ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ХИМИЧЕСКОЙ ТЕХНОЛОГИИ, 2022, том 56, № 2, с. 205–208

УДК 66.069.82

СОЧЕТАНИЕ ВАРИАЦИОННОГО И ЭМПИРИЧЕСКОГО МЕТОДОВ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОРОЗНОСТИ ПРИ ОСАЖДЕНИИ СФЕРИЧЕСКИХ ЧАСТИЦ

© 2022 г. А. М. Трушин[a], М. А. Носырев[a], Л. В. Равичев[a], С. И. Фролова[a], В. Е. Яшин[a], С. И. Ильина[a]

[a] *Российский химико-технологический университет им. Д.И. Менделеева, Москва, Россия*

**e-mail: vnissok@list.ru*

Поступила в редакцию 08.07.2021 г.
После доработки 29.12.2021 г.
Принята к публикации 30.12.2021 г.

Сочетание вариационного и эмпирического методов определения порозности использовано для теоретического объяснения степенной зависимости безразмерной скорости стесненного движения частиц в процессе осаждения.

Ключевые слова: порозность, вариационный метод, стесненное осаждение, медленное движение

DOI: 10.31857/S0040357122020130

ВВЕДЕНИЕ

При однородном псевдоожижении сферических частиц порозность слоя достаточно точно определяется на основе эмпирической степенной функции связывающей безразмерную скорость (отношение приведенной скорости жидкости к скорости витания) с порозностью слоя. В случае осаждения степенная функция порозности является отношением скоростей стесненного и свободного осаждения дисперсных частиц.

Теоретические уравнения, связывающие порозность слоя с безразмерной скоростью на основе ячеечных моделей, модели эффективной вязкости, а также модели основанной на течении жидкости по каналам образованным частицами псевдоожиженного слоя не позволяет получить степенную функцию [1]. Следует также отметить, что наиболее теоретически обоснованны уравнения, полученные из ячеечных моделей, имеют недопустимо большие отклонения от экспериментальных данных.

Учитывая простоту и универсальность степенной зависимости безразмерной скорости от порозности слоя, возникает необходимость ее теоретического обоснования, что является целью данной работы.

ПОРОЗНОСТЬ СЛОЯ ПРИ МЕДЛЕННОМ РЕЖИМЕ ОБТЕКАНИЯ СФЕРИЧЕСКИХ ЧАСТИЦ

В случае однородного псевдоожижения степенная функция имеет следующий вид:

$$\frac{w_{\text{пс}}}{w_{\text{в}}} = \varepsilon^n, \quad (1)$$

где $w_{\text{пс}}$ – приведенная скорость сплошной фазы; $w_{\text{в}}$ – скорость витания.

При стесненном осаждении степенная функция имеет тот же вид:

$$\frac{w_{\text{д}}}{w_{\text{с}}} = \varepsilon^n, \quad (2)$$

где $w_{\text{д}}$ – скорость стесненного движения дисперсных частиц относительно стенок аппарата; $w_{\text{с}}$ – скорость свободного движения частиц.

Показатель степени n для частиц малого размера при величине числа Рейнольдса, рассчитанного по скорости витания, не превышающего 0.20 в случае жидкой сплошной фазы можно принять равным 4.65 [2, 3].

Рассмотрим медленное осаждение сферических частиц в заданном объеме жидкости при Re < 0.2. Частицы и вытесняемая ими жидкость движутся противотоком. Относительная скорость ($w_{\text{от}}$) может быть выражена через скорость дисперсных частиц относительно стенок аппарата:

$$w_{\text{от}} = \frac{w_{\text{д}}}{\varepsilon}. \qquad (3)$$

Относительная скорость также может быть выражена через приведенные скорости фаз:

$$w_{\text{от}} = \frac{w_{\text{пд}}}{1-\varepsilon} + \frac{w_{\text{пс}}}{\varepsilon} = w_{\text{с}}\varepsilon^{n-1}, \qquad (4)$$

где $w_{\text{пд}}$ и $w_{\text{пс}}$ – приведенные скорости дисперсной и сплошной фазы.

Относительная скорость не изменится, если уравнение (4) представить в следующем виде:

$$\frac{w_{\text{пд}}}{1-\varepsilon} + (1+\alpha)\frac{w_{\text{пс}}}{\varepsilon} = w_{\text{с}}\varepsilon^{n-1} + \alpha\frac{w_{\text{пс}}}{\varepsilon}, \qquad (5)$$

где α – постоянная величина.

