфазных пограничных слоев газа с твердыми частицами. Рассмотрены особенности движения частиц в ламинарных и турбулентных пограничных слоях, а также их обратное влияние на течение газа.

Показано, что движение частиц как в ламинарном, так и в турбулентных пограничных слоях в значительной степени определяется наличием динамического скольжения относительно несущего газа. Если рассматриваемое сечение лежит в релаксационной области, то распределение осредненных скоростей частиц отличается от соответствующего распределения для газа. Торможение частиц в пристенной области и действие поперечных сил, приводящих к миграции частиц в направлении стенки, являются физическими механизмами роста их концентрации в пограничном слое. В турбулентном пограничном слое поведение частиц будет осложняться их взаимодействием с вихрями различных масштабов и с когерентными структурами. Турбулентный перенос дисперсной фазы в поперечном направлении является фактором, приводящим к столкновениям частиц со стенкой, а с ростом концентрации и к столкновениям частиц между собой.

Влияние частиц на характеристики газа в пограничном слое также определяется наличием межфазного обмена импульсом в осредненном движении вследствие различия скоростей. При

определенных концентрациях дисперсной фазы отмеченное обстоятельство приводит к увеличению в пристенной области градиента осредненной скорости несущего газа, росту поверхностного трения и теплоотдачи. Помимо этого, в турбулентной области пограничного слоя частицы могут оказывать влияние на пульсационные характеристики несущего газа посредством межфазного обмена импульсом в пульсационном (крупномасштабном и мелкомасштабном) движении вследствие их взаимодействия с турбулентными вихрями и когерентными структурами различных масштабов. Столкновения частиц со стенкой и между собой являются обстоятельствами, осложняющими анализ обратного влияния частиц на несущую фазу.

Из приведенных работ можно сделать вывод, что вопрос об устойчивости двухфазного ламинарного пограничного слоя и влияния частиц на ламинарно-турбулентный переход является малоизученным. Необходимы детальные теоретические и экспериментальные исследования влияния присутствия инерционных частиц на различные моды возмущений, характеризующихся своими временными масштабами.

Актуальными являются исследования влияния частиц на многочисленные факторы, оказывающие воздействие на течение в однофазном пограничном слое (акустические воздействия, градиент давления, теплообмен на поверхности, вдув (отсос) газа в пограничный слой, состояние поверхности и др.).

Необходимо отметить, что целый ряд принципиальных вопросов, касающихся двухфазных пограничных слоев газа с твердыми частицами, остался вне рассмотрения вследствие ограниченности объема обзора: коэффициенты восстановления скоростей частиц при соударении с поверхностью [116, 117]; явление термофореза частиц в погранслое [118]; влияние фазовых превращений [119], приводящих в том числе к плавлению частиц [120, 121]; взаимодействие ударных волн с частицами (каплями) [122–129]; влияние угла атаки и массоуноса с поверхности [130–134]; наличие вдува (отсоса) газа с поверхности [135–137]; процессы зарядки частиц при наличии внешних электрических и магнитных полей [138–142].

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-18-50288.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Яненко Н.Н., Солоухин Р.И., Папырин А.Н., Фомин В.М. Сверхзвуковые двухфазные течения в условиях скоростной неравновесности частиц. Новосибирск: Наука, 1980. 158 с.
2. Гилинский М.М., Стасенко А.Л. Сверхзвуковые газодисперсные струи. М.: Машиностроение, 1990. 175 с.



3. *Вараксин А.Ю.* Турбулентные течения газа с твердыми частицами. М.: Физматлит, 2003. 192 с.
4. *Михатулин Д.С., Полежаев Ю.В., Ревизников Д.Л.* Теплообмен и разрушение тел в сверхзвуковом гетерогенном потоке. М.: Янус-К, 2007. 392 с.
5. *Вараксин А.Ю.* Столкновения в потоках газа с твердыми частицами. М.: Физматлит, 2008. 312 с.
6. *Михатулин Д.С., Полежаев Ю.В., Ревизников Д.Л.* Теплообмен, термохимическое и термоэрозийное разрушение тепловой защиты. М.: Янус-К, 2011. 520 с.
