

УДК 532.51

## НЕОДНОРОДНОЕ ТЕЧЕНИЕ НУССЕЛЬТА–КУЭТТА–ПУАЗЕЙЛЯ

© 2022 г. Н. В. Бурмашева<sup>а</sup>, \*, Е. Ю. Просвиряков<sup>а</sup>, \*\*

<sup>а</sup>Институт машиноведения УрО РАН, г. Екатеринбург, Россия

\*e-mail: nat\_burm@mail.ru

\*\*e-mail: evgen\_pros@mail.ru

Поступила в редакцию 16.03.2022 г.

После доработки 02.05.2022 г.

Принята к публикации 09.06.2022 г.

Изучен новый тип установившегося пленочного течения жидкости, стекающей по наклонной плоскости. Рассмотрены двумерные по скоростям неоднородные течения типа Нуссельта. В зависимости от граничных условий на свободной границе, которая полагается недеформируемой, неоднородные течения жидкости обобщают точные решения Нуссельта, Куэтта и Пуазейля. Рассмотрены в статье обобщения и модификации классических течений описываются переопределенной системой, состоящей из уравнений Навье–Стокса и уравнения непрерывности. Указано нетривиальное точное решение переопределенной системы, которое характеризует неоднородное движение вертикальной завихренной жидкости. Проанализированы скорости и касательные напряжения, которые описываются полиномами. Исследование гидродинамических полей показало, что они имеют сложную стратификацию. Поток жидкости, движущейся по наклонной плоскости, может содержать четыре области с противотоками. Касательные напряжения имеют разный знак по толщине слоя и могут дважды менять знак.

*Ключевые слова:* точное решение, уравнения Навье–Стокса, неоднородное сдвиговое течение, течение Нуссельта, течение Куэтта, течение Пуазейля, противотечения

**DOI:** 10.31857/S0040357122050025

### ВВЕДЕНИЕ

При описании гидродинамических явлений в химической технологии важным типом движения жидкой фазы является пленочное течение [1–8]. Исследование стекания жидких пленок является важной задачей для создания миниатюрных охлаждающих устройств в микроэлектронике [9–13], при проектировании аппаратов химической технологии для сушки, выпаривания и теплообменных агрегатов [1, 5, 6], для разработки различных контактных колонн [1, 5, 6], при нанесении краски на поверхность и многих других движений тонких слоев жидкости, стекающих по наклонной поверхности под действием сил гравитации [1, 5–8]. К настоящему времени описание дрейфа пленок основывается на точном решении Нуссельта, описывающем однонаправленный поток [1, 5, 6]. Изучение свойств точного решения Нуссельта и его обобщений приведено в статьях [1, 4, 5]. Особо отметим статьи, где описывается возможность установившегося и нестационарного течения многослойных пленок [4].

С течением Нуссельта связаны известные экспериментальные исследования Капицы, согласно которым возникла необходимость методами гидродинамической устойчивости найти условие

возникновения волн на свободной границе для первоначально установившегося пленочного течения с недеформируемой границей [14–16]. В гидродинамике тонких слоев жидкости известны точные решения, которые описывают трансформацию однонаправленного напорного течения Нуссельта в двумерное (плоское) движение жидкости [4, 7]. Очевидно, что такие решения представляют интерес не только для теоретической, но и для физико-химической гидродинамики, поскольку позволят интенсифицировать потоки для создания новых типов аппаратов химической технологии.

В данной статье предполагается обобщить и модифицировать точные решения, представленных в научных работах [1, 4, 5, 7], рассмотрев течение пленки в бесконечно протяженном горизонтальном наклонном слое. Установившееся течение тонкого слоя будет описываться двумерным полем скоростей, зависящим от трех координат [17, 18]. Неоднородные течения типа Куэтта и Пуазейля, рассмотренные в статьях [17, 18] в точной постановке, позволили объяснить ряд новых физических эффектов, в том числе регистрацию режима вращения без предварительной закрутки и объяснения существования застойных точек.