Скорость сплошной фазы можно выразить из уравнения (5):

$$\frac{w_{\text{пс}}}{\varepsilon} = \frac{w_{\text{с}}}{(1+\alpha)}\left(\varepsilon^{n-1} + \alpha\frac{w_{\text{пс}}}{\varepsilon w_{\text{с}}} - \frac{w_{\text{пд}}}{(1-\varepsilon)\,w_{\text{с}}}\right). \qquad (6)$$

Ввиду аналогии между процессами осаждения и псевдоожижения силы сопротивления при обтекании частиц жидкостью в псевдоожиженном слое и в слое равномерно осаждающихся частиц равны. Сила сопротивления ($f_{\text{с}}$) при движении потока относительно частиц однородного псевдоожиженного слоя, приходящаяся на единицу объема жидкости выражается следующей формулой [4]:

$$f_{\text{с}} = (1-\varepsilon)(\rho_{\text{д}} - \rho_{\text{с}})\,g, \qquad (7)$$

где $\rho_{\text{д}}$ и $\rho_{\text{с}}$ – соответственно плотность дисперсной и сплошной фазы.

Формула (7) получена при ряде допущений. Одним из этих допущений является пропорциональность выталкивающей силы Архимеда плотности слоя [2, 5].

$$f_{\text{а}} = [\rho_{\text{д}}(1-\varepsilon) + \rho_{\text{с}}\varepsilon]\,g. \qquad (8)$$

В формуле (8) выталкивающая сила приходится на единицу объема твердой фазы.

Анализ уравнений, описывающий процесс медленного осаждения, приведенный в работе [1] в рамках модели эффективной вязкости показывает, что уравнение (8) может применяться с достаточной точностью при сравнительно малых величинах порозности. При больших величинах порозности (0.75–1.0) необходимо учитывать выталкивающую силу Архимеда пропорциональную плотности жидкости, что изменит вид формулы (7).

Согласно уравнению (6) интенсивность диссипации в заданном объеме жидкости $V_{\text{с}}$ можно представить в виде следующего функционала:

$$I = \int_0^{V_{\text{с}}} \frac{w_{\text{с}}}{1+\alpha}\left[\varepsilon^{n-1} + \alpha\frac{w_{\text{пс}}}{w_{\text{с}}\varepsilon} - \frac{w_{\text{пд}}}{w_{\text{с}}(1-\varepsilon)}\right]\times \\ \times(1-\varepsilon)(\rho_{\text{д}} - \rho_{\text{с}})\,g dV_{\text{с}}. \qquad (9)$$

Функционал (9) не содержащий производную и определяющий интенсивность диссипации механической энергии в соответствии с вариационным принципом Гельмгольца в случае медленного движения должен подчиняться следующему уравнению Эйлера [6–9]:

$$\frac{\partial F}{\partial \varepsilon} = 0, \qquad (10)$$

где F – подынтегральная функция.

После дифференцирования подынтегральной функции с учетом величины показателя степени n получим:

$$3.65\varepsilon^{2.65} - 4.65\varepsilon^{3.65} - \alpha\frac{w_{\text{пс}}}{w_{\text{с}}\varepsilon^2} = 0. \qquad (11)$$

Соотношение $\frac{w_{\text{пс}}}{w_{\text{с}}}$ определяет величину объема дисперсной фазы в слое. Таким образом, равенство эмпирических и аналитических величин порозности из уравнений (2) и (11) при одинаковых значениях соотношения $\frac{w_{\text{пс}}}{w_{\text{с}}}$ можно считать аналогом граничных условий необходимых для определения величины коэффициента α. Эмпирические данные величин порозности при различных значениях соотношения $\frac{w_{\text{пс}}}{w_{\text{с}}}$ могут быть получены из уравнения (2), где $w_{\text{д}}$ заменяется на $\frac{w_{\text{пс}}}{1-\varepsilon}$:

$$\frac{w_{\text{пс}}}{w_{\text{с}}} = (1-\varepsilon)\varepsilon^{4.65}. \qquad (12)$$

Наименьшее расхождение между величинами порозности полученными из уравнений (11) и (12) в интервале значений порозности 0.45–0.60 соответствует величине $\alpha = 2.5$.

Следует отметить, что указанный интервал порозности входит в область применимости формулы (7).