7. Теория и проектирование газотурбинных и комбинированных установок / Под общ. ред. Вараксина А.Ю. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017. 680 с.
8. *Горбис З.Р.* Теплообмен дисперсных сквозных потоков. М.—Л.: Энергия, 1964. 296 с.
9. *Горбис З.Р.* Теплообмен и гидромеханика дисперсных сквозных потоков. М.: Энергия, 1970. 423 с.
10. *Горбис З.Р., Календерьян В.А.* Теплообменники с проточными дисперсными теплоносителями. М.: Энергия, 1975. 296 с.
11. *Сукомел А.С., Цветков Ф.Ф., Керимов Р.В.* Теплообмен и гидравлическое сопротивление при движении газовой смеси в трубах. М.: Энергия, 1977. 193 с.
12. *Дейч М.Е., Филиппов Г.А.* Газодинамика двухфазных сред. М.: Энергоиздат, 1981. 356 с.
13. *Перельман Р.Г., Пряхин В.В.* Эрозия элементов паровых турбин. М.: Энергоатомиздат, 1986. 181 с.
14. *Волков Э.П., Зайчик Л.И., Першуков В.А.* Моделирование горения твердого топлива. М.: Наука, 1994. 320 с.
15. *Вараксин А.Ю., Полежаев Ю.В., Поляков А.Ф.* Экспериментальное исследование влияния твердых частиц на турбулентное течение воздуха в трубе // ТВТ. 1998. Т. 36. № 5. С. 767.
16. *Вараксин А.Ю., Зайчик Л.И.* Влияние мелкодисперсной примеси на интенсивность турбулентности несущего потока в трубе // ТВТ. 1998. Т. 36. № 6. С. 1004.
17. *Зайчик Л.И., Вараксин А.Ю.* Влияние следа за крупными частицами на интенсивность турбулентности несущего потока // ТВТ. 1999. Т. 37. № 4. С. 683.
18. *Varaksin A.Yu., Polezhaev Yu.V., Polyakov A.F.* Effect of Particle Concentration on Fluctuating Velocity of the Disperse Phase for Turbulent Pipe Flow // Int. J. Heat Fluid Flow. 2000. V. 21. № 5. P. 562.
19. *Hwang W., Eaton J.K.* Homogeneous and Isotropic Turbulence Modulation by Small Heavy (St Similar to 50) Particles // J. Fluid Mech. 2006. V. 564. P. 361.
20. *Balachandar S., Eaton J.K.* Turbulent Dispersed Multiphase Flow // Ann. Rev. Fluid Mech. 1970. V. 2. P. 397.
21. *Pakhomov M.A., Protasov M.V., Terekhov V.I., Varaksin A.Yu.* Experimental and Numerical Investigation of Downward Gas-Dispersed Turbulent Pipe Flow // Int. J. Heat Mass Transfer. 2007. V. 50. P. 2107.
22. *Вараксин А.Ю.* Влияние частиц на турбулентность несущего потока газа // ТВТ. 2015. Т. 53. № 3. С. 441.
23. *Ревизников Д.Л., Способин А.В., Иванов И.Э.* Изменение структуры течения под воздействием высокоинерционной частицы при обтекании тела сверхзвуковым гетерогенным потоком // ТВТ. 2018. Т. 56. № 6. С. 908.
24. *Вараксин А.Ю.* Обтекание тел дисперсными газовыми потоками // ТВТ. 2018. Т. 56. № 2. С. 282.
25. *Fessler J.R., Eaton J.K.* Turbulence Modification by Particles in a Backward-Facing Step Flow // J. Fluid Mech. 1999. V. 394. P. 97.
26. *Вараксин А.Ю., Ромаш М.Э., Копейцев В.Н., Горбачев М.А.* Моделирование свободных тепловых вихрей: генерация, устойчивость, управление // ТВТ. 2010. Т. 48. № 6. С. 965.