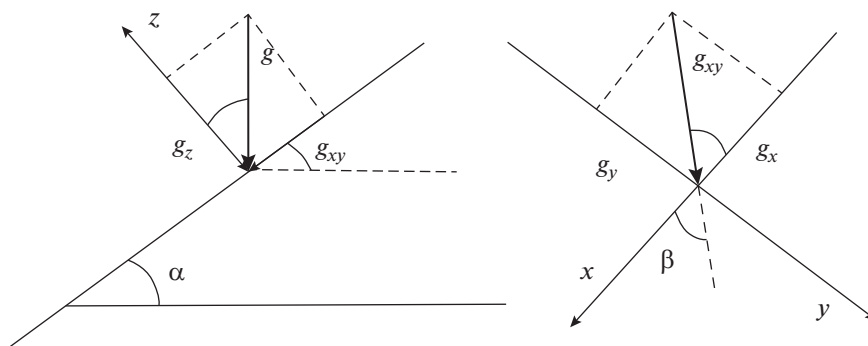


Рис. 1. Геометрия течения.

Теоретическое изучение неоднородного течения Нуссельта для различных классов граничных условий (задания скоростей и давления) необходимо для разработки новых способов исследования гидродинамической устойчивости с последующим внедрением полученных знаний в повседневное применение новых технологических решений.

### ПОСТАНОВКА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим сдвиговое (двумерное по скоростям) установившееся изотермическое течение вязкой несжимаемой жидкости в бесконечно протяженном наклонном слое заданной толщины  $h$ . Толщину слоя считаем постоянной, то есть пренебрегаем деформацией свободной границы. Такое допущение справедливо для установившихся крупномасштабных течений жидкости [17]. Система уравнений, традиционно используемая для описания такого рода течений, состоит из векторного уравнения Навье–Стокса и уравнения непрерывности (несжимаемости). Указанные уравнения в проекциях на оси системы координат принимают вид:

$$\begin{aligned}
 & V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} = \\
 & = -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right) + g \sin \alpha \cos \beta, \\
 & V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} = \\
 & = -\frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2} \right) + g \sin \alpha \sin \beta, \\
 & \frac{\partial P}{\partial z} + g \cos \alpha = 0, \tag{1}
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0. \tag{2}$$

В системе (1), (2) символами  $V_x, V_y$  обозначены ненулевые проекции вектора скорости  $V$ ;  $P$  – нормированное на среднюю плотность жидкости  $\rho$  отклонение давления от гидростатического,  $\nu$  – кинематическая вязкость;  $g$  – ускорение свободного падения.

Прямоугольная система координат  $Oxyz$  выбрана таким образом, что по плоскости  $Oxy$  течет жидкость, а ось  $Oz$  направлена перпендикулярно к этой плоскости вверх. Наклон рассматриваемого слоя по отношению к горизонту определяется величиной угла  $\alpha$  (рис. 1). Оси  $Ox, Oy$  в наклонной плоскости ориентированы таким образом, что положительное направление осей отвечает течению жидкости вниз по данной плоскости (рис. 1). Угол  $\beta$  – это угол между положительным направлением оси  $Ox$  и проекцией нормированной на плотность удельной силы тяжести на плоскость течения (рис. 1). Если положить в уравнениях (1)  $\beta = 0$ , то рассматриваемая задача сводится к двумерному течению Нуссельта. Введение дополнительного угла  $\beta$  обусловлено не только изучением неоднородного сдвигового течения жидкости, а также возможностью конструирования новых технических гидродинамических систем с управлением потоками стекающих тонких слоев.

Система (1), (2) квадратично нелинейных уравнений в частных производных является переопределенной: она содержит четыре уравнения для определения трех неизвестных функций (давления  $P$  и скоростей  $V_x, V_y$ ).

Будем далее искать точное решение уравнений (1) и (2) в следующем виде [18–22].

$$V_x = U(z) + u(z)y, \quad V_y = V(z). \tag{3}$$

Выражения (3) описывают неоднородное сдвиговое течение жидкости. Структура точного решения такова, уравнение несжимаемости (2) автоматически выполняется.

Давление также будем представлять в виде линейной формы:

$$P = P_0(z) + P_1(z)x + P_2(z)y. \quad (4)$$

Гидродинамические поля, описываемые формулами (3) и (4), принадлежат классу точных решений Линя–Сидорова–Аристова [23–25]. Заметим, что для переопределенных систем вида (1), (2) выражения (3) и (4) являются простейшим нетривиальным семейством точных решений [17, 18]. В статьях [7, 26–28] указаны способы “размножения” (например, преобразование поворота) решения (3) и (4) для трехмерного течения. В этих же статьях было показано, что при тиражировании простейшего точного решения поле скоростей (3) не приобретает новых физически важных свойств.