Среднее расхождение между эмпирическими и теоретическими величинами ε в соответствии с таблицей (1) составляет 2.6% при максимальном расхождении 4.7% (при коэффициенте корреляции превышающим значение 0.995, коэффициент детерминации больше 0.991). Таким образом, при каждом значении соотношения $\frac{w_{\text{пс}}}{w}$ в слое равномерно и медленно осаждающихся частиц величина порозности в интервале 0.45–0.60 устанавливается в соответствии с условием близком к вариационному принципу минимума интенсивности диссипации.

Малый интервал величин, ε где результаты решения уравнений (11) и (12) достаточно близки частично объясняется тем, что сила сопротивле-

Таблица 1. Сравнение эмпирических величин порозности из уравнения (12) с теоретическими из уравнений (17) и (11)

Отношение скорости свободного движения к приведенной скорости жидкости $\left(\frac{w_c}{w_{nc}}\right)$		74.51	63.16	54.1	46.73	40.74	35.82	31.45	26.89	21.18	17.51	15.24
Экспериментальная величина порозности, формула (12)		0.45	0.47	0.49	0.51	0.53	0.55	0.573	0.60	0.65	0.70	0.75
Теоретическая величина порозности	формула (17)	0.438	0.463	0.487	0.511	0.535	0.559	0.585	0.615	0.665	0.71	0.743
	формула (11)	0.434	0.456	0.478	0.502	0.529	0.562	0.6				

ния, выражаемая уравнением (7) определяется градиентом скорости возникающем у поверхности частиц обтекаемых жидкостью, который считается полностью преобладающим над градиентом скорости в объеме сплошной фазы. Кроме того, как отмечено выше, интервал изменения порозности должен соответствовать интервалу, где выталкивающая сила Архимеда пропорциональна плотности слоя. Также можно предположить, что причиной сужения интервала порозности может являться то, что эмпирическая зависимость безразмерной скорости от ε определяет общую тенденцию изменения безразмерной скорости с ростом порозности с усредненным показателем степени n, не полностью отражая поведение ее производной, что с учетом уравнения Эйлера влияет на результат дифференцирования подынтегрального выражения функционала (9). Это предположение можно подтвердить заменой в функционале (9) эмпирической степенной функции на полуэмпирическую, полученную в результате решения уравнения основанного на балансе сил в жидкости текущей по каналам псевдоожиженного слоя [1]. Эта полуэмпирическая функция выражается формулой:

$$\frac{w_{\text{д}}}{\varepsilon w_{\text{с}}} = \frac{0.16\varepsilon^2}{1-\varepsilon}. \tag{13}$$

Функционал, включающий формулу (13) имеет вид:

$$I = \int\limits_0^{V_{\text{с}}} \frac{w_{\text{с}}}{1+\alpha_1}\left[\frac{0.16\varepsilon^2}{1-\varepsilon} + \alpha_1\frac{w_{\text{пс}}}{w_{\text{с}}} - \frac{w_{\text{пд}}}{w_{\text{с}}(1-\varepsilon)}\right]\times \\ \times(1-\varepsilon)(\rho_{\text{д}}-\rho_{\text{с}})g\,dV_{\text{с}}. \tag{14}$$

Из уравнений (14) и (10) получим:

$$0.32\varepsilon - \alpha_1\frac{w_{\text{пс}}}{\varepsilon^2 w_{\text{с}}} = 0. \tag{15}$$

Уравнение (15) сводится к следующей формуле:

$$\varepsilon = 1.462\left(\frac{\alpha_1 w_{\text{пс}}}{w_{\text{с}}}\right)^{\frac{1}{3}}. \tag{16}$$

Величина α_1, также как величина α в уравнении (11) определенная из условия наименьшего расхождения между величинами порозности рассчитанными по уравнениям (12) и (16) равна 2.

В результате получим формулу для расчета порозности:

$$\varepsilon = 1.842\left(\frac{w_{\text{пс}}}{w_{\text{с}}}\right)^{\frac{1}{3}}. \tag{17}$$

Наибольшее и среднее расхождение величин ε рассчитанных по формулам (12) и (17) в интервале величин порозности 0.45–0.75 (табл. 1) составляет 2.81 и 1.6% (при коэффициенте корреляции превышающим значение 0.996, коэффициент детерминации больше 0.992).

Таким образом, замена эмпирической степенной функции на полуэмпирическую в функционале (14) привело к получению формулы (17), которая более точно и в два раза большем интервале порозности описывает эмпирические данные, чем формула (11).