27. *Вараксин А.Ю., Ромаш М.Э., Копейцев В.Н.* О возможностях визуализации при моделировании воздушных смерчей // ТВТ. 2010. Т. 48. № 4. С. 617.
28. *Varaksin A.Y., Romash M.E., Kopeitsev V.N.* Tornado-Like Gas-Solid Flow // The 6th Int. Symp. on Multiphase Flow, Heat Mass Transfer and Energy Conversion. AIP Conference Proc. 2010. V. 1207. P. 342.
29. *Varaksin A.Y., Romash M.E., Kopeitsev V.N., Gorbachev M.A.* Experimental Study of Wall-Free Non-Stationary Vortices Generation due to Air Unstable Stratification // Int. J. Heat Mass Transfer. 2012. V. 55. P. 6567.
30. *Varaksin A.Y., Romash M.E., Kopeitsev V.N.* Effect of Net Structures on Wall-Free Non-Stationary Air Heat Vortices // Int. J. Heat Mass Transfer. 2013. V. 64. P. 817.
31. *Вараксин А.Ю., Протасов М.В., Теплицкий Ю.С.* К выбору параметров частиц для визуализации и диагностики свободных концентрированных воздушных вихрей // ТВТ. 2014. Т. 52. № 4. С. 581.
32. *Вараксин А.Ю.* Воздушные и огненные концентрированные вихри: физическое моделирование (обзор) // ТВТ. 2016. Т. 54. № 3. С. 430.
33. *Вараксин А.Ю.* Воздушные торнадоподобные вихри: математическое моделирование // ТВТ. 2017. Т. 55. № 2. С. 291.
34. *Пахомов М.А., Терехов В.И.* Моделирование влияния пузырьков на турбулентные структуру течения и теплоперенос в турбулентном полидисперсном восходящем двухфазном потоке за внезапным расширением трубы // ТВТ. 2018. Т. 56. № 1. С. 50.
35. *Пахомов М.А., Терехов В.И.* Влияние закрутки потока на теплоперенос в газочапельном потоке за внезапным расширением трубы // ТВТ. 2018. Т. 56. № 3. С. 431.
36. *Алексеев В.Б., Залкинд В.И., Низовский В.Л., Низовский Л.В., Хямяляйнен Л.Т., Щигель С.С.* Исследование осаждения мелкодисперсных капель воды из двухфазного потока при обтекании коротких плоских профилей в условиях впрысков перегретой воды // ТВТ. 2018. Т. 56. № 3. С. 439.
37. *Девисилов В.А., Шарай Е.Ю.* Сепарация частиц в кольцевом конфузормом канале с внутренней

- вращающейся проницаемой перегородкой // ТВТ. 2018. Т. 56. № 4. С. 597.
38. *Einshtein A.* Zur Theorie der Brownschen Bewegung // Ann. Phys. 1906. Bd. 19. S. 371.
  39. *Radin I., Zakin J.L., Patterson G.K.* Drag Reduction in Solid-Fluid Systems // AIChE J. 1975. V. 21. P. 358.
  40. *Osipov A.N.* Mathematical Modeling of Dusty-Gas Boundary Layers // Appl. Mech. Rev. 1997. V. 50. P. 357.
  41. *Liu J.T.C.* Flow Induced by an Oscillating Infinite Flat Plate in a Dusty Gas // Phys. Fluids. 1966. V. 9. № 9. P. 1716.
  42. *Liu J.T.C.* Flow Induced by the Impulsive Motion of an Infinite Flat Plate in Dusty Gas // Astronautica Acta. 1967. V. 13. № 4. P. 369.
  43. *Marble F.E.* Dynamics of Dusty Gases // Ann. Rev. Fluid Mech. 1970. V. 2. P. 397.
  44. *Dorgan A.J., Loth E.* Simulation of Particles Released Near the Wall in a Turbulent Boundary Layer // Int. J. Multiphase Flow. 2004. V. 30. P. 649.
  45. *Boivin M., Simonin O., Squires K.D.* Direct Numerical Simulation of Turbulence Modulation by Particles in Isotropic Turbulence // J. Fluid Mech. 1998. V. 375. P. 235.