Далее изучим течения, которые индуцируются не только силой тяжести, но и неоднородным распределением скоростей на верхней недеформируемой границе слоя  $z = h$ :

$$V_x(h) = W \cos \varphi + \Omega y, \quad V_y(h) = W \sin \varphi \quad (5)$$

и заданием отсчетного значения давления и его горизонтальных (продольных) градиентов:

$$P(h) = p_0 + p_1 x + p_2 y. \quad (6)$$

На нижней границе  $z = 0$  полагаем выполнение традиционного для гидродинамики ньютоновской жидкости условия прилипания:

$$V_x(0) = 0, \quad V_y(0) = 0. \quad (7)$$

Краевая задача (1), (2) и (5)–(7) описывает неоднородное течение типа Куэтта–Пуазейля–Нуссельта. В случае если рассматривается безградиентное течение, то его можно классифицировать как неоднородное течение Куэтта–Нуссельта, в противном случае будет изучаться неоднородное течение Пуазейля–Нуссельта. Далее все типы течений будут проанализированы.

### ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

После подстановки выражений (3), (4) в систему уравнений (1), (2) и проведения элементарных преобразований приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, производная в которых берется по переменной  $z$ :

$$\begin{aligned} \nu u &= -P_1 + \nu(U + uy)'' + g \sin \alpha \cos \beta, \\ -P_2 + \nu V'' + g \sin \alpha \sin \beta &= 0, \\ -(P_0 + P_1 x + P_2 y)' - g \cos \alpha &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

В виду независимости пространственных переменных  $x$  и  $y$ , первое и третье уравнения в (8) распадаются на несколько уравнений:

$$\begin{aligned} u'' &= 0, \quad \nu V'' = P_2 - g \sin \alpha \sin \beta, \\ \nu U'' &= \nu U + P_1 - g \sin \alpha \cos \beta, \end{aligned} \quad (9)$$

$$P_0' = -g \cos \alpha, \quad P_1' = 0, \quad P_2' = 0. \quad (10)$$

Заметим, что первые два уравнения системы (9) и уравнения системы (10) являются изолированными, поскольку их решение может быть найдено вне зависимости от решений других уравнений:

$$\begin{aligned} P_0 &= -g \cos \alpha z + c_0, \quad P_1 = \text{const}, \\ P_2 &= \text{const}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$u = c_1 z + c_2, \quad V = \frac{P_2 - g \sin \alpha \sin \beta}{2\nu} z^2 + c_3 z + c_4. \quad (12)$$

Точное решение оставшегося (третьего) уравнения системы (9) легко получается интегрированием после подстановки выражений (11), (12):

$$\begin{aligned} U &= \frac{(P_2 - g \sin \alpha \sin \beta) c_1}{40\nu^2} z^5 + \\ &+ \frac{P_2 - g \sin \alpha \sin \beta + 2\nu c_1 c_3}{24\nu^2} z^4 + \frac{(c_1 c_4 + c_3 c_2)}{6\nu} z^3 + \\ &+ \frac{(c_2 c_4 + \nu(P_1 - g \sin \alpha \cos \beta))}{2\nu} z^2 + c_5 z + c_6. \end{aligned} \quad (13)$$

Постоянные интегрирования  $c_i$  в общем решении (11)–(13) определяются из краевых условий (5)–(7), которые согласно формулам (3) и (4) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} U(0) = u(0) = V(0) &= 0, \quad P_0(h) = p_0, \\ P_1(h) = p_1, \quad P_2(h) &= p_2, \end{aligned} \quad (14)$$

$$U(h) = W \cos \varphi, \quad u(h) = \Omega, \quad V(h) = W \sin \varphi.$$

Частное решение (11), (12), отвечающее условиям (14), имеет вид:

$$\begin{aligned} u &= \Omega Z, \\ V &= \left[ W \sin \varphi - \frac{h^2 (\sin \alpha \sin \beta g - p_2)}{2\nu} (-1 + Z) \right] Z, \\ U &= Z \left[ W \cos \varphi + h^2 \frac{\sin \alpha \cos \beta g - p_1 (1 - Z)}{2\nu} + \right. \\ &+ \frac{h^2 \Omega W \sin \varphi}{12\nu} (-1 + Z^3) + \\ &+ \left. h^4 \Omega \frac{\sin \alpha \sin \beta \Omega - p_2 (-2 + 5Z^3 - 3Z^4)}{120\nu^2} \right], \\ P_0 &= p_0 - g h \cos \alpha (Z - 1). \end{aligned} \quad (15)$$

В полиномиальных выражениях (15) введена безразмерная координата  $Z = z/h$  для единообразия описания слоев разной толщины.