Формула (17) представленная в виде обратной зависимости между переменными показывает, что отношение приведенной скорости к скорости свободного движения при осаждении в интервале порозности 0.4–0.75 имеет вид степенной (кубической) функции:

$$\frac{w_{\text{пд}}}{w_{\text{с}}} = \frac{w_{\text{пс}}}{w_{\text{с}}} = 0.16\varepsilon^3. \tag{18}$$

Поскольку формулу (18) можно получить из формулы (13) заменой $w_{\text{д}}$ на $\frac{w_{\text{пд}}}{1-\varepsilon}$, можно заключить, что одна и та же формула получена двумя методами: решением дифференциального уравнения на основе баланса сил [1] и из функционала (14). Интересно отметить, что при псевдоожижении отношение приведенной скорости жидкости к скорости витания также описывается степенной функцией, но другого вида (уравнение (1)).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исходя из изложенного выше, можно заключить, что степенная зависимость в функционале (9) с достаточной точностью соответствует уравнению Эйлера и, следовательно, вариационному принципу минимума интенсивности диссипации механической энергии, который может являться ее теоретическим объяснением. Следует подчеркнуть, что такой вывод относится к медленному обтеканию сферических частиц в интервале величин порозности 0.45–0.6.

Значительно точнее и в два раза большем интервале порозности соответствует вариационному принципу Гельмгольца другой вид степенной функции – уравнение (18).

ОБОЗНАЧЕНИЯ

α, α_1	постоянные величины
ε	порозность, $м^3/м^3$
g	ускорение свободного падения, $м/с^2$
$f_с$	сила сопротивления приходящаяся на единицу объема сплошной фазы в слое, $Н/м^3$
$f_а$	подъемная сила Архимеда приходящаяся на единицу объема твердой фазы в слое, $Н/м^3$
$\rho_д$	плотность дисперсной фазы, $кг/м^3$
$\rho_с$	плотность сплошной фазы, $кг/м^3$
$w_в$	скорость витания, м/с
$w_с$	скорость свободного осаждения, м/с
$w_{пс}$	приведенная скорость сплошной фазы, м/с
$w_{пд}$	приведенная скорость дисперсной фазы, м/с
$V_с$	фиксированный объем сплошной фазы в слое, $м^3$
Re	число Рейнольдса

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. *Trushin A.M., Ravichev L.V., Yashin V.E., Nosyrev M.A., Komlyashev R.B.* Semiempirical Method for Determining the Rate of Slow Hindered Motion // Theor. Found. Chem. Eng. 2019, V. 53. № 6. P. 967. [*Трушин А.М., Равичев Л.В., Яшин В. Е., Носырев М.А., Комляшев Р.Б.* Полуэмпирический метод определения скорости стесненного медленного движения // Теорет. основы хим. технологии. 2019. Т. 53. № 6. С. 617].
2. *Davidson J., Harrison F.* Fluidization. Academic Press. London and N.Y. 1978. P. 847.
3. *Швыдкий В.С., Ярошенко Ю.Г., Гордон Я.М., Шаврин В.С., Носков А.С.* Механика жидкости и газа. М.: ИКЦ “Академкнига”, 2003. С. 462.
4. *Trushin A.M., Nosyrev M.A., Ravichev L.V., Yashin V.E.* Semiempirical Method for Determining the Rate of Slow Hindered Motion // Theor. Found. Chem. Eng. 2021. V. 53. № 6. P. 967. [*Трушин А.М., Носырев М.А., Равичев Л.В., Яшин В.Е.* К вопросу о расчете скорости начала псевдоожижения // Теорет. основы хим. технологии. 2021. Т. 53. № 6. С. 617].
5. *Разинов А.И., Клинов А.В., Дьяконов Г.С.* Процессы и аппараты химической технологии. Казань: КНИТУ, 2017. С. 856.
6. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978. С. 736.
7. *Мышкис А.Д.* Прикладная математика для инженеров, специальные курсы. М.: Физматлит, 2007. С. 688.
8. *Глазунов Ю.Т.* Вариационные методы. Москва–Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2006. С. 472.
9. *Кольцова Э.М., Гордеев Л.С., Третьяков Ю.Д., Вертегел А.А.* Термодинамика необратимых процессов и нелинейная динамика. М.: Юрайт, 2019. С. 430.