  46. *Elghobashi S., Truesdell G.S.* Direct Simulation of Particle Dispersion in a Decaying Isotropic Turbulence // J. Fluid Mech. 1992. V. 242. P. 655.
  47. *Clift R., Grace J.R., Weber M.E.* Bubbles, Drops and Particles. N.Y.: Academic Press, 1978.
  48. *Saffman P.G.* The Lift on a Small Sphere in a Slow Shear Flow // J. Fluid Mech. 1965. V. 22. P. 385.
  49. *Mei R.* An Approximate Expression for the Shear Lift Force on a Spherical Particle at Finite Reynolds Number // Int. J. Multiphase Flow. 1992. V. 18. P. 145.
  50. *Crowe C., Sommerfeld M., Tsuji Y.* Multiphase Flows with Droplets and Particles. Boca Raton, Florida, USA: CRC Press, 1998.
  51. *Rubinow S.I., Keller J.B.* The Transverse Force on a Spinning Sphere Moving in a Viscous Fluid // J. Fluid Mech. 1961. V. 11. P. 447.
  52. *Oesterle B., Bui Dinh T.* Experiments on the Lift of a Spinning Sphere in a Range of Intermediate Reynolds Numbers // Exp. Fluids. 1998. V. 25. P. 16.
  53. *Dennis S.C.R., Singh S.N., Ingham D.B.* The Steady Flow due to a Rotating Sphere at Low and Moderate Reynolds Number // J. Fluid Mech. 1980. V. 101. P. 257.
  54. *Sawatzki O.* Stromungsfeld um eine rotierend Kugel // Acta Mech. 1970. Bd. 9. S. 159.
  55. *Faxen H.* Die Bewegung einer starren Kugel längs der Achse eines mit zährer Flüssigkeit gefüllten Rohres // Arkiv Mat. Astron. Fys. 1923. Bd. 17. S. 1.
  56. *Maude A.* The Movement of a Sphere in Front of a Plane at Low Reynolds Number // Brit. J. Appl. Phys. 1963. V. 14. P. 894.
  57. *Wang Q., Squires K., Chen M., McLaughlin J.* On the Role of Lift Force in Turbulence Simulations of Particle Deposition // Int. J. Multiphase Flow. 1997. V. 23. P. 749.
  58. *Arcen B., Taniere A., Oesterle B.* On the Influence of Near-Wall Forces in Particle-Laden Channel Flow // Int. J. Multiphase Flow. 2006. V. 32. P. 1326.
  59. *Jin C., Potts I., Reeks M.W.* The Effects of Near Wall Corrections to Hydrodynamic Forces on Particle Deposition and Transport in Vertical Turbulent Boundary Layers // Int. J. Multiphase Flow. 2016. V. 79. P. 62.
  60. *Zeng L., Najjar F., Balachandar S., Fischer P.* Forces on a Finite-Sized Particle Located Close to a Wall in a Linear Shear Flow // Phys. Fluids. 2009. V. 21. P. 033302.
  61. *Lee H., Balachandar S.* Drag and Lift Forces on a Spherical Particle Moving on a Wall in a Shear Flow at Finite Re // J. Fluid Mech. 2010. V. 657. P. 89.
  62. *Осипов А.Н.* О структуре ламинарного пограничного слоя дисперсной примеси на плоской пластине // Изв. АН СССР. МЖГ. 1980. № 4. С. 48.
  63. *Низматулин Р.И.* Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978. 336 с.
  64. *Осипов А.Н.* Исследование зон неограниченного роста концентрации частиц в дисперсных потоках // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 3. С. 46.
  65. *Осипов А.Н.* Движение запыленного газа в начальном участке плоского канала и круглой трубы // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 6. С. 80.
  66. *Наумов В.А.* Расчет ламинарного пограничного слоя на пластине с учетом подъемных сил, действующих на дисперсную примесь // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 6. С. 171.
  67. *Вараксин А.Ю., Иванов Т.Ф.* Псевдоламинарный пограничный слой на затупленном теле, обтекаемом гетерогенным потоком // ТВТ. 2004. Т. 42. № 1. С. 77.