### АНАЛИЗ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

Проанализируем поле скоростей (15). Заметим, что функция  $-u$  является вертикальной компонентой завихренности жидкости:

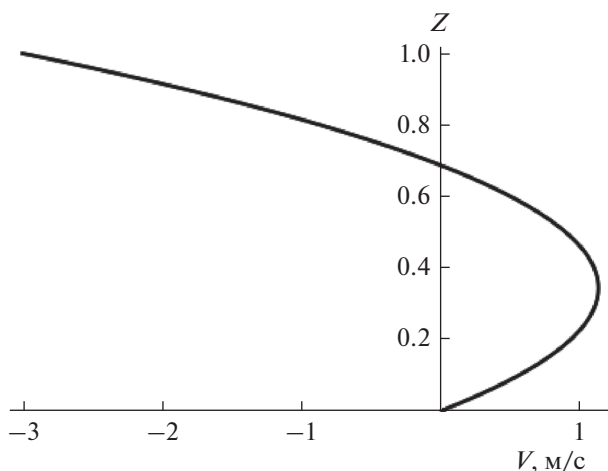


Рис. 2. Профиль скорости  $V$  при наличии противотечения.

$$\Omega_z = (\text{rot}V)_z = \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} = -u.$$

Таким образом, формулы (15) описывают течение жидкости с вертикальной закруткой без приложения силы Кориолиса. Согласно найденному точному решению, вихрь вокруг оси  $Oz$  не меняет в слое своего направления.

Поток жидкости, движущейся вдоль оси  $Oy$ , описывается профилем Куэтта–Пуазейля, который может один раз сменить направление, если полином

$$W \sin\varphi - \frac{h^2 (\sin\alpha \sin\beta g - p_2)}{2\nu} (-1 + Z)$$

имеет корень внутри интервала  $(0,1)$  (рис. 2). Последнее имеет место, если выполнено неравенство:

$$W \sin\varphi \left[ W \sin\varphi + \frac{h^2 (\sin\alpha \sin\beta g - p_2)}{2\nu} \right] < 0.$$

Если для горизонтального градиента давления выполняется равенство  $p_2 = \sin\alpha \sin\beta g$ , то скорость  $V_y = V = W \sin\varphi Z$  описывается профилем Куэтта. Таким образом, существует комбинация углов, при которой градиентное течение жидкости трансформируется в слоистое.

Наибольший интерес представляет исследование фоновой скорости  $U$ , поскольку отвечающий ей полином имеет наибольшую (пятую) степень. Скорость  $U$  определяется линейной суперпозицией нескольких потоков. Если положить в (15)  $\alpha = \beta = 0$  и  $p_1 = p_2 = 0$ , то эти формулы описывают пространственно неоднородное течение Куэтта

$$V_x = Z \left[ W \cos\varphi + \frac{h^2 \Omega W \sin\varphi}{12\nu} (-1 + Z^3) \right] + \Omega Z y,$$

изученное в [17, 18]. Это течение характеризует тем, что в жидкости регистрируются противотечения. Поле скорости стратифицируется на два встречных потока, которые контактируют по границе, параболической формы [17, 18, 29]. Если в качестве вторичных движений учитывать градиентные потоки в горизонтальном слое жидкости, то соответствующие неоднородные течения Пуазейля были рассмотрены в статьях [29]. В этих работах было показано, что учет горизонтальных градиентов давления может привести к расслоению поля скорости на три зоны, существование которых определяется двумя нулевыми значениями полинома

$$U = Z \left[ W \cos\varphi - \frac{p_1 h^2}{2\nu} (1 - Z) + \frac{h^2 \Omega W \sin\varphi}{12\nu} \times \right. \\ \left. \times (-1 + Z^3) - \frac{p_2 h^4 \Omega}{120\nu^2} (-2 + 5Z^3 - 3Z^4) \right].$$

В формуле (15) полиномы  $W \cos\varphi z$  и  $\frac{h^2 (\sin\alpha \sin\beta g - p_2)}{2\nu} (1 - Z) Z$  описывают вклад профилей Куэтта и Пуазейля соответственно.

Вторичные течения  $\frac{h^2 \Omega W \sin\varphi}{12\nu} (-1 + Z^3) Z$  и  $h^4 \Omega \frac{\sin\alpha \sin\beta \Omega - p_2}{120\nu^2} (-2 + 5Z^3 - 3Z^4)$  обусловлены учетом сил инерции в уравнениях Навье–Стокса (неоднородным распределением скоростей). Среди этих полиномов только многочлен  $(-2 + 5Z^3 - 3Z^4)$  принимает экстремальное значение

внутри слоя (при  $Z = 4/5$ ). В области монотонности этого полинома, согласно [30], скорость  $U$  может иметь до трех нулевых точек. Соответствующий профиль приведен на рис. 3, иллюстрирующем расслоение поля скорости на четыре зоны с чередованием направления течения.

Таким образом, учет наклона слоя жидкости приводит к появлению дополнительной точки стратификации (увеличивается количество зон с возвратным течением). Заметим, что суммирование фонового течения с потоком  $u_y = \Omega Z y$  в выражении для скорости  $V_x$  не приводит к появлению дополнительных противотечений.

Если изобразить годограф скоростей (рис. 4), то стекающий по наклонной плоскости поток жидкости имеет спиралевидный характер. Такой характер движения обусловлен неоднородным течением жидкости и учетом сил инерции при изучении сдвигового течения жидкости.

Для иллюстрации сложности топологии течения приведем график удельной кинетической

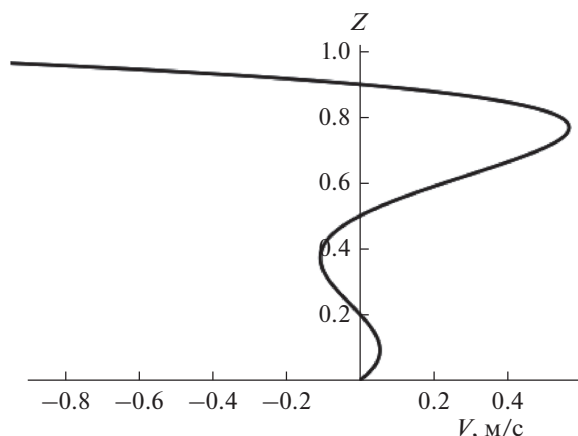


Рис. 3. Профиль скорости  $U$ , иллюстрирующий стратификацию скорости.

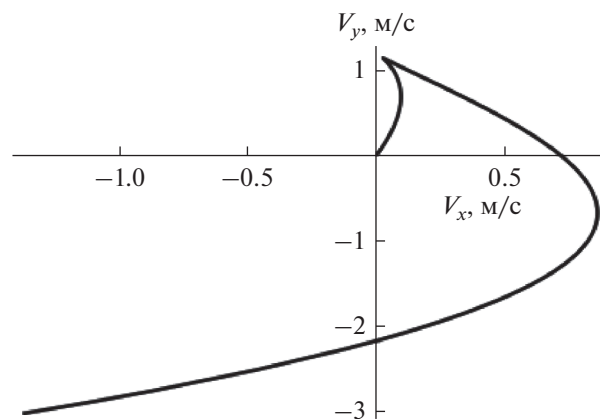


Рис. 4. Голограф вектора скорости.

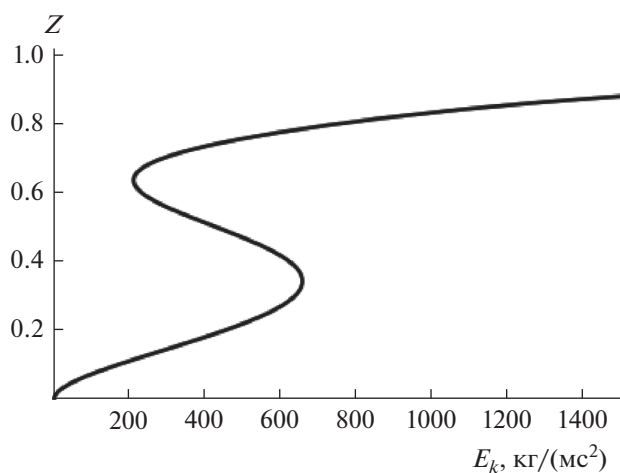


Рис. 5. Удельная кинетическая энергия неоднородного течения.