  68. *Wang Q., Squires K.D.* Large Eddy Simulation of Particle-Laden Turbulent Channel Flow // Phys. Fluids. 1996. V. 8. № 5. P. 1207.
  69. *Зайчик Л.И., Алипченков В.М.* Кинетическое уравнение для функции плотности вероятности скорости и температуры частиц в неоднородном турбулентном потоке. Анализ течения в сдвиговом слое // ТВТ. 1998. Т. 36. № 4. С. 596.
  70. *Вараксин А.Ю.* Двухфазные потоки с твердыми частицами, каплями и пузырями: проблемы и результаты исследований (обзор) // ТВТ. 2020. Т. 58. № 4. С. 646.
  71. *Kulick J.D., Fessler J.R., Eaton J.K.* Particle Response and Turbulence Modification in Fully Developed Channel Flow // J. Fluid Mech. 1994. V. 277. P. 109.
  72. *Вараксин А.Ю., Поляков А.Ф.* Экспериментальное исследование пульсаций скоростей частиц в турбулентном потоке воздуха в трубе // ТВТ. 2000. Т. 38. № 5. С. 792.
  73. *Asmolov E.S.* Dusty-Gas Flow in a Laminar Boundary Layer over a Blunt Body // J. Fluid Mech. 1995. V. 305. P. 29.
  74. *Wang B.Y., Glass I.J.* Compressible Laminar Boundary-Layer Flows of a Dusty Gas over a Semi-Infinite Flat Plate // J. Fluid Mech. 1988. V. 186. P. 223.
  75. *Singleton R.E.* Compressible Gas-Solid Particle Flow over a Semi-Infinite Flat Plate // Z. Angew. Math. Phys. 1965. V. 16. P. 421.
  76. *Вараксин А.Ю., Низматулин Д.С., Полежаев Ю.В., Поляков А.Ф.* Измерения полей скоростей газа и твердых частиц в пограничном слое турбулизиро-

- ванного гетерогенного потока // ТВТ. 1995. Т. 33. № 6. С. 915.
77. *Varaksin A.Y.* Turbulent Particle-Laden Gas Flows. Springer, 2007. 210 p.
  78. *Varaksin A.Yu.* Collisions in Particle-Laden Gas Flows. N.Y.: Begell House, 2013. 370 p.
  79. *Грек Г.Р., Козлов В.В., Рамазанов М.П.* Ламинарно-турбулентный переход при повышенной степени турбулентности набегающего потока: обзор // Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук. 1991. Вып. 6. С. 106.
  80. *Leib S.J., Wundrow D.W., Goldstein M.E.* Effects of Free-Stream Turbulence and Other Vortical Disturbances on a Laminar Boundary Layer // J. Fluid Mech. 1999. V. 380. P. 169.
  81. *Жигулев С.В., Успенский А.А., Устинов М.В.* Влияние масштаба турбулентности потока и формы затупления передней кромки на ламинарно-турбулентный переход в пограничном слое // Изв. РАН. МЖГ. 2009. № 1. С. 39.
  82. *Тумин А.М., Федоров А.В.* Возбуждение волн неустойчивости локализованным вибратором в пограничном слое // ЖПМИТФ. 1984. № 6. С. 55.
  83. *Мануйлович С.В.* О возбуждении волн Толлмина—Шлихтинга вибрирующим участком обтекаемой поверхности // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 4. С. 46.
  84. *Мануйлович С.В.* Возмущения трехмерного пограничного слоя, генерируемые неровностью поверхности // Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. № 5. С. 129.
  85. *Schneider S.P.* Effects of Roughness on Hypersonic Boundary Layer Transition // J. Spacecraft and Rockets. 2008. V. 45. № 2. P. 193.
  86. *Казаков А.В., Коган М.Н.* Устойчивость дозвукового ламинарного пограничного слоя на плоской пластине при объемном подводе энергии // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 2. С. 62.
  87. *Довгаль А.В., Левченко В.Я., Тимофеев В.А.* Ламинаризация пограничного слоя путем локализованного нагрева поверхности // Изв. СО АН СССР. Серия техн. наук. 1989. Вып. 3. С. 60.
  88. *Boothroyd R.G.* Flowing Gas-Solids Suspensions. London: Chapman and Hall, 1971. 289 p.
  89. *Druzhinin O.A., Elghobashi S.* On the Decay Rate of Isotropic Turbulence Laden with Microparticles // Phys. Fluids. 1999. V. 11. № 3. P. 602.
  90. *Druzhinin O.A.* The Influence of Particle Inertia on the Two-Way Coupling and Modification of Isotropic Turbulence by Microparticles // Phys. Fluids. 2001. V. 13. № 12. P. 3738.
  91. *Зайчик Л.И., Алипченков В.М., Козлов И.М.* Моделирование влияния мелкодисперсных частиц на турбулентность // ТВТ. 2010. Т. 48. № 2. С. 224.
  92. *Вараксин А.Ю., Орлов М.А.* Об экстремуме влияния малоинерционных частиц на энергию турбулентности несущего газа // ДАН. 2018. Т. 482. № 3. С. 275.
  93. *Saffman P.G.* On the Stability of Laminar Flow of a Dusty Gas // J. Fluid Mech. 1962. V. 13. P. 120.
  94. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1969. 744 с.
  95. *Asmolov E.S., Manuilovich S.V.* Stability of a Dusty-Gas Laminar Boundary Layer on a Flat Plate // J. Fluid Mech. 1998. V. 365. P. 137.
  96. *Fedorov A.V.* Receptivity of a Supersonic Boundary Layer to Solid Particulates // J. Fluid Mech. 2013. V. 737. P. 105.
  97. *Chuvakov P.V., Fedorov A.V., Obraz A.O.* Numerical Modelling of Supersonic Boundary-Layer Receptivity to Solid Particulates // J. Fluid Mech. 2019. V. 859. P. 949.
  98. *Reeks M.W.* On the Dispersion on Small Particles Suspended in an Isotropic Turbulent Field // J. Fluid Mech. 1977. V. 83. P. 529.
  99. *Reeks M.W.* The Transport of Discrete Particles in Inhomogeneous Turbulence // J. Aerosol Sci. 1983. V. 14. P. 729.
  100. *Shin M., Lee J.W.* Memory Effect in the Eulerian Particle Deposition in a Fully Developed Turbulent Channel Flow // J. Aerosol Sci. 2001. V. 32. P. 675.
  101. *Shin M., Kim D.S., Lee J.W.* Deposition of Inertia-Dominated Particles Inside a Turbulent Boundary Layer // Int. J. Multiphase Flow. 2003. V. 29. P. 893.
  102. *Li D., Wei A., Luo K., Fan J.* Direct Numerical Simulation of a Particle-Laden Flow in a Flat Plate Boundary Layer // Int. J. Multiphase Flow. 2016. V. 79. P. 124.
  103. *Li D., Luo K., Fan J.* Particle Statistics in a Two-Way Coupled Turbulent Boundary Layer Flow over a Flat Plate // Powder Technol. 2017. V. 305. P. 250.
  104. *Li D., Luo K., Fan J.* Translational and Rotational Motions of Small Solid Particles in a Spatially Developing Turbulent Boundary Layer with Heat Transfer // Int. J. Heat Mass Transfer. 2018. V. 124. P. 715.
  105. *Luo K., Dai Q., Liu X., Fan J.* Effects of Wall Roughness on Particle Dynamics in a Spatially Developing Turbulent Boundary Layer // Int. J. Multiphase Flow. 2019. V. 111. P. 140.
  106. *Li D., Luo K., Fan J.* Modulation of Turbulence by Dispersed Solid Particles in a Spatially Developing Flat-Plate Boundary Layer // J. Fluid Mech. 2016. V. 802. P. 359.
  107. *Taniere A., Oesterle B., Monnier J.C.* On the Behaviour of Solid Particles in a Horizontal Boundary Layer with Turbulence and Saltation Effects // Exp. Fluids. 1997. V. 23. P. 463.