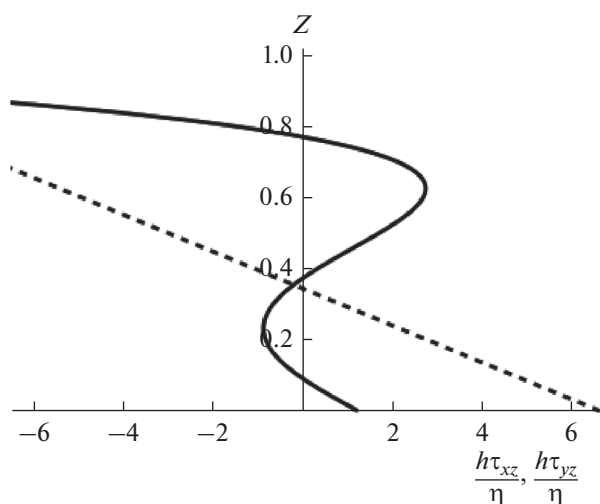


Рис. 6. Профили касательного напряжения  $\tau_{yz}h/\eta$  (штриховая линия) и касательного напряжения  $\tau_{xz}h/\eta$  (сплошная линия).

энергии (рис. 5), которая имеет несколько локальных экстремумов, обусловленных стратификацией поля скорости. Варьируя значения параметров задачи, можно добиться того, что единственная нулевая точка скорости  $V_y$  будет одной из нулевых точек скорости  $V_x$ . Другими словами, будет наблюдаться глобальная застойная точка течения. После прохождения этой точки течение либо повернется в обратную сторону либо сохранит направление, но после прохождения данной точки кинетическая энергия (в виду квадратичной зависимости от компонент проекций скорости) будет нарастать.

Опираясь на свойства поля скорости (15) и их интерпретацию (рис. 2, 3), можно заметить, что поле касательных напряжений

$$\tau_{xz} = h\eta \left[ W \cos \varphi + \frac{W \sin \varphi h^2 \Omega}{12\nu} (4Z^3 - 1) - \frac{(g \cos \beta \sin \alpha - P_1) h^2}{2\nu} (-1 + 2Z) - \frac{(g \sin \alpha \sin \beta - P_2) h^4 \Omega}{120\nu^2} (2 - 20Z^3 + 15Z^4) \right],$$

$$\tau_{yz} = h\eta \left[ W \sin \varphi - \frac{(g \sin \alpha \sin \beta - P_2) h^2}{2\nu} (-1 + 2Z) \right]$$

также может стратифицироваться. Например, касательное напряжение  $\tau_{yz}h/\eta$  ( $\eta$  – динамическая вязкость жидкости) может расслаиваться на две зоны (рис. 6, штриховая линия), а касательное напряжение  $\tau_{xz}h/\eta$  – на четыре зоны (рис. 6, сплош-

ная линия). Причем каждый раз при переходе из любой такой зоны в соседнюю зону соответствующее напряжение меняет знак (меняет тип с растягивающего на сжимающее или наоборот).

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

Найдены точные решения уравнений гидродинамики для описания неоднородного сдвигового течения в поле силы тяжести. Движение жидкости индуцируется распределением скоростей на горизонтальной свободной границе бесконечно протяженного наклонного слоя и заданием горизонтальных градиентов давления. Проведен анализ гидродинамических полей скорости и напряжений. Установлено, что удельная кинетическая энергия имеет немонотонный профиль и принимает нулевое значение в точке, располагающейся внутри слоя. Иными словами, эта точка не соответствует границе, на которой задано условие прилипания, что иллюстрирует застойную точку в потоке и существование противотечений до четырех вторичных потоков. Существование встречных потоков сопровождается сменой знаков касательных напряжений в неоднородном течении Нуссельта–Куэтта–Пуазейля.

**ОБОЗНАЧЕНИЯ**

$g$	вектор ускорения свободного падения, м/с <sup>2</sup>
$h$	толщина слоя жидкости, м
$P$	отклонение давления от гидростатического, деленное на среднюю плотность жидкости, м <sup>2</sup> /с <sup>2</sup>
$P_0, P_1, P_2$	задаваемые на границе области течения значения
$U, V, u, P_0, P_1, P_2$	функции, входящие в класс решений (3), (4)
$V_x, V_y$	компоненты вектора скорости течения жидкости, м/с
$W$	значение скорости на верхней границе, м/с
$x, y, z$	декартовы координаты, м
$Z$	безразмерная координата
$\alpha$	угол, характеризующий наклон плоскости, рад
$\beta$	угол между положительным направлением оси $Ox$ и проекцией вектора ускорения свободного падения на наклонную плоскость, рад
$\eta$	динамическая вязкость, кг/(м с)
$\nu$	кинематическая (молекулярная) вязкость жидкости, м <sup>2</sup> /с
$\tau_{xz}, \tau_{yz}$	компоненты тензора напряжений