  108. *Rogers C.B., Eaton J.K.* Particle Response and Turbulent Modification in a Flat Plate Turbulent Boundary Layer // Turbulence Modification in Dispersed Multiphase Flows. ASME. 1989. V. 80. P. 15.
  109. *Rogers C.B., Eaton J.K.* The Behavior of Small Particles in a Vertical Turbulent Boundary Layer in Air // Int. J. Multiphase Flow. 1990. V. 16. P. 819.
  110. *Wang J., Levy E.K.* Particle Motions and Distributions in Turbulent Boundary Layer of Air-Particle Flow Past a Vertical Flat Plate // Exp. Thermal Fluid Sci. 2003. V. 27. P. 845.
  111. *Wang J., Levy E.K.* Particle Behavior in the Turbulent Boundary Layer of a Dilute Gas-Particle Flow Past a Flat Plate // Exp. Thermal Fluid Sci. 2006. V. 30. P. 473.
  112. *Rogers C.B., Eaton J.K.* The Effect of Small Particles on Fluid Turbulence in a Flat-Plate, Turbulent

- Boundary Layer in Air // Phys. Fluids A. 1991. V. 3. № 5. P. 928.
113. *Li J., Wang H., Liu J., Chen S., Zheng C.* An Experimental Study on Turbulence Modification in the Near-Wall Boundary Layer of a Dilute Gas-Particle Channel Flow // Exp. Fluids. 2012. V. 53. P. 1385.
  114. *Moin P., Kim J.* The Structure of the Vorticity Field in Turbulent Channel Flow. Part I. Analysis of Instantaneous Fields and Statistical Correlations // J. Fluid Mech. 1985. V. 155. P. 441.
  115. *Bhaganagar K., Kim J., Coleman G.* Effect of Roughness on Wall-Bounded Turbulence // Flow Turbulence and Combustion. 2004. V. 72. P. 463.
  116. *Лашков В.А.* Об экспериментальном определении коэффициентов восстановления скорости частиц потока газозвеси при ударе о поверхность // ИФЖ. 1991. Т. 60. № 2. С. 197.
  117. *Лашков В.А.* Коэффициенты восстановления скорости при ударе твердых частиц газозвеси о поверхность тела. Дис. ... докт. физ.-мат. наук. СПб.: СПбГУ, 2012. 379 с.
  118. *Talbot L., Cheng R.K., Schefer R.W., Willis D.R.* Thermophoresis of Particles in a Heated Boundary Layer // J. Fluid Mech. 1980. V. 101. P. 737.
  119. *Губайдуллин Д.А., Терезулова Е.А.* Акустические волны в многофракционных газозвесах при наличии фазовых превращений // ТВТ. 2018. Т. 56. № 5. С. 789.
  120. *Гринац Э.С., Жбанов В.А., Кашиеваров А.В., Миллер А.Б., Потапов Ю.Ф., Стасенко А.Л.* Динамика капли на поверхности тела в потоке газа // ТВТ. 2019. Т. 57. № 2. С. 246.
  121. *Вараксин А.Ю.* Столкновения частиц и капель в турбулентных двухфазных потоках // ТВТ. 2019. Т. 57. № 4. С. 588.
  122. *Voiko V.M., Papyrin A.N., Poplavskii S.V.* Dynamics of Droplet Breakup in Shock Waves // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 1987. V. 28. P. 263.
  123. *Ishii R., Hatta N., Umeda Y., Yuhi M.* Supersonic Gas-Particle Two-Phase Flow Around a Sphere // J. Fluid Mech. 1990. V. 221. P. 453.
  124. *Kim S.W., Chang K.S.* Reflection of Shock Wave from a Compression Corner in a Particle-Laden Gas Region // Shock Waves. 1991. V. 1. P. 65.
  125. *Kutushev A.G., Nazarov U.A.* Numerical Investigation of Unsteady Shock Waves in Vapor-Gas-Droplet Mixtures // Fluid Dyn. 1993. V. 27. P. 501.
  126. *Saito T., Marumoto M., Takayama K.* Numerical Investigations of Shock Waves in Gas-Particle Mixtures: Evaluation of Numerical Methods for Dusty-Gas Shock Wave Phenomena // Shock Waves. 2003. V. 13. P. 299.
  127. *Yeom G.S., Chang K.S.* Dissipation of Shock Wave in a Gas-Droplet Mixture by Droplet Fragmentation // Int. J. Heat Mass Transfer. 2012. V. 55. P. 941.
  128. *Гидаспов В.Ю., Москаленко О.А., Северина Н.С.* Численное исследование влияния капель воды на структуру детонационной волны в водородо-воздушной горючей смеси // ТВТ. 2018. Т. 56. № 5. С. 782.
  129. *Гидаспов В.Ю., Северина Н.С.* Моделирование детонации металлогазовых горючих смесей в высокоскоростном потоке за ударной волной // ТВТ. 2019. Т. 57. № 4. С. 560.
  130. *Ефимов К.Н., Овчинников В.А., Якимов А.С.* Численное исследование влияния вращения на характеристики сопряженного тепломассообмена при сверхзвуковом обтекании конуса, затупленного по сфере под углом атаки и массовом уносе с поверхности // ТВТ. 2018. Т. 56. № 2. С. 253.
  131. *Зинченко В.И., Гольдин В.Д., Зверев В.Г.* Численное моделирование влияния материалов пассивной тепловой защиты на характеристики сопряженного тепломассообмена при пространственном обтекании затупленных тел // ТВТ. 2018. Т. 56. № 5. С. 747.
  132. *Миронов В.В., Толкач М.А.* Термическая деструкция резиноподобных теплозащитных материалов под слоем конденсированной фазы // ТВТ. 2019. Т. 57. № 2. С. 269.
  133. *Страхов В.Л., Кузьмин И.А., Бакулин В.Н.* Комплексное математическое моделирование теплозащиты из высоконаполненных эластомеров // ТВТ. 2019. Т. 57. № 2. С. 278.
  134. *Афанасьев В.А., Никитин П.В., Тушавина О.В.* Особенности механизма термосилового разрушения углеродных материалов при обтекании сверхзвуковым высокотемпературным воздушным потоком // ТВТ. 2019. Т. 57. № 4. С. 572.
  135. *Гришин А.М., Забарин В.И.* Двухфазный пограничный слой с несжимаемой несущей фазой на пластине при вдуве и отсосе газа с поверхности // Журн. прикл. механики и техн. физики. 1987. № 5. С. 54.
  136. *Василевский Э.Б., Яковлева Л.В.* Тангенциальный вдув газа в запыленный высокотемпературный высокоскоростной поток // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 4(5). С. 1053.
  137. *Вараксин А.Ю., Протасов М.В.* О влиянии вдува газа на защиту поверхностей тел, обтекаемых двухфазным потоком // ТВТ. 2017. Т. 55. № 6. С. 785.
  138. *Тукмаков А.Л., Кашипов Н.Ф., Тукмаков Д.А., Фазльяхматов М.Г.* Процесс осаждения заряженной полидисперсной газозвеси на поверхность пластины в электрическом поле // ТВТ. 2018. Т. 56. № 4. С. 499.
  139. *Kuzenov V.V., Ryzhkov S.V.* Numerical Modeling of Laser Target Compression in an External Magnetic Field // Math. Models Comput. Simul. 2018. V. 10. P. 255.
  140. *Kuzenov V.V., Ryzhkov S.V.* Approximate Calculation of Convective Heat Transfer Near Hypersonic Aircraft Surface // J. Enhanced Heat Transfer. 2018. V. 25. P. 181.
  141. *Kuzenov V.V., Ryzhkov S.V.* Calculation of Plasma Dynamic Parameters of the Magneto-Inertial Fusion Target with Combined Exposure // Physics of Plasmas. 2019. V. 26. 092704.
  142. *Ryzhkov S.V., Kuzenov V.V.* Analysis of the Ideal Gas Flow over Body of Basic Geometrical Shape // Int. J. Heat Mass Transfer. 2019. V. 132. P. 587.