$\varphi$	угол, определяющий направление течения по отношению к положительному направлению оси $Ox$ , рад
$\Omega$	градиент скорости $V_x$ , 1/с
$\Omega_z$	вертикальная компонента завихренности, 1/с

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. *Polyanin A.D., Kutepov A.M., Vyazmin A.V., Kazenin D.A.* Hydrodynamics, Mass and Heat Transfer in Chemical Engineering. London: Taylor & Francis, 2002.
2. *Стародубцева И.П., Павленко А.Н., Володин О.А., Суртаев А.С.* Особенности динамики повторного смачивания перегретой поверхности стекающей пленкой криогенной жидкости // Теплофиз. и аэромех. 2012. Т. 19. № 3. С. 347.
3. *Andreev V.K.* On Nusselt’s solution and its generalizations // AIP Conf. Proc. 2021. V. 2448.
4. *Drazin P.G.* Introduction to hydrodynamic stability. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
5. *Bird R.B., Stewart W.E., Lightfoot E.N.* Transport phenomena. New York: John Wiley and Sons, 1960.
6. *Левич В.Г.* Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. [Levich V.G. Physicochemical hydrodynamics. Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall, 1962.]
7. *Аристов С.Н., Князев Д.Е., Полянин А.Д.* Точные решения уравнений Навье–Стокса с линейной зависимостью компонент скорости от двухпространственных переменных // Теорет. основы хим. технологии. 2009. Т. 43. № 5. С. 547. [Aristov S.N., Knyazev D.V., Polyandin A.D. Exact solutions of the Navier-Stokes equations with the linear dependence of velocity components on two space variables // Theor. Found. Chem. Eng. 2009. V. 43. № 5. P. 642.]
8. *Ershkov S.V., Prosviryakov E.Y., Burmasheva N.V., Christianto V.* Towards understanding the algorithms for solving the Navier-Stokes equations // Fluid Dyn. Research. 2021. V. 53. № 4. 044501.
9. *Роньшин Ф.В., Чиннов Е.А., Дементьев Ю.А., Кабов О.А.* Мостиковый режим течения в микроканалах // Докл. РАН. Физика, техн. науки. 2021. Т. 499. № 1. С. 43.
10. *Zheng W., Chen T., Sen P., Bai B., Gatapova E.Y., Kabov O.A.* Subcooled jet impingement boiling enhanced by porous surface with microcolumn array // J. Enhanced Heat Transfer. 2021. Т. 28. № 5. P. 1.
11. *Karchevsky A.L., Cheverda V.V., Marchuk I.V., Gigola T.G., Kabov O.A., Sulyaeva V.S.* Heat flux density evaluation in the region of contact line of drop on a sapphire surface using infrared thermography measurements // Microgravity Sci. and Technology. 2021. Т. 33. № 4.
12. *Люлин Ю.В., Кабов О.А., Кузнецов Г.В., Феоктистов Д.В., Пономарев К.О.* Влияние протяженности межфазной поверхности на интенсивность испарения горизонтального слоя жидкости под действием потока газа // Теплофиз. и аэромех. 2020. Т. 27. № 1. С. 121. [Lyulin Y.V., Kabov O.A., Feoktistov D.V., Kuznetsov G.V., Ponomarev K.O. The effect of the interface length on the evaporation rate of a

- horizontal liquid layer under a gas flow // *Thermophysics and Aeromechanics*. 2020. Т. 27. № 1. P. 117.]
13. Kochkin D.Y., Zaitsev D.V., Kabov O.A. Thermocapillary rupture and contact line dynamics in the heated liquid layers // *Interfacial Phenomena and Heat Transfer*. 2020. Т. 8. № 1. P. 1.
  14. Капица П.Л. Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости. Свободный поток // *Журн. эксперимент. и техн. физ.* 1948. Т. 18. № 1. С. 3.
  15. Пухначев В.В. К теории катящихся волн // *Журн. прикл. мех. и техн. физ.* 1975. № 5. С. 47. [Pukhnachev V.V. On the theory of rolling waves // *J. Applied Mech. and Technical Phys.* 1975. V. 16. № 5. P. 703.]
  16. Benjamin T. Wave formation in laminar flow down an inclined plane // *J. Fluid Mech.* 1957. V. 2. № 6. P. 554.
  17. Аристов С.Н., Просвиряков Е.Ю. Неоднородные течения Куэтта // *Нелин. динам.* 2014. Т. 10. № 2. С. 177.
  18. Просвиряков Е.Ю., Спевак Л.Ф. Пространственно неоднородные слоистые течения вязкой несжимаемой жидкости // *Теорет. основы хим. технологии*. 2018. Т. 52. № 5. С. 483. [Prosviryakov E.Y., Spevak L.F. Layered three-dimensional nonuniform viscous incompressible flows // *Theor. Found. Chem. Eng.* 2018. Т. 52. № 5. P. 765.]
  19. Аристов С.Н., Просвиряков Е.Ю. Новый класс точных решений трехмерных уравнений термодиффузии // *Теорет. основы хим. технологии*. 2016. Т. 50. № 3. С. 294. [Aristov S.N., Prosviryakov E.Y. A new class of exact solutions for three-dimensional thermal diffusion equations // *Theor. Found. Chem. Eng.* 2016. V. 50. № 3. P. 286.]
  20. Просвиряков Е.Ю. Новый класс точных решений уравнений Навье–Стокса со степенной зависимостью скоростей от двух пространственных координат // *Теорет. основы хим. технологии*. 2019. Т. 53. № 1. С. 112. [Prosviryakov E.Y. New class of exact solutions of Navier–Stokes equations with exponential dependence of velocity on two spatial coordinates // *Theor. Found. Chem. Eng.* 2019. V. 53. № 1. P. 107.]
  21. Бурмашева Н.В., Просвиряков Е.Ю. Термокапиллярная конвекция вертикально завихренной жидкости // *Теорет. основы хим. технологии*. 2020. Т. 54. № 1. С. 114. [Burmashева N.V., Prosviryakov E.Yu. Thermocapillary convection of a vertical swirling liquid // *Theor. Found. Chem. Eng.* 2020. V. 54. № 1. P. 230.]
  22. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. Convective layered flows of a vertically whirling viscous incompressible fluid. Velocity field investigation // *J. Samara State Technical Univ., Ser. Phys. and Math. Sci.* 2019. V. 23. № 2. P. 341.
  23. Lin C.C. Note on a class of exact solutions in magneto-hydrodynamics // *Arch. Rational Mech. Anal.* 1958. V. 1. P. 391.
  24. Сидоров А.Ф. О двух классах решений уравнений механики жидкости и газа и их связи с теорией бегущих волн // *Прикл. мех. и теорет. физ.* 1989. № 2. С. 34. [Sidorov A.F. Two classes of solutions of the fluid and gas mechanics equations and their connection to traveling wave theory // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 1989. V. 30. № 2. P. 197.]
  25. Аристов С.Н. Вихревые течения в тонких слоях жидкости: дис. ... д-р. физ.-мат. наук. Владивосток: ИАПУ, 1990.
  26. Полянин А.Д., Аристов С.Н. Новый метод построения точных решений трехмерных уравнений Навье–Стокса и Эйлера // *Теорет. основы хим. технологии*. 2011. Т. 45. № 6. С. 696. [Polyanin A.D., Aristov S.N. A new method for constructing exact solutions to three-dimensional Navier-Stokes and Euler equations // *Theor. Found. Chem. Eng.* 2011. V. 45. № 6. P. 885.]
  27. Aristov S.N., Polyanin A.D. New classes of exact solutions and some transformations of the Navier-Stokes equations // *Russian J. Math. Physics*. 2010. V. 17. № 1. P. 1.
  28. Аристов С.Н., Полянин А.Д. Точные решения трехмерных нестационарных уравнений Навье–Стокса // *Докл. АН*. 2009. Т. 427. № 1. С. 35. [Aristov S.N., Polyanin A.D. Exact solutions of unsteady three-dimensional Navier-Stokes equations // *Doklady Physics*. 2009. V. 54. № 7. P. 316.]
  29. Горюлева Л.С., Просвиряков Е.Ю. Неоднородное сдвиговое течение Куэтта–Пуазейля при движении нижней границы горизонтального слоя // *Химич. физ. и мезоскопия*. 2021. №4. С. 403.
  30. Бурмашева Н.В., Просвиряков Е.Ю. Исследование стратификации гидродинамических полей для слоистых течений вертикально завихренной жидкости // *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*. 2020. № 4. С. 62.